Exposé de maîtrise de mathématiques 2007-2008

De l'instabilité spectrale à l'instabilité non-linéaire
Application à la mécanique des fluides

Clément LEVRARD & Gary OGER

27 juin 2008

Table des matières

Présentation

Dans cet exposé, on s'intéressera de manière générale à la stabilité des systèmes dynamiques de la forme :

$$\frac{du}{dt} = Lu + F(u) \tag{0.1}$$

où L est un opérateur linéaire et F est un opérateur non-linéaire telle que $F(u) = o(\|u\|)$ dans une norme convenable. Evidemment si $F = 0$, l'équation est linéaire et se résout sous de bonnes hypothèses en :

$$u(t) = e^{tL}u(0) \tag{0.2}$$

où $t \mapsto e^{tL}$ est un semi-groupe associé à L

Ainsi si le spectre de L rencontre le demi-plan $\{\lambda \in \mathbb{C}; \Re\lambda > 0\}$ (on parle d'*instabilité spectrale*), il existe des solutions non nulles qui sont non bornées dans le temps (on peut le voir avec le théorème de Banach-Steinhaus), et on dira que la solution $u = 0$ est *instable.*

Le problème sera de savoir si, dans le cas où $F \neq 0$ et vérifie une relation du type $F(u) = o(\|u\|)$, l'instabilité spectrale de L implique toujours l'instabilité de la solution $u = 0$.

Après avoir défini la notion d'instabilité des solutions, nous verrons que plusieurs cas seront à considérer :

- *dimension finie* : ce cas pourra être traité assez facilement, en raison de la structure très simple du spectre en dimension finie ;
- *EDP sans perte de régularité pour la non-linéarité F* : dans ce cas, on sera en dimension infinie, mais l'opérateur F n'impliquant pas de perte de régularité sur les solutions, l'étude se fera dans un seul espace de Banach. Ce cas sera plus difficile car le spectre peut être très complexe de manière générale, et cela demande du travail pour se ramener à une preuve ressemblant à celle du cas de la dimension finie. On étudiera donc quelques propriétés générales du spectre et des opérateurs linéaires des espaces de Banach, puis on donnera un théorème général d'instabilité, et un exemple d'application ;
- *EDP avec perte de régularité pour la non-linéarité F* : dans ce cas, l'opérateur F contiendra des dérivées spatiales, et donc diminuera la régularité des solutions. On devra en fait travailler dans deux espaces de Banach distincts, ce qui compliquera l'étude. On verra que seulement des résultats partiels sont connus, concernant des types d'équations particuliers. On s'intéressera d'abord au cas des opérateurs régularisants, pour lesquels l'action du semi-groupe e^{tL} permet de compenser la perte de régularité. Une étude simplifiée des équations de Navier-Stokes, qui donnent l'évolution d'un fluide visqueux incompressible, permettra d'illustrer ce point.
  Pour le cas général, il n'y a pas de théorème d'instabilité, et on se concentrera sur un cas particulier, celui de l'équation d'Euler, qui régit en physique la dynamique des fluides incompressibles.

REMARQUE – Dans tout le rapport, on travaillera sur le corps $\mathbb{C}$ pour établir les théorèmes généraux. Les exemples feront intervenir des espaces réels, mais on pourra tout de même appliquer les théorèmes en considérant le complexifié.

1 Equations différentielles ordinaires en dimension finie

On commence par s'intéresser au cas simple de la dimension finie, dont le schéma de preuve sera utilisé par la suite dans les cas plus compliqués.

1.1 Définitions

On se place donc ici dans $X = \mathbb{C}^n$, avec $u(x) \in X$, on se donne $L : X \to X$ une application linéaire, et $F : X \to X$ une application régulière (on précisera ceci plus avant) telle que $F(0) = 0$ et $dF(0) = 0$. On appelle solution de (0.1) sur un intervalle $[0, T[$ une fonction continue $u \in \mathcal{C}([0, T[, X)$ qui vérifie pour tout $t \in [0, T[$ l'équation intégrale suivante :

$$u(t) = e^{tL}u(0) + \int_0^t e^{(t-s)L}F(u(s))ds \tag{1.1}$$

Définition 1.1 (Stabilité non-linéaire)**.** *La solution est dite* stable non-linéairement *si* $\forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0$ *tel que si* $\|u_0\| < \delta$*, alors il existe une unique solution* $u \in \mathcal{C}([0, \infty[, X)$ *de (0.1) vérifiant* $u(0) = u_0$ *et telle que :*

$$\sup_{0 \le t < \infty} \|u(t)\| < \epsilon.$$

Définition 1.2 (Instabilité non-linéaire)**.** *La solution est dite* instable non-linéairement *dans le cas contraire.*

La question est de savoir si l'instabilité spectrale $\sigma(L) \bigcap \{\lambda \in \mathbb{C}; \Re\lambda > 0\} \neq \emptyset$ (où $\sigma(L)$ désigne le spectre de L) implique l'instabilité non-linéaire de la solution $u = 0$. On donne d'abord un lemme concernant le spectre en dimension finie.

Lemme 1.3. *Soit* Λ *la valeur propre de* L *de partie réelle maximale. Alors pour tout* $\epsilon > 0$*, il existe* $C_\epsilon > 0$ *tel que pour* $t > 0$ *: :*

$$|||e^{tL}||| \le C_\epsilon e^{(\Re\Lambda+\epsilon)t}. \tag{1.2}$$

Preuve. On utilise la décomposition de Dunford : on écrit $L = D + N$ où D est diagonalisable (et ses valeurs propres sont celles de L) et N nilpotent, avec $DN = ND$. On a donc :

$$\begin{aligned} |||e^{tL}||| &\le |||e^{tD}e^{tN}||| \\ &\le |||e^{tD}|||\,|||e^{tN}||| \end{aligned}$$

Or par définition de Λ, on a $\left|\left|\left|e^{tD}\right|\right|\right| = e^{\Re\Lambda t}$. Et comme N est nilpotent, $\left|\left|\left|e^{tN}\right|\right|\right|$ est polynomial en temps. Ainsi :

$$\left|\left|\left|e^{tL}\right|\right|\right| \le e^{\Re\Lambda t}P(t) \le C_\epsilon e^{(\Re\Lambda+\epsilon)t}$$

car un polynôme peut être dominé uniformément sur R_+ par une exponentielle.

□

1.2 Théorème d'instabilité

On peut maintenant énoncer le théorème général relatif à l'instabilité de la solution $u = 0$.

Théorème 1.4 (Instabilité non-linéaire)**.** *Supposons que les hypothèses suivantes sont vérifiées :*

i) $\sigma(L) \bigcap \{\lambda \in \mathbb{C}; \Re\lambda > 0\} \neq \emptyset$

ii) $\exists \rho_0 > 0$, $\exists C_0 > 0$ *tels que* $\forall \|v\| \leq \rho_0$, $\|F(v)\| \leq C_0 \|v\|^2$

Alors la solution $u = 0$ de (0.1) est instable non-linéairement.

Preuve. On suppose par l'absurde que la solution $u = 0$ est stable non-linéairement. Ainsi on dispose de $\delta_0 > 0$ tel que si $\|u_0\| \leq \delta_0$, il existe une unique solution $u \in \mathcal{C}([0, \infty[, X)$ de (0.1) vérifiant $u(0) = u_0$ et telle que $\sup\limits_{0 \leq t < \infty} \|u(t)\| < \rho_0$.

Soit u_0 un vecteur propre de L pour la valeur propre Λ définie comme au lemme (1.3), et on a alors aussi $e^{tL}u_0 = e^{\Lambda t}u_0$ pour tout $t \geq 0$. On choisit $\|u_0\| = \delta \leq \delta_0$(on fixera δ assez petit ultérieurement), et on note alors u la solution globale de (0.1) telle que $u(0) = u_0$. Soit v définie pour $t \geq 0$ par $v(t) = u(t) - e^{\Lambda t}u_0$, et

$$T = \sup\{t \geq 0; \|v(\tau)\| \leq \frac{\delta}{2} e^{\Re\Lambda\tau} \text{ pour } 0 \leq \tau \leq t\}.$$

En utilisant la formule intégrale (1.1), on obtient pour $t \leq T$:

$$\begin{aligned}
\|v(t)\| = \left\| \int_0^t e^{(t-s)L} F(u(s)) ds \right\| &\leq \int_0^t |||e^{(t-s)L}||| \|F(u(s))\| ds \\
&\leq C_0 \int_0^t |||e^{(t-s)L}||| \|u(s)\|^2 ds \\
&\leq C_0 \int_0^t |||e^{(t-s)L}||| \left(\frac{3}{2}\delta e^{\Re\Lambda s}\right)^2 ds \\
&\leq \frac{9}{4} C_0 \int_0^t |||e^{(t-s)L}||| \delta^2 e^{2\Re\Lambda s} ds.
\end{aligned}$$

On choisit maintenant $\eta = \frac{\Re\Lambda}{2}$ dans (1.2). On obtient :

$$\begin{aligned}
\|v(t)\| &\leq \underbrace{\frac{9}{4} C_0 C_\eta}_{=C_1} \int_0^t e^{\frac{3}{2}\Re\Lambda(t-s)} \delta^2 e^{2\Re\Lambda s} ds \\
&\leq C_1 \delta^2 e^{\frac{3}{2}\Re\Lambda t} \int_0^t e^{\frac{1}{2}\Re\Lambda s} \\
&\leq C\delta^2 e^{2\Re\Lambda t} \text{ où } C = \frac{2C_1}{\Re\Lambda}. \qquad (1.3)
\end{aligned}$$

D'où pour $t \leq T$:

$$\begin{aligned} \|u(t)\| &\geq e^{\Re\Lambda t}\|u_0\| - C\delta^2 e^{2\Re\Lambda t} \\ &\geq G_\delta(t) - CG_\delta(t)^2 \end{aligned} \tag{1.4}$$

où $G_\delta(t) = \delta e^{\Re\Lambda t}$ vérifie $G_\delta(0) = \delta$ et $G_\delta(+\infty) = +\infty$. Ainsi pour δ assez petit, il existe $t_\delta > 0$ tel que $G_\delta(t_\delta) = \frac{1}{2C}$. Montrons que $t_\delta \leq T$. En effet en appliquant (1.3) à $t = T$, on a $\|v(T)\| \leq C\delta^2 e^{2\Re\Lambda t}$, et par définition de T, $\|v(T)\| = \frac{\delta}{2} e^{\Re\Lambda T}$, d'où :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2C} &\leq \delta e^{\Re\Lambda T} \\ \text{soit } e^{\Re\Lambda t_\delta} &\leq e^{\Re\Lambda t} \\ \text{soit } t_\delta &\leq T. \end{aligned}$$

Ainsi d'après (1.4), $\|u(t_\delta)\| \geq \frac{1}{2C} - \frac{C}{4C^2} = \frac{1}{4C} > 0$. Il suffit alors de prendre $\epsilon = \frac{1}{4C}$ dans la définition de la stabilité pour avoir une contradiction.

□

2 EDP : cas d'une non-linéarité sans perte de dérivée

On passe à présent au cas où X n'est plus nécéssairement R^n, mais un Banach quelconque, de dimension infinie a priori. Nous allons voir que le théorème précédent reste vrai, mais avant cela, donnons quelques propriétés du spectre. On parle de *non-linéarité sans perte de dérivée* au sens où un seul espace de Banach entre en jeu ici, et on verra à la fin de la un exemple d'EDP pour laquelle le théorème s'applique.

2.1 Eléments de théorie spectrale

2.1.1 Spectre d'un opérateur borné

On s'intéresse ici aux propriétés les plus générales du spectre. On verra dans la troisième partie d'autres détails de théorie spectrale utiles pour traiter certaines équations.

De manière générale, un opérateur linéaire est une application $L : D(L) \longrightarrow X$, linéaire, où $D(L)$ est le domaine de définition de L (c'est un sous-espace de X), et qui est de plus fermé, c'est-à-dire que si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} u$ dans X avec les u_n dans $D(L)$ et si $Lu_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} v$ dans X, alors on a $u \in D(L)$ et $Lu = v$. L'opérateur est dit borné si l'image de la boule unité de $D(L)$ est bornée dans X (les opérateurs bornés s'identifient aux applications linéaires continues).

Ici et dans la suite, on s'intéressera aux opérateurs bornés et dont le domaine est dense. Un tel opérateur T s'étend ainsi en un opérateur continu de X dans X, dont la norme est $\sup\limits_{x\in X,\|x\|=1} \|T(x)\| < \infty$.

Définition 2.1. *On appelle* ensemble résolvant *l'ensemble* $\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}; \lambda I - T \text{ inversible}\}$.

Définition 2.2. *On appelle* spectre *de T, et on note $\sigma(T)$, le complémentaire de l'ensemble résolvant. De plus, on appelle* rayon spectral *de T (qu'on note $spr(T)$ la borne supérieure du spectre, c'est-à-dire $spr(T) = \sup\{|\lambda|; \lambda \in \sigma(T)\}$.*

Définition 2.3. *On appelle résolvante l'application* $R : \begin{array}{ccc} \rho(T) & \longrightarrow & \mathcal{L}(X) \\ \lambda & \longmapsto & (T-\lambda I)^{-1} \end{array}$

Remarque – R est bien à valeurs dans $\mathcal{L}(X)$ car si $\lambda \in \rho(T)$, alors $T - \lambda I$ est une bijection linéaire continue donc d'inverse continue d'après le théorème d'isomorphisme de Banach.

Proposition 2.4. *$\rho(T)$ est ouvert.*

Preuve. En effet si $\lambda_0 \in \rho(T)$, on a pour $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$T - \lambda = (T - \lambda_0)\left(I - (\lambda - \lambda_0)(T - \lambda_0)^{-1}\right) \tag{2.1}$$

Or on sait que $I - \mu T$ est inversible pour $\mu < \frac{1}{|||T|||}$ (d'inverse $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mu^n |||T|||^n$ qui converge normalement). Ainsi si $\|\lambda - \lambda_0\| < \frac{1}{|||(T-\lambda_0)^{-1}|||}$, on voit que $T - \lambda I$ est inversible.

□

On en déduit que le spectre $\sigma(T)$ est fermé.

Proposition 2.5. *La résolvante R est holomorphe sur son domaine de définition.*

Preuve. Soit $\lambda_0 \in \rho(T)$. Pour $\|\lambda - \lambda_0\| < |||R(\lambda_0)|||^{-1}$, on a, d'après (2.1) :

$$R(\lambda) = (I - (\lambda - \lambda_0)R(\lambda_0))^{-1}R(\lambda_0) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda - \lambda_0)^n R(\lambda_0)^{n+1} \tag{2.2}$$

Ainsi R est holomorphe en λ_0, et par ailleurs, on a le développement suivant en série de Laurent à l'infini :

$$R(\lambda) = -\lambda^{-1}(1 - \lambda^{-1}T)^{-1} = -\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^{-n-1}T^n \tag{2.3}$$

qui converge pour $|\lambda| > spr(T)$.

□

Proposition 2.6. *Le spectre de T est un compact non vide.*

Preuve. En effet s'il était vide le résolvant serait une application entière, tendant vers 0 en $+\infty$ d'après (2.3), donc constante égale à 0 d'après le théorème de Liouville. Ceci est absurde car $R(\lambda)(T - \lambda I) = I$.

Il reste seulement à montrer que $\sigma(T)$ est borné. En effet si $\lambda > |||T|||$, on a que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|||T|||^n}{\lambda^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left|\left|\left|\frac{T}{\lambda}\right|\right|\right|^n$ converge, donc que $I - \frac{T}{\lambda}$ est inversible, soit $\lambda \notin \sigma(T)$. Ainsi $\sigma(T)$ est borné par $|||T|||$.

□

2.1.2 Classification du spectre

Contrairement au cas de la dimension finie, le spectre en dimension infinie ne se réduit pas aux seules valeurs propres en général. On distingue alors les différents éléments du spectre dans les ensembles suivants (on donne ici les dénominations anglaises) :

Spectre ponctuel Il s'agit de l'ensemble des valeurs propres, c'est-à-dire l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $\lambda I - T$ soit non injectif.

Approximate point spectrum Il s'agit de l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $\lambda I - T$ ne soit pas minoré, c'est-à-dire tels que :

$$\forall c > 0 \ \exists x \in X \text{ tel que } \|\lambda x - T(x)\| < c\|x\|$$

C'est donc l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que :

$$\exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}} \text{ telle que } \|x_n\| = 1 \text{ et } \|\lambda x_n - Tx_n\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

REMARQUE – De tels λ sont bien dans le spectre, car sinon $\lambda I - T$ aurait un inverse continu, et donc $\lambda I - T$ serait minoré par $\frac{1}{|||(\lambda I - T)^{-1}|||}$.

Spectre résiduel C'est l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $\lambda I - T$ est non surjectif.

Spectre essentiel Il existe plusieurs définitions du spectre essentiel, recouvrant globalement la même notion. L'une d'entre elles est de dire que :

$$\sigma_e = \mathbb{C} - \left\{ \begin{array}{c} \lambda \in \mathbb{C} \text{ tels que } Im(T - \lambda I) \text{ fermée, } dim\ Ker(T - \lambda I) < +\infty, \\ codim\ Im(T - \lambda I) < +\infty \end{array} \right\},$$

c'est-à-dire que $T - \lambda I$ n'est pas un *opérateur de Fredholm.* Dans le cas d'un opérateur autoadjoint, le spectre essentiel est le complémentaire de l'ensemble des valeurs propres isolées de multiplicité finie.

2.2 Théorème d'instabilité

Il s'agit maintenant de voir pourquoi, en dimension infinie, l'instabilité linéaire implique toujours l'instabilité non-linéaire pour des non-linéarités sans perte de dérivée. De même que dans la première partie, on considère l'équation $\frac{du}{dt} = Lu + F(u)$, avec $u(t) \in X$, $t > 0$. Cependant les conditions sur L et F sont un peu plus précises. A ce titre, donnons quelques explications sur les semi-groupes d'opérateurs.

Définition 2.7. *On dit qu'un ensemble $\{T(t); t \geq 0\}$ d'opérateurs bornés sur X est un semi-groupe fortement continu si c'est un semi-groupe tel que pour tout $x \in X$, la fonction $t \mapsto T(t)x$ est continue.*

Définition 2.8 (Générateur)**.** *On dit que $L : D(L) \longrightarrow X$ génère le semi-groupe fortement continu $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ si $D(L) = \left\{ \begin{array}{c} x \in X \text{ tels que } \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{T(h)x - x}{h} \text{ existe} \\ \text{dans } X \text{ et cette limite est } Lx \end{array} \right\}$. Il est alors d'usage de noter un élément $T(t)$ du semi-groupe e^{tL}. On a alors pour $x \in D(L)$:*

$$\left.\frac{d(T(t)x)}{dt}\right|_{t=0} = \left.\frac{d(e^{tL}x)}{dt}\right|_{t=0} = Lx$$

REMARQUE – Par définition du générateur, si $u_0 \in D(L)$, alors $u(t) = e^{tL}u_0$ est solution de $\frac{du}{dt} = Lu$.

La définition d'une solution de l'équation est la même que dans la première partie (voir équation intégrale (1.1)), où e^{tL} désigne maintenant un élément du semi-groupe.

On peut maintenant donner l'énoncé général du théorème d'instabilité non-linéaire en dimension infinie.

Théorème 2.9 (Instabilité non-linéaire)**.** *Supposons que les hypothèses suivantes sont vérifiées :*

i) *L génère un semi-groupe fortement continu sur l'espace de Banach X.*

ii) $\sigma(L) \bigcap \{\lambda \in \mathbb{C}; \Re\lambda > 0\} \neq \emptyset$.

iii) $F : X \longrightarrow X$ *est continue et* $\exists \rho_0 > 0, \eta > 0$, *et* $C_1 > 0$ *tels que* $\|F(u)\| \leq C_1 \|u\|^{1+\eta}$ *pour* $\|u\| < \rho_0$.

Alors la solution $u = 0$ *de (0.1) est instable non-linéairement.*

En fait, la preuve nécessite seulement l'hypothèse plus faible **ii')** $\sigma(e^L) \bigcap \{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda| > 1\} \neq \emptyset$ à la place de l'hypothèse **ii)**. Montrons que l'on a bien **ii)** $\Longrightarrow$ **ii')**.

Preuve. On a de manière générale $e^{\sigma(L)} \subset \sigma\left(e^L\right)$. Pour le voir, on se place d'abord dans le cas où $D(L) = X$, et on prend $e^\lambda \notin \sigma\left(e^L\right)$ et $v \in X$. Il existe donc $w \in X$ tel que $v = \left(e^{L-\lambda} - I\right) w$. On a donc :

$$\begin{aligned} v = \left(e^{L-\lambda} - I\right) w &= \int_0^1 \frac{d}{dt}\left(e^{(L-\lambda)t} w\right) dt \\ &= \int_0^1 (L-\lambda) e^{(L-\lambda)t} w dt \\ &= (L-\lambda) \underbrace{\int_0^1 e^{(L-\lambda)t} w dt}_{=u} \end{aligned}$$

donc $v \in Im(L - \lambda)$, qui est donc surjectif. Dans le cas où $D(L)$ est strictement contenu dans X, ce calcul n'est pas correct en général, mais il le reste si l'élément w choisi est dans $D(L)$. En effet dans ce cas les premières étapes du calcul sont correctes par définition du générateur d'un semi-groupe. Pour la dernière étape, on peut justifier que u appartient bien à $D(L)$, en écrivant l'intégrale le définissant comme limite d'une somme de Riemann et en utilisant que l'opérateur L est fermé. On admet que le résultat est vrai en général.

Par ailleurs, $L - \lambda$ est injectif car sinon il existe x tel que $Lx = \lambda x$ donc $e^L x = e^\lambda x$ ce qui ne se peut car $e^{(L-\lambda)}$ est injectif. Ainsi on voit que l'hypothèse **ii)** implique bien l'hypothèse **ii')**. Donc le spectre de e^L contient des éléments de module > 1.

□

Avant d'expliquer la preuve du théorème, il faut donner quelques lemmes permettant de se ramener au cas de la dimension finie, cas simple car on dispose d'une valeur propre de module égal au rayon spectral. En dimension infinie, ce n'est plus forcément le cas. Il faut alors regarder la structure du spectre pour trouver des éléments du spectre "proches" du rayon spectral, et qui conviennent pour appliquer la démonstration de la première partie.

Lemme 2.10. *Soit* B *un opérateur borné sur* X *et* μ *un élément de la frontière de* $\sigma(B)$. *Alors* μ *est dans l'*approximate point spectrum *de* B, *ie :*

$$\inf_{v \in X, \|v\|=1} \|(B - \mu I)v\| = 0$$

Preuve. On considère une suite $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\mu_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mu$ avec $\mu_n \notin \sigma(B)$. Ainsi $(\mu_n - B)^{-1}$ est défini. Sa norme est supérieure à son rayon spectral d'après (2.6). Or $\sigma\left((\mu_n - B)^{-1}\right) = (\mu_n - \sigma(B))^{-1}$. Ainsi :

$$\left\|(\mu_n - B)^{-1}\right\| \geq \frac{1}{d(\mu_n, \sigma(B))} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

Avec le théorème de Banach-Steinhaus, on obtient que :

$$\exists v \in X,\ \left\|(\mu_n - B)^{-1}v\right\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

Soit alors $v_n = \frac{(\mu_n-B)^{-1}v}{\|(\mu_n-B)^{-1}v\|}$. On a $v_n \in D(B)$ et $\|v_n\| = 1$. Et en appliquant l'égalité

$$(B-\mu)(\mu_n - B)^{-1} = (\mu_n - \mu)(\mu_n - B)^{-1} - I$$

au vecteur $v\left\|(\mu_n - B)^{-1}v\right\|^{-1}$, on obtient finalement :

$$\|(B-\mu)v_n\| = \left\|(\mu_n - \mu)v_n - \frac{v}{\left\|(\mu_n - B)^{-1}v\right\|}\right\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

□

L'utilité de ce lemme est de fournir des éléments du spectre (la frontière de $\sigma(B)$ est incluse dans $\sigma(B)$ car le spectre est compact) de module égal au rayon spectral, et qui sont "presque des valeurs propres", ainsi on va pouvoir appliquer les idées de la partie 1.

Lemme 2.11. *Soit $e^{\lambda} \in \sigma\left(e^{L}\right)$ tel que $\left|e^{\lambda}\right|$ soit égal au rayon spectral de e^{L}. Alors pour tout $\gamma > 0$ et tout entier $m > 0$, il existe $v \in X$ tel que :*

$$\left\|(e^{mL} - e^{m\lambda})v\right\| < \gamma\|v\| \tag{2.4}$$

et

$$\left\|e^{tL}v\right\| \leq 2Ke^{t\Re\lambda}\|v\|\ \forall t \in [0, m] \tag{2.5}$$

où $K = \sup\left\{\left\|e^{\theta L}\right\|; 0 \leq \theta \leq 1\right\}$.

Preuve. On choisit μ tel que $|\mu| = max\left\{|\nu|; \nu \in \sigma\left(e^{L}\right)\right\}$ (donc $|\mu| > 1$ par **ii')**). On applique alors le lemme (2.10) à e^{L}, et on écrit $\mu = e^{\lambda}$, avec $\Re\lambda > 0$. On dispose d'une suite $(v_n)_{n\in N}$ telle que $\|v_n\| = 1$ et $\left(e^{L} - e^{\lambda}\right)v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Ainsi pour tout entier $m > 0$, on a :

$$\left(e^{mL} - e^{m\lambda}\right)v_n = \sum_{j=0}^{m-1} e^{(m-1-j)\lambda}e^{jL}\left(e^{L} - e^{\lambda}\right)v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Si γ est fixé, on peut alors choisir n assez grand pour que v_n satisfasse à (2.4) et $\left\| \left(e^{jL} - e^{j\lambda}\right) v_n \right\| < 1$ pour $j \in [\![0, m]\!]$. Soit alors $t \in [0, m]$ et $j = \lfloor t \rfloor$. Alors :

$$\left\|e^{tL} v_n\right\| \leq K \left\|e^{jL} v_n\right\| \leq K \left(\left\|e^{j\lambda} v_n\right\| + 1\right) < 2K e^{t\Re\lambda}$$

et donc (2.5) est aussi vérifiée.

□

Lemme 2.12. *Pour tout $\epsilon > 0$, il existe C_ϵ tel que pour tout $t \geq 0$ on a :*

$$e^{\Re\lambda t} \leq \left\|e^{tL}\right\| \leq C_\epsilon e^{(\Re\lambda + \epsilon)t} \tag{2.6}$$

Preuve. La preuve est très similaire à celle du lemme (1.3).

□

REMARQUE – Ce lemme affirme que la norme du semi-groupe augmente au taux de la "presque valeur propre" λ.

Preuve du théorème. On dispose de $\mu = e^\lambda$ comme dans le lemme (2.11). Soit $\delta > 0$, que l'on choisit $< min\{\frac{1}{k}, \frac{\rho_0}{2}, 1\}$ pour les calculs. Pour un réel k défini ultérieurement, on note T^* l'unique entier tel que $\frac{1}{k} < \delta e^{T^* \Re\lambda} \leq \frac{|\mu|}{k}$. On dispose également de u_0 donné par le lemme (2.11) pour $m = T^*$ et $\gamma = \frac{1}{4k}$, et on peut choisir $\|u_0\| = \delta$. On a d'après (2.4) :

$$\left\|e^{T^* L} u_0\right\| > \left\|e^{T^* \lambda} u_0\right\| - \frac{\delta}{4k} > \frac{1}{k} - \frac{\delta}{4k}, \tag{2.7}$$

et d'après (2.5) :

$$\left\|e^{tL} u_0\right\| \leq 2K\delta e^{t\Re\lambda} \;\forall\; 0 \leq t \leq T^* \tag{2.8}$$

De même que dans la première partie, on suppose la solution $u = 0$ stable, donc il existe δ_0 tel que si $\|u_0\| = \delta < \delta_0$, alors il existe une unique solution $u \in ([0, +\infty[, X)$ de l'équation intégrale (1.1) avec $u(0) = u_0$. On va montrer que $\|u(t)\| > \frac{1}{4k}$ pour un certain temps t. On pose :

$$T = sup\left\{t \geq 0; \left\|u(\tau) - e^{\tau L} u_0\right\| < \frac{1}{2\mu} \delta e^{\Re\lambda\tau} \text{ et } \|u(\tau)\| < \frac{\rho_0}{2} \text{ pour } 0 \leq \tau \leq t\right\}$$

On voit que $T > 0$. Pour $t \leq min(T, T^*)$, on a d'après **iii)**, (2.6) (avec $\epsilon = \frac{\Re\lambda\eta}{2}$) et (2.8) :

$$\begin{aligned}
\left\|u(t)-e^{tL}u_0\right\| &\leq \int_0^t \left\|e^{(t-\tau)L}\right\| C_1\|u(\tau)\|^{1+\eta}d\tau \\
&\leq C_\epsilon C_1 \int_0^t e^{(1+\frac{\eta}{2})\Re\lambda(t-\tau)}\|u(\tau)\|^{1+\eta}d\tau \\
&\leq C_\epsilon C_1 \int_0^t e^{(1+\frac{\eta}{2})\Re\lambda(t-\tau)}\left(\left\|e^{\tau L}u_0\right\|+\left\|u(\tau)-e^{\tau L}u_0\right\|\right)^{1+\eta}d\tau \\
&\leq C_\epsilon C_1 \int_0^t e^{(1+\frac{\eta}{2})\Re\lambda(t-\tau)}\left(2K\delta e^{\Re\lambda\tau}+\frac{1}{2|\mu|}\delta e^{\Re\lambda\tau}\right)^{1+\eta}d\tau \\
&< \underbrace{C_\epsilon C_1\left(2K+\frac{1}{2|\mu|}\right)^{1+\eta}\delta^{1+\eta}\ \frac{2}{\eta\Re\lambda}e^{(1+\eta)\Re\lambda t}}_{=\frac{k^\eta}{2|\mu|^{1+\eta}}\left(\delta e^{\Re\lambda t}\right)^{1+\eta}} \qquad (2.9)
\end{aligned}$$

On a alors $T^* < T$ ou $\|u(T)\| = \frac{\rho_0}{2}$. En effet sinon en utilisant la définition de T et le calcul précédent pour $t = T$ on a :

$$\left\|u(T)-e^{TL}u_0\right\| = \frac{1}{2|\mu|}\delta e^{\Re\lambda T} < \frac{k^\eta}{2|\mu|^{1+\eta}}\left(\delta e^{\Re\lambda T}\right)^{1+\eta}$$

d'où :

$$\left(\delta e^{\Re\lambda T}\right)^\eta > \left(\frac{|\mu|}{k}\right)^\eta \geq \left(\delta e^{\Re\lambda T^*}\right)^\eta$$

donc $T > T^*$ (car $\Re\lambda > 0$) d'où la contradiction. Ainsi, si $\|u(T)\| < \frac{\rho_0}{2}$, on a $T^* < T$ et le calcul (2.9) donne pour $t = T^*$:

$$\left\|u(T^*)-e^{T^*L}u_0\right\| < \frac{1}{2k}$$

d'où avec (2.7) :

$$\|u(T^*)\| > \frac{1}{2k}-\frac{\delta}{4k} > \frac{1}{4k} \text{ car } \delta < 1$$

Dans tous les cas il existe un temps t pour lequel $\|u(t)\| \geq min\{\frac{1}{4k}, \frac{\rho_0}{2}\}$, ce qui achève la preuve.

□

2.3 Exemple

On peut donner un exemple d'équation différentielle pour laquelle ce théorème d'instabilité s'applique. On se place par exemple sur l'espace normé $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ des fonctions continues sur le tore $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. L'équation considérée est la suivante :

$$\partial_t u - \alpha u + a\partial_x u = u^2 \qquad (2.10)$$
$$\alpha > 0, a \in \mathbb{R}$$

ou plutôt pour l'écrire de manière à appliquer le théorème :

$$\frac{du}{dt} = Lu + u^2 \tag{2.11}$$

avec $u(t) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{T})$ et $L : \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^1(\mathbb{T}) & \longrightarrow & \mathcal{C}(\mathbb{T}) \\ u & \longmapsto & \alpha u - au' \end{array}$ et $F(u) = u^2$.

On vérifie facilement que L génère le semi-groupe fortement continu d'opérateurs définis par $T(t)u_0(x) = e^{\alpha t}u_0(x - at)$, et que F vérifie la condition **iii)** du théorème.

Par ailleurs on peut remarquer que $x \mapsto e^{ix}$ est vecteur propre de T(t) avec comme valeur propre $e^{(\alpha - ia)t}$. En particulier $e^{\alpha - ia}$ est valeur propre de $T(1) = e^L$, et donc comme $\alpha > 0$ l'hypothèse **ii')** du théorème est vérifiée, et on conclut à l'instabilité non-linéaire de la solution $u = 0$.

Remarque – Ici on s'est placé sur un espace vectoriel réel, alors que pour établir le théorème on a travaillé sur $\mathbb{C}$. Ce problème disparaît lorsqu'on complexifie l'espace, ce qui permet d'appliquer le théorème, et de conclure à l'instabilité dans le cas réel. On le fera de manière implicite dans la suite.

Remarque – Dans cet exemple, on aurait aussi pu mener l'étude sur l'espace $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ tendant vers 0 à l'infini, ou encore sur $L^2(\mathbb{R})$, mais le cas du tore $\mathbb{T}$ est le plus simple car on dispose de valeurs propres qui fournissent directement les éléments du spectre provoquant l'instabilité.

3 EDP : cas d'une non-linéarité avec perte de dérivée

Le théorème vu dans la section précédente ne permet pas d'établir l'instabilité non-linéaire de manière générale pour les EDP, et en particulier cela ne fonctionne plus pour l'équation d'Euler. Ici on va s'intéresser aux résultats d'instabilité lorsque deux espaces de Banach entrent en jeu. On verra cette fois que certaines conditions particulières sur le spectre sont suffisantes pour avoir des résultats d'instabilité non-linéaire. On commence cependant par donner un premier théorème général d'instabilité similaire aux précédents, sans autre condition sur le spectre que l'instabilité spectrale et qui pourra s'appliquer à certaines équations.

3.1 Un premier cas : les opérateurs régularisants

On s'intéresse toujours à l'équation d'évolution (0.1), mais on se place ici dans le cas où deux espaces de Banach X et Z (avec $X \subset Z$) interviennent, avec F allant de X dans Z (souvent, la partie non-linéaire F contiendra des dérivées partielles d'où une baisse de la régularité).

3.1.1 Théorème d'instabilité

On cherche à donner ici des conditions pour que cette perte de régularité due à F n'affecte pas l'instabilité non-linéaire. On va s'intéresser à l'*effet régularisant* de la partie linéaire de l'équation, plus précisément du semi-groupe $\left\{e^{tL}; t \geq 0\right\}$. En effet, si e^{tL} envoie Z dans X, on a un gain de régularité qui compense la perte du terme non-linéaire. Plus précisément, on a le théorème suivant :

Théorème 3.1. *Supposons les hypothèses suivantes vérifiées :*

i) *X et Z sont deux espaces de Banach avec $X \subset Z$ et $\|u\|_Z \leq C_1 \|u\|_X$ pour $u \in X$.*

ii) *L génère un semi-groupe fortement continu $\left\{e^{tL}; t > 0\right\}$ sur Z, e^{tL} va de Z dans X pour $t > 0$, et $\displaystyle\int_0^1 \|e^{tL}\|_{Z \to X} dt = C_2 < \infty$.*

iii) *Le spectre de L sur X rencontre le demi-plan complexe $\{\Re\lambda > 0\}$.*

iv) *$F : X \to Z$ est continue et $\exists \rho_0 > 0, C_3 > 0, \alpha > 1$ tels que $\|F(u)\|_Z \leq C_3 \|u\|_X^\alpha$ pour $\|u\|_X < \rho_0$.*

Alors la solution $u = 0$ de (0.1) est instable non-linéairement dans X.

Remarque – La définition de l'instabilité non-linéaire reste la même ici, mais on considère l'instabilité dans le plus petit espace, c'est-à-dire X.

Preuve. Sous ces conditions, la preuve se ramène presque exactement à celle du théorème (2.9), avec les mêmes lemmes préliminaires, et on l'omet ici (on pourra se référer à [6]). Le point essentiel est bien sûr que e^{tL} soit à valeurs dans X, ce qui permet en quelque sorte d'effacer la présence du second espace Z.

□

3.1.2 Exemple

Ce type de résultats sur les opérateurs régularisants s'applique en particulier à l'équation de Navier-Stokes régissant les écoulements visqueux incompressibles. De manière générale,le système d'équations s'écrit :

$$\begin{aligned} \partial_t u + (u.\nabla)u - \Delta u + \nabla p &= 0 \\ div\ u &= 0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

où u est le champ de vitesses et p la pression. Donc si on considère une perturbation u par rapport à une solution stationnaire $\overline{u}$ on a le système :

$$\begin{aligned} \partial_t u + (\overline{u}.\nabla)u + (u.\nabla)\overline{u} - \Delta u + \nabla p &= -(u.\nabla)u \\ div\ u &= 0 \end{aligned}$$

Le système auquel on va s'intéresser est une simplification 1D de cette équation :

$$\begin{aligned} \partial_t u + a\partial_x u + bu - \partial_{xx} u &= -u\partial_x u \text{ avec } a, b \in \mathbb{R} \\ u|_{t=0} &= u_0 \end{aligned} \tag{3.2}$$

On se place comme précédemment sur le tore $\mathbb{T}$, et on réécrit l'équation sous la forme $\frac{du}{dt} = Lu + F(u)$ avec $Lu = -a\partial_x u - bu + \partial_{xx} u$ et $F(u) = -u\partial_x u$. On peut voir en faisant l'analyse en Fourier du système linéaire (*ie* sans le terme $-u\partial_x u$) que L génère un semi-groupe fortement continu $e^{tL} : L^2(\mathbb{T}) \to L^2(\mathbb{T})$. A cet effet faisons quelques rappels sur les espaces de Sobolev. On définit pour $s \geq 0$:

$$H^s(\mathbb{T}) = \left\{ u \in L^2(\mathbb{T}); \sum_{n\in\mathbb{Z}} |n|^{2s} |\hat{u}(n)|^2 < \infty \right\}$$

avec bien sûr $\hat{u}(n) = \frac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} u(t)e^{-int}dt$. On a d'après Parseval que $H^0(\mathbb{T}) = L^2(\mathbb{T})$. Et pour $s > \frac{1}{2}$, on montre aisément que $H^s(\mathbb{T}) \subset \mathcal{C}(\mathbb{T})$, avec pour $u \in H^s(\mathbb{T})$:

$$\forall x \in \mathbb{T} : u(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{u}(n)e^{inx}$$

où la convergence est uniforme sur $\mathbb{T}$. En écrivant $u(t,x) = \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{u}(t,n)e^{inx}$, le système (3.2) linéarisé s'écrit formellement en Fourier :

$$\begin{aligned} \partial_t \hat{u} + ina\hat{u} + b\hat{u} + n^2\hat{u} &= 0 \\ \hat{u}(0,n) &= \hat{u_0}(n) \end{aligned} \tag{3.3}$$

d'où :

$$\hat{u}(t,n) = e^{-(ina+b+n^2)t}\hat{u_0}(n)$$

Cette étude nous pousse à définir le semi-groupe e^{tL} de la manière suivante :

$$\forall t \geq 0 \ e^{tL} : \begin{array}{ccc} L^2(\mathbb{T}) & \longrightarrow & L^2(\mathbb{T}) \\ u_0 & \longmapsto & \left(x \mapsto \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{u_0}(n) e^{-(ina+b+n^2)t} e^{inx} \right) \end{array} \tag{3.4}$$

On voit alors facilement que ce semi-groupe est fortement continu. Il est bien sûr généré par $L = -a\partial_x - bId + \partial_{xx}$ avec $D(L) = H^2(\mathbb{T})$. De plus, il est régularisant, au sens où e^{tL} envoie $H^s(\mathbb{T})$ dans $H^{s'}(\mathbb{T})$ pour tout $s' \geq 0$ et $t > 0$, ceci évidemment grâce à la présence de la dérivée seconde $\partial_{xx}u$ dans l'équation, qui donne le terme e^{-n^2t} dans e^{tL}. Donc pour $t > 0$, on a $u(t,.) = e^{tL}u_0 \in H^s(\mathbb{T})\ \forall s > 0$, et en particulier, $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{T})$.

On va alors pouvoir appliquer le théorème (3.1). On choisit comme espaces fonctionnels : $X = H_0^1(\mathbb{T})$ et $Z = L_0^2(\mathbb{T})$ (l'indice 0 indique qu'on s'intéresse aux champs de vitesse de moyenne nulle).

L'hypothèse **i)** du théorème est alors clairement vérifiée, avec $C_1 = 1$. Pour l'hypothèse **ii)**, on vient de voir les deux première assertions ci-dessus. Pour la troisième :

$$\begin{aligned} \frac{\left\| e^{tL}u_0 \right\|_{H^1}^2}{\|u_0\|_{L^2}^2} &= \frac{\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2 e^{-(b+n^2)t} |\hat{u_0}(n)|^2}{\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{u_0}(n)|^2} \\ &\leq \frac{e^{-bt}}{t} \sup_{x\in\mathbb{R}_+} xe^{-x} \end{aligned}$$

D'où $\left\| e^{tL} \right\|_{L^2 \to H^1} \leq \frac{C}{\sqrt{t}}$ pour $t \in]0,1]$, ce qui conclut.

Pour l'hypothèse **iii)** : d'après (3.4), on voit que le spectre de e^L contient la valeur propre $e^{-(ia+b+1)}$ (pour le vecteur propre $x \mapsto e^{ix}$). Ainsi, si $b < -1$, le spectre de e^L rencontre l'extérieur du disque unité, ce qu'on voulait.

Pour l'hypothèse **iv)** : on montre (injections de Sobolev) que pour $s > \frac{d}{2}$ (où d est la dimension de l'espace, ici $d = 1$), on a : $H^s(\mathbb{T}) \hookrightarrow C^0(\mathbb{T}) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{T})$. Ainsi, pour $u \in H_0^1(\mathbb{T})$, on a :

$$\begin{aligned} \|F(u)\|_{L^2}^2 &= \int_{\mathbb{T}} |u|^2 |\partial_x u|^2 \\ &\leq \|u\|_{L^\infty}^2 \| \partial_x u\|_{L^\infty}^2 \leq \|u\|_{H_0^1}^4 \end{aligned}$$

Ainsi toutes les conditions sont vérifiées, et la seule condition pour avoir l'instabilité non-linéaire de la solution $u = 0$ est que $b < -1$. L'argument essentiel pour obtenir le résultat dans ce cas particulier est l'effet régularisant du semi-groupe associé à l'équation. Avec ce type d'arguments, on obtient donc des résultats d'instabilité pour l'équation de Navier-Stokes. Pour l'équation d'Euler, c'est beaucoup plus difficile, car on considère des écoulements non visqueux, et il faut se placer dans des conditions particulières comme on va le voir.

3.2 Equation d'Euler et instabilité

Jusqu'à présent nous avons pu établir des résultats en imposant simplement la condition d'instabilité spectrale sur les opérateurs définissant les équations différentielles. Mais dans le cas général des équations aux dérivées partielles, l'instabilité spectrale n'implique pas aussi facilement l'instabilité non-linéaire. En se référant à [1], on va donner plusieurs théorèmes s'appuyant sur la structure du spectre de e^{tL} pour obtenir l'instabilité, théorèmes qui pourront s'appliquer à l'équation d'Euler pour des solutions initiales que l'on précisera.

3.2.1 La condition de trou spectral

La première variante du théorème donne des conditions sur la structure du spectre de e^{tL}. On se place toujours dans les conditions citées au début du paragraphe 3.1, mais on n'a plus d'effet régularisant, on suppose simplement que L génère non plus un semi-groupe mais un groupe entier d'opérateurs, et que pour tout $t \in \mathbb{R}$, e^{tL} laisse X invariant. De plus, on suppose que X est dense dans Z, et que $X \subset D(L)$. On a la condition suivante sur F :

$$\exists c_0 > 0, \exists \rho > 0 \text{ tels que pour } w \in X \text{ avec } \|w\|_X < \rho, \|N(w)\|_Z \leq c_0 \|w\|_X \|w\|_Z \tag{3.5}$$

Enfin, on a la série de conditions essentielles suivantes (trou spectral) :
Pour tout $t > 0$, le spectre σ de $e^{tL} \in \mathcal{L}(Z)$ peut être classifié comme suit :

$$\sigma = \sigma_+ \cup \sigma_-, \sigma_+ \neq \emptyset \tag{3.6}$$

où

$$\sigma_+ \subset \left\{ z \in \mathbb{C}; e^{Mt} < |z| < e^{\Lambda t} \right\} \tag{3.7}$$

$$\sigma_- \subset \left\{ z \in \mathbb{C}; e^{\lambda t} < |z| < e^{\mu t} \right\} \tag{3.8}$$

avec

$$-\infty < \lambda < \mu < M < \Lambda < \infty \tag{3.9}$$

et de plus

$$M > 0 \tag{3.10}$$

Autrement dit, le spectre de e^{tL} rencontre l'extérieur du disque unité, et il est séparé en (au moins) deux sous-parties disjointes. On suppose aussi que l'équation $\frac{du}{dt} = Lu + F(u)$ admet localement des solutions, c'est-à-dire que pour $w_0 \in X$, $\exists T > 0$ et $\exists! w \in L^\infty(]0, T[, X) \cap \mathcal{C}([0, T], Z)$ solution faible de l'équation, avec $w(0) = w_0$. La définition de l'instabilité non-linéaire reste la même (on la considère toujours dans le plus petit espace X). On a alors le théorème suivant :

Théorème 3.2. *Si F satisfait l'hypothèse (3.5) et que L satisfait les conditions de trou spectral, alors la solution $w = 0$ de l'équation (0.1) est instable non-linéairement.*

Preuve. On se ramène à [1] pour le détail de la preuve. Celle-ci se fait bien sûr encore par l'absurde, en supposant l'existence d'une solution globale en temps et dont on contrôle la norme dans X. La décomposition particulière du spectre que l'on impose permet ensuite de projeter la solutions sur des modes exponentiellement croissants et décroissants. Plus précisément, on peut définir les projecteurs de Riesz :

$$P_\pm = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_\pm} \left(z - e^{tL}\right)^{-1} dz \tag{3.11}$$

où γ_+ (respectivement γ_-) est un contour entourant σ_+ (respectivement σ_-). On peut montrer que ces projecteurs définissent une décomposition de l'espace Z : sur chaque partie, le spectre de e^{tL} se réduit à σ_+ ou σ_-. Précisément on a les lemmes suivants :

Lemme.

$$\forall t > 0,\ P_\pm \textit{ est un projecteur et } \sigma\left(e^{tL}\big|_{Im\ P_\pm}\right) = \sigma_\pm$$

Preuve. On se donne $\gamma_+^{'}$ qui entoure γ_+ qui lui-même entoure σ_+. On a :

$$\begin{aligned} P_+^2 &= \frac{1}{(2i\pi)^2}\int_{\gamma_+^{'}}\int_{\gamma_+} R(z')R(z)\ dzdz' \\ &= \frac{1}{(2i\pi)^2}\int_{\gamma_+^{'}}\int_{\gamma_+} \frac{R(z') - R(z)}{z - z'}\ dzdz' \\ &= P_+ \end{aligned}$$

La dernière égalité s'établit avec le théorème des résidus (généralisé à l'intégration sur des espaces de Banach).

Pour la deuxième assertion : si $z \in \mathbb{C}\backslash\sigma$, $[R(z), P_+] = 0$. Donc $[e^{tL}, P_+(t)] = 0$. On note $T^\pm = e^{tL}\big|_{ImP_\pm}$ et $R^\pm(z) = R(z)|_{ImP_\pm}$. Pour $z \in \mathbb{C}\backslash\sigma$, $R^+(z) = \left(z - T^+\right)^{-1}$, donc $\sigma(T^+) \subset \sigma$.

Pour $z \in Ext(\gamma_+) \cap (\mathbb{C}\backslash\sigma)$, on a :

$$R^+(z) = R(z)P_+ = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_+} \frac{R(z')}{z - z'} dz'$$

qui se prolonge analytiquement sur $Ext(\gamma_+) \supset \sigma_-$. Donc $\sigma(T^+) \subset \sigma_+$.

Pour $z \in Int(\gamma_+) \cap (\mathbb{C}\backslash\sigma)$, on a de même :

$$R^+(z) = R(z)P_+ = R(z) + \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_+} \frac{R(z')}{z - z'} dz'$$

Ainsi $R(z)(Id - P^+) = R^-(z)$ se prolonge analytiquement à l'intérieur de γ_+. D'où $\sigma(T^-) \subset \sigma_-$.

Et comme $\sigma(T^+) \bigsqcup \sigma(T^-) = \sigma$, on obtient finalement le résultat voulu : $\sigma\left(e^{tL}\big|_{Im\ P_\pm}\right) = \sigma_\pm$.

□

Avant d'expliquer la preuve du théorème proprement dit, explicitons l'action des projecteurs $P_{\pm}$.

Lemme. Soit α *tel que* $\mu < \alpha < M$. P_- *est le projecteur sur* $F = \left\{x \in X; e^{-\alpha t}\left\|e^{tL}x\right\|_X \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0\right\}$ *parallèlement à*
$G = \left\{x \in X; e^{-\alpha t}\left\|e^{tL}x\right\|_X \underset{t\to-\infty}{\longrightarrow} 0\right\}$ *(et inversement pour* P_+*). En particulier,* $P_{\pm}$ *ne dépendent pas de* $t > 0$.

Preuve. On traite le cas $\mu < 0 < M$ et $\alpha = 0$. Montrons que pour $t_0 > 0$, $Im\ P_-(t_0) = F$ (alors $Im\ P_+(t_0) = G$ s'établit facilement en raisonnant sur les inverses).

Soit $t_0 > 0$, et $f \in F$ qu'on décompose sur $Im\ P_+(t_0)$ et $Im\ P_-(t_0)$: $f = f^+ + f^-$. Soit $m \in \mathbb{N}$. On a :

$$\left(e^{t_0L}\right)^m f = \left(e^{t_0L}\right)^m f^+ + \left(e^{t_0L}\right)^m f^-$$

Or on a l'équivalent $\rho\left(e^{t_0L}P_-(t_0)\right)^m \underset{m\to+\infty}{\sim} \left\|\left(e^{t_0L}P_-(t_0)\right)^m\right\|$. Et par l'hypothèse du trou spectral, comme $\mu < 0$, on a $\left(e^{t_0L}\right)^m f^- \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, d'où (puisque $f \in F$) $\left(e^{t_0L}\right)^m f^+ \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Par les mêmes arguments de rayon spectral, on a pour $m \in \mathbb{N}$, puisque $M > 0$: $\left(e^{-t_0L}P_+(t_0)\right)^m \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Or on a :

$$\left(e^{-t_0L}P_+(t_0)\right)^m\left(e^{t_0L}P_+(t_0)\right)^m f^+ = f^+$$

Ainsi :

$$\|f^+\| \leq \left\|\left(e^{-t_0L}P_+(t_0)\right)^m\right\| \left\|\left(e^{t_0L}P_+(t_0)\right)^m f^+\right\| \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

On en conclut que $f^+ = 0$, d'où $F \subset Im\ P_-(t_0)$.

Réciproquement, soit $x \in Im\ P_-(t_0)$, et $K = \sup\limits_{t\in[0,t_0]} \left\|e^{tL}\right\|$. Pour $t \in \mathbb{R}_+$, on écrit $t = m(t)t_0 + r$ avec m entier et $r \in [0, t_0[$. On a :

$$\begin{aligned}
\left\|e^{tL}x\right\| &\leq K\left\|\left(e^{t_0L}\right)^{m(t)}x\right\| \\
&\leq K\left\|\left(e^{t_0L}P_-(t_0)\right)^{m(t)}x\right\| \\
&\leq K\|x\|\left\|\left(e^{t_0L}\right)^{m(t)}\right\| \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

par les mêmes arguments de rayon spectral que précédemment, ce qui conclut.

□

On peut ensuite construire une norme sur Z, équivalente à $\|.\|_Z$, à partir de P_+ et P_-. De manière détaillée, pour $x \in Z$:

$$|||x||| = |||P_+x||| + |||P_-x||| = \int_0^\infty \left\|e^{-\tau L}P_+x\right\|_Z e^{Mt}d\tau + \int_0^\infty \left\|e^{\tau L}P_-x\right\|_Z e^{-\mu t}d\tau$$

Grâce à cette norme, on contrôle bien l'évolution de $e^{tL}w(0)$ où la donnée initiale $w(0)$ est choisie, dans un certain sens, pour que l'action du semi-groupe sur elle soit essentiellement celle de la partie correspondant à σ_+. On applique ensuite le même genre d'idée que dans les cas précédents (voir théorème (2.9) par exemple), pour majorer la norme de $w(t)$. On montre que pour w_0 bien choisi, $w(t)$ grandit approximativement en e^{Mt} ce qui permet de conclure.

Un peu plus précisément, on se donne un $\epsilon > 0$ que l'on pourra choisir assez petit ensuite, et un $\delta > 0$ correspondant à ϵ via la définition de la stabilité non-linéaire. On choisit alors un vecteur w_0 dans X tel que $\|w_0\| < \delta$ et $|||P_+w_0||| > |||P_-w_0|||$ (un tel vecteur existe car ces conditions sont ouvertes dans Z et X est dense dans Z). En choisissant ϵ assez petit, on montre grâce aux propriétés de la norme $|||.|||$ que $|||P_+w(t)||| > |||P_-w(t)|||$ pour tout $t \geq 0$ (c'est en cela qu'on peut dire que l'action de e^{tL} sur w_0 est dominée par la partie correspondant à σ_+. On peut alors minorer plus précisément $|||P_+w(t)||| - |||P_-w(t)|||$, et conclure que $|||x|||$ grandit au moins en e^{Mt}.

La condition de trou spectral est essentielle pour trouver des vecteurs sur lesquels l'action de e^{tL} est dominée par les grands éléments du spectre.

□

3.2.2 Un deuxième théorème d'instabilité

On donne ici, sans démonstration, un autre théorème, qui pourra être utilisé (comme le précédent) en particulier pour certains cas de l'équation d'Euler.

Théorème 3.5. *On suppose qu'il existe $\eta \in]0,1]$, $c_0 > 0$, $\rho > 0$ tels que pour $w \in X$, $\|w\|_X < \rho$:*

$$\|F(w)\|_Z \leq c_0 \|w\|_X^{1-\eta} \|w\|_Z^{1+\eta} \tag{3.12}$$

Soit

$$\Lambda_1 = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \ln \left\| e^{tL} \right\|_Z > 0$$

On suppose qu'il existe $\lambda_1 > \frac{\Lambda_1}{1+\eta}$, $c_1 > 0$, $c_2 > 0$, et $w_0 \in X - \{0\}$ tels que, pour $0 \leq t < \infty$:

$$c_1 e^{t\lambda_1} \|w_0\|_Z \leq \left\| e^{tL} w_0 \right\|_Z \leq c_2 e^{t\lambda_1} \|w_0\|_Z$$

Alors, si l'équation (0.1) admet un théorème d'existence locale de solutions, la solution $w = 0$ est non-linéairement instable.

3.2.3 Application à l'équation d'Euler

3.2.3.a Présentation

On va à présent voir comment ces théorèmes peuvent s'appliquer à l'équation d'Euler incompressible. On se place toujours sur le tore $\mathbb{T}^n$. L'équation s'écrit formellement :

$$\partial_t u + (u, \nabla)u + \nabla p = 0 \tag{3.13}$$

$$div\ u = 0 \tag{3.14}$$

On s'intéresse à la stabilité d'une solution stationnaire $u_0 \in (\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n))^n$, $p_0 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)$. Pour les espaces X et Z, on prend $s > \frac{n}{2} + 1$ et on définit :

$$X = \{w \in (H^s(\mathbb{T}))^n ; div\ w = 0\} \tag{3.15}$$
$$Z = \left\{w \in (L^2(\mathbb{T}))^n ; div\ w = 0\right\} \tag{3.16}$$

On peut en fait éliminer la pression de l'équation d'Euler, ce qui permet de se ramener à une forme connue. Pour cela, on peut appliquer le *projecteur de Leray* $\mathbb{P}$ sur les champs à divergence nulle. On peut le définir en Fourier par exemple sur X ou Z par :

$$\hat{\mathbb{P}u_k} = \hat{u}_k - \frac{ik.\hat{u}_k}{-|k|^2}$$

Ce projecteur correspond à une décomposition d'une fonction quelconque comme somme d'un champ à divergence nulle et d'un gradient. L'équation s'écrit alors :

$$\partial_t u + \mathbb{P}(u, \nabla)u = 0$$

On considère alors le semi-groupe correspondant, engendré par L défini pour $w \in Z$ par :

$$Lw = -\mathbb{P}(u_0, \nabla)w - \mathbb{P}(w, \nabla)u_0$$

Et on définit enfin F de X dans Z :

$$F(w) = -\mathbb{P}(w, \nabla)w$$

On voit bien qu'alors l'équation (0.1) est l'équation d'Euler :

$$\partial_t(u_0 + w) = -\mathbb{P}(u_0 + w, \nabla)(u_0 + w)$$

Il s'agit donc d'étudier L et F pour appliquer les théorèmes vus plus haut.

Proposition 3.6. *Il existe $c_0 > 0$ tel que pour $w \in X$, on a :*

$$\|F(w)\|_Z \leq \|w\|_X \|w\|_Z$$

Preuve. Pour $w \in Z$:

$$\begin{aligned} \|F(w)\|_Z &= \|(w, \nabla)w\|_{(L^2(\mathbb{T}^n))^n} \\ &\leq n\|w\|_{(L^2(\mathbb{T}^n))^n} \|\nabla w\|_{(L^\infty(\mathbb{T}^n))^{n\times n}} \end{aligned}$$

On utilise alors l'injection de Sobolev $H^{s-1}(\mathbb{T}^n) \hookrightarrow C^0(\mathbb{T}^n)$ puisque $s - 1 > \frac{n}{2}$. Comme w est dans H^s, ∇w est dans H^{s-1} et on obtient donc :

$$\|F(w)\|_Z \leq c_0 \|w\|_{(L^2(\mathbb{T}^n))^n} \|w\|_{(H^s(\mathbb{T}^n))^n} = c_0 \|w\|_Z \|w\|_X$$

□

De plus, il existe des théorèmes d'existence locale de solutions dans X pour l'équation d'Euler. Ainsi, pour appliquer le théorème (3.2), il ne manque plus que l'hypothèse de trou spectral. Mais c'est le résultat le plus difficile à obtenir. Avant d'étudier le spectre de L, montrons que la condition (3.12) du théorème (3.5) est également vérifiée par F.

Proposition 3.7. *On considère les mêmes espaces X et Z que précédemment. Alors F vérifie l'inégalité (3.12) pour $\rho = \infty$, et $\eta = \frac{1}{2} - \frac{2+n}{4s}$.*

Preuve. Soit $w \in Z$. On reprend le schéma de la preuve de la proposition précédente, et on pose $r = \frac{1}{2}(s + \frac{n}{2} + 1) > \frac{n}{2} + 1$.On a :

$$\begin{aligned} \|F(w)\|_Z &\leq C\|w\|_{(L^2(\mathbb{T}^n))^n}\|\nabla w\|_{(L^\infty(\mathbb{T}^n))^{n\times n}} \\ &\leq C'\|w\|_{(L^2(\mathbb{T}^n))^n}\|w\|_{(H^r(\mathbb{T}^n))^n} \\ &\leq C''\|w\|^{1+\eta}_{(L^2(\mathbb{T}^n))^n}\|w\|^{1-\eta}_{(H^s(\mathbb{T}^n))^n} \end{aligned}$$

où, pour la dernière étape, on a utilisé que $r = (1-\eta)s$ et :

$$\|w\|_{(H^r(\mathbb{T}^n))^n} \leq \|w\|^{\eta}_{(L^2(\mathbb{T}^n))^n}\|w\|^{1-\eta}_{(H^s(\mathbb{T}^n))^n}$$

□

3.2.3.b Etude du spectre de e^{tL}

On va essayer de voir ici dans quels cas on peut obtenir la condition de trou spectral ou alternativement la condition du théorème (3.5) pour conclure à l'instabilité non-linéaire en ce qui concerne l'équation d'Euler. Il n'y a pas de méthode générale pour savoir si ces conditions sont vérifiées pour une solution donnée u_0. Ici on va s'intéresser au spectre essentiel de e^{tL}. On rappelle que c'est le complémentaire des points isolés du spectre, de multiplicité finie (*ie* tels que $\bigcup_{r=1}^{\infty} Ker\big(z - e^{tL}\big)^r$ est de dimension finie), et tels que $z - e^{tL}$ soit d'image fermée (l'ensemble de ces points constitue le spectre discret). On a donc :

$$\sigma(e^{tL}) = \sigma_{ess}(e^{tL}) \sqcup \sigma_{disc}(e^{tL})$$

On définit le rayon spectral essentiel comme :

$$r_{ess}(e^{tL}) = \sup\left\{|z|; z \in \sigma_{ess}(e^{tL}\right\}$$

On a le théorème suivant sur le rayon essentiel, dû à Vishik :

Théorème 3.8. *On se place toujours sur $\mathbb{T}^n$. Soit u_0 une solution stationnaire de classe $\mathcal{C}^\infty$ de l'équation d'Euler. Alors pour $t > 0$ on a :*

$$r_{ess}(e^{tL}) = e^{\omega t} \tag{3.17}$$

où ω est défini par :

$$\omega = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \ln \sup_{\substack{x_0, \xi_0, b_0 \\ (b_0, \xi_0) = 0 \\ |\xi_0| = 1, |b_0| = 1}} |b(x_0, \xi_0, b_0; t)| \tag{3.18}$$

Dans cette expression, (x, b, ξ) vérifie le système d'équations différentielles ordinaires :

$$\dot{x} = u_0(x) \tag{3.19}$$

$$\dot{\xi} = -{}^t\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)\xi \tag{3.20}$$

$$\dot{b} = -\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\right) b + 2|\xi|^{-2}\left(\xi, \frac{\partial u_0}{\partial x} b\right)\xi \tag{3.21}$$

$$x(0) = x_0,\ \xi(0) = \xi_0,\ b(0) = b_0$$

Avec ce théorème, on obtient en particulier que si un point z du spectre de e^{tL} vérifie $|z| > e^{\omega t}$, alors il est automatiquement dans le spectre discret. Ainsi si $\sigma\left(e^{tL}\right) \cap \{|z| > e^{\omega t}\} \neq \emptyset$, on a, pour tout t une partition du spectre :

$$\sigma\left(e^{tL}\right) = \sigma_+\left(e^{tL}\right) \cup \sigma_-\left(e^{tL}\right)$$

Cela ne suffit pas tout à fait à avoir la condition de trou spectral, il faut pour cela avoir une estimation uniforme de la "taille" du trou, et plus précisément montrer que les éléments du spectre discrets grandissent en $e^{\alpha t}$ où $\alpha > \omega$. Pour cela, on donne le lemme suivant :

Lemme 3.9. *Soit V un espace vectoriel de dimension finie, et $(A(t))_{t\in\mathbb{R}}$ une famille d'endomorphismes sur V telle que pour $t, t' \in \mathbb{R}$, $A(t+t') = A(t)A(t')$, et $t \mapsto A(t)$ continue. Alors il existe $L \in \mathcal{L}(V)$ tel que pour $t \in \mathbb{R}$, $A(t) = \exp(tL)$. En particulier $\sigma(A(t)) = \exp(t\sigma(L))$.*

Revenons alors à notre groupe e^{tL} d'origine. On pose $M(1) = \bigcup_{z\in\sigma_{disc}(e^{tL})} N(z,1)$ où $N(z,t) = \bigcup_{r=1}^{\infty} Ker\left(z - e^{tL}\right)^r$. Par définition de σ_{disc} (et car cet ensemble est fini car compact et discret), $M(1)$ est de dimension finie. Comme pour $t \in \mathbb{R}$, $\left[e^{tL}, e^L\right] = 0$, on peut considérer les restrictions des e^{tL} à $M(1)$ et la famille $\left\{e^{tL}\right\}_{t\in\mathbb{R}}$ induit sur $M(1)$ une famille du type du lemme. En particulier si $e^{\alpha_1}, \ldots, e^{\alpha_n}$ sont les éléments de $\sigma_{disc}\left(e^L\right)$, alors $e^{t\alpha_1}, \ldots, e^{t\alpha_n}$ sont des éléments de $\sigma_{disc}\left(e^{tL}\right)$. En remplaçant 1 par un t_0 quelconque, on a par le même argument, en projetant sur $M(t_0)$, que les $e^{t_0\alpha_1}, \ldots, e^{t_0\alpha_n}$ sont les seuls éléments de $\sigma_{disc}\left(e^{t_0L}\right)$. Donc $\sigma_{disc}\left(e^{tL}\right) = \left\{e^{t\alpha_1}, \ldots, e^{t\alpha_n}\right\}$ avec $\omega < \Re\alpha_1 \leq \cdots \leq \Re\alpha_n$. Ceci donne la bonne condition de trou spectral.

On peut montrer de plus que pour tout u_0, on a $\omega \geq 0$, et ainsi on peut choisir $M > 0$.

On peut alors donner le théorème suivant :

Théorème 3.10. *Supposons les conditions du théorème (3.8) vérifiées. Si pour tout* $t > 0$ *il existe* $z \in e^{tL}$ *tel que* $|z| > e^{\omega t}$*, alors la solution* u_0 *est instable dans* X *(défini par (3.15)).*

Preuve. Pour la preuve, on a donc simplement à appliquer les théorèmes (3.2) (ou (3.5)) et (3.8).

□

On a donc des conditions pour appliquer le théorème de trou spectral, mais encore faut-il être en mesure de calculer ω pour une solution u_0 donnée, et de trouver des valeurs propres de e^{tL} de module supérieur à $e^{\omega t}$. On a déjà les deux propositions suivantes :

Proposition 3.11. *On se place sur* $\mathbb{T}^2$*, et on considère une solution stationnaire* u_0 *de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{T}^2$*. Si* u_0 *ne s'annule pas sur* $\mathbb{T}^2$*, alors* $\omega = 0$ *et ainsi* $r_{ess}\left(e^{tL}\right) = 1$ *pour tout* $t > 0$*.*

Proposition 3.12. *Sous les mêmes conditions, si le champ de vitesses se met sous la forme* $u_0(x_1, x_2) = (U(x_2), 0)$*, alors* $\omega = 0$*.*

On se rapporte à [1] pour les preuves de ces résultats.

3.2.3.c Un exemple

On peut citer enfin un exemple de champ de vitesses tel que $\omega = 0$ et pour lequel on est capable de trouver une valeur propre de L de partie réelle positive, et on peut alors enfin conclure à l'instabilité non-linéaire par la condition de trou spectral. On se reportera encore à [1] pour le détail de la construction de cette valeur propre. On donne ici le résultat obtenu dans l'article.

Proposition 3.13. *On se place toujours dans* $\mathbb{T}^2$*, et on considère une solution stationnaire* $u_0(x, y) = (\sin my, 0)$*, où* $m \in \mathbb{N}^*$*. On sait déjà par (3.12) que* $\omega = 0$*. Et on peut trouver une valeur propre de* L *de partie réelle strictement positive, ainsi la condition de trou spectral est satisfaite et* u_0 *est instable non-linéairement dans* X *(défini par (3.15)) pour* $s > 2$*.*

Remerciements

Nous tenons à remercier David Gérard-Varet pour tous les conseils, remarques et explications qu'il nous a donnés, ainsi que pour sa relecture attentive du rapport.

Références

[1] Susan FRIEDLANDER, Walter STRAUSS, and Misha VISHIK. Nonlinear instability in an ideal fluid. *Annales de l'I.H.P., Section C*, 14(2) :187–209, 1997.

[2] Bernard HELFFER. Spectral theory and applications : an elementary introductory course. Université Paris-Sud, Département de Mathématiques, Décembre 2003.

[3] Tosio KATO. *Perturbation theory for linear operators*. Springer-Verlag, 1966.

[4] Carlo MARCHIORO and Mario PULVIRENTI. *Mathematical theory of incompressible nonviscous fluids*. Springer-Verlag, 1994.

[5] Jalal SHATAH and Walter STRAUSS. Spectral condition for instability. *Contemporary Mathematics Volume*, 255, 2000.

[6] Walter STRAUSS and Wang GUANGXIANG. Instability of traveling waves of the kuramoto-sivashinsky equation. *Chin. Ann. of Math.*, 23 B(2) :267–276, 2002.