PÉNALISATIONS DU MOUVEMENT BROWNIEN

par Miquel Oliu-Barton

encadré par le professeur Marc Yor

Septembre 2006

1 INTRODUCTION

Un processus stochastique est un phénomène qui évolue dans le temps de manière aléatoire. La nature, la vie quotidienne et la science nous donnent beaucoup d'exemples divers de ce genre de phénomène, ou en tout cas des phénomènes qui peuvent être compris de cette façon-là : quelque chose qui bouge aléatoirement avec le temps. En finances, la valeur instantanée d'un actif obéit à ce schéma-ci ; la population d'une ville ; la météo ; le nombre de personnes dans une file d'attente ou dans un bus et la position d'une particule de pollen dans un fluide, sont des exemples de processus stochastiques. Ce dernier fut étudié pour la première fois par le botaniste Robert Brown en 1827 et reçoit le nom de mouvement brownien. Il joue un rôle fondamental dans la théorie des processus aléatoires, un peu comme la distribution Gaussienne dans la théorie des probabilités.

Formellement, un *processus stochastique* est la donnée d'un espace mesurable $(E, \mathcal{E})$, d'un espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et d'une famille de variables aléatoires $(X_t : (\Omega, \mathcal{F}, P) \to (E, \mathcal{E}), \quad t \in \mathbb{R}_+)$. On ne traitera dans cet exposé que des processus stochastiques continus, à valeurs dans $E = \mathbb{R}$, i.e, pour chaque événement $\omega \in \Omega$, la fonction $t \mapsto X_t(\omega)$ sera continue et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Selon leurs propriétés, on peut distinguer plusieurs familles de processus stochastiques. Nous allons surtout traiter le cas des processus markoviens homogènes (en particulier les Diffusions) et le cas des martingales. Définissons-les avant de continuer.

Définition 1 *:* (Processus de Markov). *Un processus de Markov est un proces-*

sus stochastique $(X_t)_{t\geq 0}$ *tel que pour toute fonction mesurable* f *:*

$$\mathbb{E}\left[f(X_t)|\sigma(X_r, r \leq s)\right] = \mathbb{E}\left[f(X_t)|\sigma(X_s)\right].$$

Ceci veut dire, en particulier, que l'état futur d'un processus de Markov ne dépend pas de l'histoire du processus (son passé) mais seulement de l'etat à l'instant présent.

On définit, pour $s, t \in \mathbb{R}_+, x \in E, \mathcal{A} \in \mathcal{E}$, *la fonction de transition par la formule suivante :* $P_{s,t}(x, \mathcal{A}) := \mathbb{P}\left(X_t \in \mathcal{A}|X_s = x\right).$

En particulier, un processus de Markov homogène *est un processus de Markov pour lequel la fonction de transition ne dépend que de* $t - s$.

Un processus de Markov homogène est déterminé par son point de départ et par sa fonction de transition. Il existe une unique loi de probabilité $\mathbb{P}$ qui rende le processus canonique de $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ un processus de Markov homogène issu de x et de transition P_t. Cette loi vérifie que $\mathbb{P}(X_t \in \mathcal{A}) = P_t(x, \mathcal{A})$.

Le mouvement brownien standard (que l'on notera MB, ou $(B_t)_{t\geq 0}$) est un exemple fondamental de processus de Markov homogène. Sa fonction de transition est la suivante :

$$P_{t-s}(x, \mathcal{A}) = \int_{\mathcal{A}} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} e^{-\frac{(x-y)^2}{2(t-s)}}\, dy,$$

c'est-à-dire que le changement de position entre deux instants s et t suit une distribution Gaussienne centrée de variance $t - s$ et ne dépend pas du passé avant s. L'unique loi de probabilité pour laquelle le processus canonique de $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ est un processus de Markov de transition P_t est appelée **mesure de Wiener** et notée $\mathbb{P}_x$ ou $\mathbb{W}_x$. C'est une loi de probabilité sur $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ et il faudrait, évidemment, la garder en tête puisque cet exposé la prend comme point de départ.

Voyons maintenant l'autre famille de processus stochastiques : les martingales.

Définition 2 *:* (Martingale). *Soit* $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ *une famille croissante de sous-tribus de* $\mathcal{F}$. *Une* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-martingale *est un processus stochastique* $(M_t)_{t\geq 0}$ *tel que*

– $\mathbb{E}[|M_t|] < \infty$ *pour chaque* $t \in \mathbb{R}_+$.

– $\mathbb{E}[M_t|\mathcal{F}_s] = M_s$, *p.s, pour toute paire* $s < t$.

Notons que l'espérance d'une martingale est constante, i.e $\mathbb{E}[M_s] = \mathbb{E}[M_0]$, pour tout $s \geq 0$. On peut donc supposer cette espérance égale à 1. C'est ce qu'on fera dans la suite.

Le mouvement brownien est aussi une martingale avec $\mathcal{F}_t := \sigma(B_s, s \leq t)$ car

$$\mathbb{E}\left[|B_t|\right] = \mathbb{E}\left[|\mathcal{N}(0,t)|\right] < \infty, \quad \text{et} \quad \mathbb{E}[\mathrm{B_t - B_s}|\mathcal{F}_\mathrm{s}] = \mathbb{E}[\mathrm{B_t - B_s}] = 0.$$

Avec une loi de probabilité sur $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ et une martingale continue positive, nous pouvons définir aisément une nouvelle loi de probabilité, absolument continue par rapport à la loi initiale. Soit P une loi et M une $\mathcal{F}_t$-martingale. On définit pour $t \geq 0$ une mesure de probabilité sur $\mathcal{F}_t$ par

$$Q_t = M_t \cdot P_{|\mathcal{F}_t}.$$

Grâce à la propriété de martingale, la suite $(Q_t)_{t\geq 0}$ est consistante, c'est-à-dire $(Q_t)_{|\mathcal{F}_s} = Q_s$. Cela définit donc une unique mesure de probabilité Q sur $\mathcal{F}_\infty$ telle que $Q_{|\mathcal{F}_t} = Q_t$, ce qui revient à dire que pour tout $\Lambda_t \in \mathcal{F}_t$,

$$\mathbb{E}_Q[1_{\Lambda_t}] = \mathbb{E}_P[M_t 1_{\Lambda_t}].$$

Ce phénomène a été développé par Cameron Martin dans les années 1940 et par Girsanov dans les années 1960. Le Théorème de Girsanov donne une correspondance explicite entre les P-martingales et les Q-martingales.

Motivés par la Mécanique Statistique, nous sommes prêts maintenant à introduire le concept de **PÉNALISATION**. On voudrait avoir des processus stochastiques qui ressemblent au mouvement brownien mais dont les propriétés sont radicalement différentes. Autrement dit, on "pénalisera" la loi de Wiener par certains "poids" pour essayer d'en changer les propriétés et pour l'amener là où ça nous intéresse. On peut, par exemple, trouver un pseudo-mouvement brownien dont le maximum global est distribué à la carte.

Plutôt que de prendre une martingale, on prendra maintenant un poids quelconque $\{\Gamma_t\}_{t\geq 0}$, pas nécessairement $\mathcal{F}_t$-adapté, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et tel que $\mathbb{E}[\Gamma_t] < \infty$, pout tout t.

On définit pour tout $t \geq 0$ une mesure de probabilité

$$Q^\Gamma_{x,t} := \frac{\Gamma_t}{\mathbb{E}[\Gamma_t]} \cdot \mathbb{P}_x.$$

Le processus Γ n'étant pas une martingale, la suite $(Q^\Gamma_{x,t})_{t\geq 0}$ n'est pas consistante. Par conséquent on ne peut pas définir, comme tout à l'heure, une nouvelle loi de probabilité immédiatement. Cependant, cette loi peut émerger dans la limite quand $t \to \infty$. Quand cette limite existe, on l'appellera *la pénalisation associée à* P_x *et à* $\{\Gamma_t\}_{t\geq 0}$.

On cherche des poids $\{\Gamma_t\}_{t\geq 0}$ et des martingales M^Γ tels que, quand $t \to \infty$,

$$\mathbb{E}_{Q^\Gamma_{x,t}}[1_{\Lambda_s}] \to \mathbb{E}_P[M^\Gamma_s 1_{\Lambda_s}] := \widetilde{P}(\Lambda_s).$$

Plusieurs exemples de Pénalisations ont été étudiés pendant les dernières années sans parvenir à trouver une théorie générale ou globale.

J'ai choisi pour cet exposé deux exemples remarquables, deux Pénalisations pour lesquelles on trouve des résultats étonnants de manière assez claire. Ce sont les deux pénalisations suivantes :

1. $\Gamma_t = e^{-\frac{1}{2}\int_0^t V(X_s)ds}$ où V est une mesure de Radon sur $\mathbb{R}$, positive.

2. $\Gamma_t = \varphi(S_t)$ où $S_t := \max_{s \le t} X_s$ et φ est une fonction positive localement intégrable.

2 LA PÉNALISATION $\Gamma_t = e^{-\frac{1}{2}\int_0^t V(X_s)ds}$

On suppose désormais que V vérifie l'hypothèse d'intégrabilité suivante :

$$\int_{\mathbb{R}} (1 + |y|)V(dy) < \infty,$$

et on définit :

$$\mathcal{Q}^V_{x,t} = \frac{e^{-\frac{1}{2}\int_0^t V(X_s)ds}}{Z^V_t(x)} \cdot \mathbb{P}_{x|\mathcal{F}_t} \tag{1}$$

avec $Z^V_t(x) := E_x[e^{-\frac{1}{2}\int_0^t V(X_s)ds}]$, E_x étant l'espérance sous $\mathbb{P}_x$.

Voici le Théorème qui rassemble les résultats les plus importants :

Théorème 1 *1. Nous avons une Pénalisation, i.e* $\forall \Lambda_s \in \mathcal{F}_s$ *:*

$$\lim_{t\to\infty} \mathcal{Q}^V_{x,t}(\Lambda_s) = E_x[1_{\Lambda_s} M^V_s] := P^V_x(\Lambda_s),$$

où

$$\left(M^V_t\right)_{t\ge 0} = \left(\frac{\varphi_V(X_t)}{\varphi_V(x)} e^{-\frac{1}{2}\int_0^t V(X_s)ds}\right)_{t\ge 0}$$

est une $(P_x, \mathcal{F}_t)$*-martingale et* φ_V *est l'unique solution de l'équation de Sturm-Liouville avec conditions au bords :*

$$\begin{cases} \varphi''(dx) = \varphi(x)V(dx) \\ \lim_{x\to\pm\infty} \varphi'(x) = \pm\sqrt{\frac{2}{\pi}}. \end{cases} \tag{2}$$

2. On a la limite suivante :

$$\sqrt{t}Z_t^V(x) = \sqrt{t}E_x[e^{-\frac{1}{2}\int_0^t V(X_s)ds}] \to_{t\to\infty} \varphi_V(x).$$

3. Soit $(X_t^x)_{t\geq 0}$ la solution (unique et forte) de l'équation stochastique :

$$X_t = x + \beta_t + \int_0^t \frac{\varphi_V'(X_s)}{\varphi_V(X_s)}ds, \quad \textit{avec} \quad (\beta_t)_{t\geq 0} \quad \textit{un} \quad MB(0). \tag{3}$$

Alors, la loi de $(X_t^x)_{t\geq 0}$ est P_x^V.

4. Le processus $(X_t^x)_{t\geq 0}$ est transient. Plus précisément,

$$P\left(\lim_{t\to\infty} X_t^x = -\infty\right) = \frac{\int_x^{+\infty} \frac{dy}{\varphi_V^2(y)}}{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{\varphi_V^2(y)}}. \tag{4}$$

Remarque : L'équation de Sturm-Liouville, $\varphi''(dx) = \varphi(x)V(dx)$, établit une correspondance entre une mesure de Radon positive V et une fonction convexe positive φ. Le théorème montre qu'en imposant à V certaines hypothèses, une Pénalisation P_x^V apparaît. On peut aussi prendre le chemin inverse et se donner d'abord une fonction φ et chercher des hypothèses pour que $V_\varphi(dx) = \frac{\varphi''(dx)}{\varphi(x)}$ donne lieu à une Pénalisation $P_x^{V_\varphi}$ ou P_x^φ. Il est suffisant de supposer, par exemple, que φ soit paire, croissante dans $\mathbb{R}_-$, que $\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} \leq k$, et que $\int_{\mathbb{R}} \varphi^p(x)dx < \infty$ pour un $p \in]0,1[$. Les exemples suivants montrent ces démarches complémentaires.

QUELQUES EXEMPLES

1. Pour $V(dy) = 2\gamma\delta_a(dy)$, on obtient

$$\varphi_V(x) = \lim_{t\to\infty} \sqrt{t}Z_t^V(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{1}{\gamma} + |x-a|\right).$$

2. Et pour $V(dy) = \gamma^2 1_{[a,b]}(y)dy$, on obtient

$$\lim_{t\to\infty} \sqrt{t}E_x\left[e^{-\frac{\gamma^2}{2}\int_a^b L_t^y dy}\right] = \varphi_V(x),$$

avec

$$\varphi_V(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{1}{\gamma\tanh\left(\gamma\frac{b-a}{2}\right)} + x - b\right) & \textit{si} \quad x \geq b \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{\cosh\left(\gamma\left[x - \frac{a+b}{2}\right]\right)}{\gamma\sinh\left(\gamma\frac{b-a}{2}\right)}\right) & \textit{si} \quad x \in [a,b] \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{1}{\gamma\tanh\left(\gamma\frac{b-a}{2}\right)} + a - x\right) & \textit{si} \quad x \leq a. \end{cases} \tag{5}$$

Par approximation, on peut traiter le cas d'une mesure V positive quelconque. En effet

$$V(dy) = \sum_i \lambda_i^2 1_{[a_i,b_i]}(y)dy + \sum_j \mu_j \delta_{c_j}(dy).$$

3. Pour $\varphi(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$, on obtient $V_\varphi(x) = x^2 - 1$ et $\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = -x$. Ainsi, $(X_t^x)_{t\geq 0}$ sera solution de

$$X_t = x + B_t - \int_0^t X_s ds, \quad t \geq 0, \tag{6}$$

et on retrouve le processus de Ornstein Ulhenbeck.

4. Et pour $\varphi(x) = e^{-\lambda|x|}$, $\lambda > 0$, on obtient $V_\varphi(dx) = \lambda^2 dx - 2\lambda\delta_0(dx)$ et $\frac{\varphi'(dx)}{\varphi(x)} = -\lambda \operatorname{sgn}(x)$. Le processus $(X_t^x)_{t\geq 0}$ sera solution de

$$X_t = x + B_t - \lambda \int_0^t \mathrm{sgn(X_s)ds}$$

et on retrouve le *processus de Bang-bang* de paramètre λ, qui est le processus brownien pénalisé d'une attirance vers l'origine d'intensité λ.

ESQUISSE DE LA PREUVE DU THÉORÈME

La preuve reposera sur quatre lemmes.

- Le premier est un théorème général qui montrera qu'il suffit d'obtenir la convergence de $t^k Z_t^V(x)$, pour un $k \geq 0$, pour que $\mathcal{Q}_{x,t}^V$ converge faiblement et soit donc une pénalisation ;

- Le deuxième nous fournira une estimation qui permettra de prouver que, dans le cas qui nous occupe, il y a convergence pour $k = \frac{1}{2}$;

- Le troisième donnera une équivalence entre la convergence de $\sqrt{t}Z_t^V(x)$ et celle de $\sqrt{2\lambda}A(\lambda, x)$, où $A(\lambda, x)$ est la λ-transformée de Laplace de $Z_t^V(x)$.

- Le quatrième donnera des résultats de convergence pour $\sqrt{2\lambda}A(\lambda, x)$.

Lemme 2.1 *(Théorème Général) : Si pour un* $k \geq 0$*, la limite quand* $t \to \infty$ *de* $t^k Z_t^V(x)$ *existe pour tout* $x \in \mathbb{R}$*, alors*

- $\varphi_V(x) := \lim_{t\to\infty} t^k Z_t^V(x)$ *est une solution de l'équation de Sturm-Liouville ;*
- $\left(M_t^V\right)_{t\geq 0} = \left(\frac{\varphi_V(X_t)}{\varphi_V(x)} e^{-\frac{1}{2}\int_0^t V(X_s)ds}\right)_{t\geq 0}$ *est une* $(P_x, \mathcal{F}_t)$*-martingale ;*
- *et* $\forall \Lambda_s \in \mathcal{F}_s, \quad \lim_{t\to+\infty} \mathcal{Q}_{x,t}^V(\Lambda_s) = E_x[1_{\Lambda_s} M_s^V]$.

Lemme 2.2 *Il existe une constante* C *telle que* $\forall t \geq 0$ *et* $x \in \mathbb{R}$,

$$\sqrt{1+t} Z_t^V(x) \leq C(1+|x|).$$

Lemme 2.3 *Soit* $A(\lambda, x) := \int_0^\infty e^{-\lambda t} Z_t^V(x) dt$*. Alors*

$$\lim_{t\to\infty} \sqrt{t} Z_t^V(x) = \varphi_V(x) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{\lambda\to 0} \sqrt{2\lambda} A(\lambda, x) = \sqrt{2\pi}\varphi_V(x).$$

Lemme 2.4 *Soit* $B(\lambda, x) = \sqrt{2\lambda} A(\lambda, x)$*. Alors il existe une fonction de densité* $\theta(\lambda, x)$ *telle que*

$$B''(\lambda, dx) - B(\lambda, x)V(dx) = \theta(\lambda, x)dx, \quad \text{et} \quad \lim_{\lambda\to 0}\left(\sup_{x\in\mathbb{R}} |\theta(\lambda, x)|\right) = 0.$$

Aussi, $\sup_{x\in\mathbb{R},\lambda\geq 0} |B'(\lambda, x)| < \infty$*, et* $\lim_{\lambda\to 0, x\to\pm\infty} B'(\lambda, x) = \pm 2$.

3 LA PÉNALISATION : $\Gamma_t = \varphi(S_t)$

Soit $\varphi : \mathbb{R}_+ \to]0, \infty[$ une densité de probabilité sur $\mathbb{R}_+$. On définit maintenant la loi de probabilité pénalisée :

$$Q_{x,t}^\varphi := \frac{\varphi(S_t)}{\mathbb{E}_x[\varphi(S_t)]} \cdot \mathbb{P}_x.$$

Sans perte de généralité, on peut prendre $x = 0$.

Un certain processus de Bessel va jouer un rôle fondamental dans le théorème qui suit. Définissons-le :

Définition 3 *:* (Processus de Bessel de dimension 3 ou BES^3). *Soit* $(B_t)_{t\geq 0}$ *un mouvement brownien dans* $\mathbb{R}^3$*, issu de 0. Le processus* $||B_t||_{t\geq 0}$*, qui est dans* $\mathbb{R}$*, est un* BES^3 *issu de* 0.

Tous les résultats de Pénalisation sont rassemblés ci-dessous :

Théorème 2 1. *Pour tout* $\Lambda_s \in \mathcal{F}_s$*,*

$$Q^{\varphi}_{0,t}(\Lambda_s) \to_{t\to\infty} Q^{\varphi}_0(\Lambda_s) := E_0[1_{\Lambda_s} M^{\varphi}_s],$$

où $(M^{\varphi}_t)_{t\geq 0} = \Big(\varphi(S_s)(S_s - X_s) + \int_{S_s}^{\infty} \varphi(y)dy\Big)_{t\geq 0}$ *est une* $(P_x, \mathcal{F}_t)$*-martingale.*

On a aussi que $X_t - \int_0^t \frac{\varphi(S_s)}{M^{\varphi}_s} ds$ *est un* Q^{φ}_x*-MB.*

2. *Sous la probabilité* Q^{φ}_0 *:*

   (a) S_∞ *est p.s fini et a pour loi* $\varphi(y)dy$*.*

   (b) *Soit* $g := \sup\{s \geq 0; X_s = S_\infty\}$*. Alors* $0 < g < \infty$ *p.s.*

   (c) *Les deux processus* $(X_t, t \leq g)$ *et* $(X_g - X_{t+g}, t \geq 0)$ *sont indépendants.*

   (d) $(X_g - X_{t+g}, t \leq 0)$ *est un* $BES^3(0)$*.*

   (e) *Conditionnant par* $S_\infty = z$*,* $(X_t, t \leq g)$ *est distribué comme un* $MB(0)$ *arrêté au premier passage par* z*, i.e* $(B_t, t \leq T_z)$*.*

   (f) $(2S_t - X_t, t \geq 0)$ *est un* $BES^3(0)$ *indépendant de* S_∞*.*

La loi Q^{φ}_0 est une pénalisation de la mesure de Wiener. Rappelons que le mouvement brownien dans $\mathbb{R}$, qui est le processus canonique de $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ sous la loi de Wiener, est un processus récurrent, non borné. En revanche, le processus canonique devient sous la loi Q^{φ}_0 un processus stochastique localement brownien dont le maximum global a pour loi φ. Autrement dit, on a choisi "à la carte" la loi du maximum global (2.(a)).

En plus, le dernier passage par le maximum global, g, sera fini presque sûrement et on peut donc décomposer le processus en deux parties : $(X_t, t \leq g)$ et $(X_t, t \geq g)$. Les deux processus sont indépendants, le premier sera un mouvement brownien arrêté et le deuxième un processus de Bessel de dimension 3.

Le résultat 2.(a), peut-être le plus étonnant par sa clarté, peut se prouver de manière assez élémentaire. Voyons-le :

<u>Preuve</u>

Pour $x > 0$, soit $T_x := \inf\{t \geq 0; X_t = x\}$, le premier passage par x. Comme sous P_x, on a que X est un MB, forcément $T_x < \infty$ p.s. Les autres hypothèses du Théorème d'arrêt de Doob se vérifient aussi et on a :

$$Q_0^{\varphi}(S_t > x) = Q_0^{\varphi}(T_x < t) = E_0[1_{\{T_x<t\}}M_t^{\varphi}] = E_0[1_{\{T_x<t\}}M_{T_x}^{\varphi}].$$

Par définition de M^{φ} et parce que $S_{T_x} = X_{T_x} = x$, on a que $M_{T_x}^{\varphi} = \int_x^{\infty} \varphi(y)dy$.

Cela donne : $Q_0^{\varphi}(S_t > x) = E_0\left[1_{\{T_x<t\}}\int_x^{\infty}\varphi(y)dy\right]$, et avec $t \to \infty$ on obtient par convergence dominée :

$$Q_0^{\varphi}(S_\infty > x) = E_0\left[1 \cdot \int_x^{\infty} \varphi(y)dy\right] = \int_x^{\infty} \varphi(y)dy. \qquad \square$$

4 CONCLUSION

Pour finir, citons une pénalisation particulièrement intéressante, un peu plus complexe, dont l'étude n'a pas encore donné ses derniers fruits. Considérons pour $d = 1, 2, 3$ la mesure de Wiener $\mathbb{W}^{(d)}$ pénalisée par le processus des poids suivant :

$$\Gamma_t = \exp\left(-\beta \int_0^t \int_0^t \delta(B_s - B_u)dsdu\right)$$

où $\beta > 0$ est le degré d'auto-répulsion.

Cette pénalisation nous donnera un processus (de diffusion), localement brownien, dont les trajectoires sont allégées ou chargées de point doubles, selon le paramètre β. Pour $d = 1$, les probabilités $Q_t^{(\beta)} = \frac{\Gamma_t}{E[\Gamma_t]} \cdot \mathbb{W}$ sont faciles à définir en fonction des temps locaux browniens. Pour $d = 2$, leur existence ainsi que l'équivalence au sens de Radon-Nikodym avec $\mathbb{W}^{(2)}$ ont été prouvées grâce à un résultat de rénormalisation de Varadhan. Et pour $d = 3$, leur existence est due à Westwater et ce sont des probabilités singulières par rapport à $\mathbb{W}^{(3)}$.

5 BIBLIOGRAPHIE

[1] B.Roynette, P.Vallois et M.Yor. *Limiting laws associated with Brownian motion perturbed by normalized exponential weights, I*, C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., 337 (2003), 667-673. MR 2005e :60187

[2] B.Roynette, P.Vallois et M.Yor. *Limiting laws associated with Brownian motion perturbed by its maximum, minimum and local time, II*, Stud. Math. Hung. march 2006

[3] [RY] D.Revuz et M.Yor. *Continuous martingales and Brownian motion*, volume 293 of *Grundleheren der Matematischen*

[4] B.Roynette, P.Vallois et M.Yor. *Some penalisations of Wiener measure*, The Mathematical Society of Japan and Springer-Verlag 2006.

[5] M.Yor, *Grossissement d'une filtration et semi-martingales : théorèmes généraux*, Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 12 (1978), p.61-69.

[6] T.Jeulin. *Semi-martingale et grossissement d'une filtration*, volume 833 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, Berlin, 1980.

[7] B.Roynette, P.Vallois et M.Yor. *Pénalisations et quelques extensions du théorème de Pitman, relatives au mouvement brownien et à son maximum unilatère.*, dans *In Memoriam Paul-André Meyer, Séminaire de Probabilités XXXIX*, Lecture Notes in Mathematics 1874, Émery-Yor (Eds.), Springer-Verlag 2006.

[8] J-F.Legall, *Mouvement Brownien et Calcul Stochastique*, notes de cours de Master 2 du Laboratoire de Probabilités et Modèles aléatoires.

[9] I.Karaztas et S.E.Shreve. *Brownian motion and Stochastic calculus*, volume 113 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1991.