Aspects rigoureux de la mécanique statistique à l'équilibre
TD n^o 4 : Transformées de Legendre

Jérémie Bouttier et Guilhem Semerjian

Avril 2015

1 Fonctions convexes

On considére une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, que l'on suppose convexe :

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y) \quad \text{pour} \quad x, y \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \alpha \in [0,1] \ . \tag{1}$$

1. Pour trois points $x_1 < x_2 < x_3$, montrer que

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2} \ . \tag{2}$$

2. Montrer que les dérivées à gauche et à droite de f

$$(D_- f)(x) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x)-f(x-h)}{h} \ , \qquad (D_+ f)(x) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \ , \tag{3}$$

existent pour tous les x et vérifient, si $x < y$

$$(D_- f)(x) \leq (D_+ f)(x) \leq (D_- f)(y) \leq (D_+ f)(y) \ . \tag{4}$$

3. En déduire que f est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}$ privé d'un nombre au plus dénombrable de points.
4. Montrer que si $\mathcal{G}$ est une famille de fonctions convexes, la fonction f définie par $f(x) = \sup\limits_{g \in \mathcal{G}} g(x)$ est convexe. On dit que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est convexe si elle vérifie (1) au sens de l'arithmétique sur la droite réelle étendue.
5. On dit que $v_\gamma(x) = \gamma x$ est une fonction linéaire tangente au point x à la fonction f convexe ssi

$$f(y) \geq f(x) + v_\gamma(y-x) \quad \forall \ y \ . \tag{5}$$

Montrer qu'en tout point une fonction convexe de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ admet au moins une fonction linéaire tangente. Quelle est la condition d'unicité de la fonction linéaire tangente en un point ?

6. Pour une fonction f pas forcément convexe on définit son enveloppe convexe $E.C.\,f$ comme à la question 4 en prenant pour $\mathcal{G}$ la famille $\{g \text{ convexe et } g(x) \leq f(x) \ \forall x\}$; l'enveloppe convexe est donc la plus grande fonction convexe qui minore f, et si f est convexe $E.C.\,f = f$. Montrer que l'on peut définir de manière équivalente l'enveloppe convexe à partir de la famille des fonctions affines minorant f, i.e. avec $\mathcal{G}' = \{g_{a,b} : g_{a,b}(x) = a\,x + b \leq f(x) \ \forall x\}$.

2 Transformées de Legendre

Pour une fonction f définie sur $\mathbb{R}$, pas forcément convexe, on définit sa transformée de Legendre

$$\hat{f}(\hat{x}) = \sup_x [\hat{x}x - f(x)] \ . \tag{6}$$

1. Interpréter graphiquement cette définition.
2. Calculer les transformées de Legendre de :

$$f(x) = \beta \frac{1}{2} x^2 \ , \qquad f(x) = \beta |x| \ , \qquad f(x) = \beta ||x| - 1| \ . \tag{7}$$

   On supposera $\beta > 0$ dans ces trois cas.
3. Montrer que $\hat{f}$ est convexe.
4. Montrer que $\hat{\hat{f}}(x) \leq f(x)$.
5. Montrer que si g est une fonction affine minorant f, i.e. si $g(x) = ax + b \leq f(x)$ $\forall x$, alors $g(x) \leq \hat{\hat{f}}(x)$ $\forall x$.
6. En déduire que $\hat{\hat{f}} = E.C.f$. Si f est convexe de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ on a donc $\hat{\hat{f}} = f$, et on peut alors inverser la transformée de Legendre avec $f(x) = \sup_{\hat{x}} [\hat{x}x - \hat{f}(\hat{x})]$.
7. Montrer que v_γ est tangente au point x à la fonction f si et seulement si $f(x) + \hat{f}(\gamma) = v_\gamma(x)$.

On peut assez facilement généraliser les résultats ci-dessus au cas des fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$: la définition de convexité (1) reste valable si f est une fonction de X dans $\mathbb{R}$. On peut aussi généraliser la transformée de Legendre avec

$$\hat{f}(\hat{x}) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} [\langle \hat{x}, x \rangle - f(x)] \ , \tag{8}$$

où $\hat{x}$ est aussi un vecteur de $\mathbb{R}^n$, en prenant pour $\langle \hat{x}, x \rangle$ le produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$.

Il existe aussi une généralisation fonctionnelle (plus compliquée). La définition (1) reste valable si f est une fonction de X dans $\mathbb{R}$ avec X un espace vectoriel arbitraire. En notant X^* le dual de X (i.e. l'espace vectoriel des formes linéaires de X vers $\mathbb{R}$), il semble naturel de définir la transformée de Legendre $\hat{f}$ comme une fonction de X^* dans $\mathbb{R}$ selon

$$\hat{f}(\hat{x}) = \sup_{x \in X} [\langle \hat{x}, x \rangle - f(x)] \ , \tag{9}$$

où l'on a noté $\langle \hat{x}, x \rangle = \hat{x}(x)$ l'action de la forme linéaire $\hat{x}$. De même une fonctionnelle linéaire tangente à f en x sera un élément $\hat{x}$ du dual tel que $f(y) \geq f(x) + \langle \hat{x}, y - x \rangle$ pour tout $y \in X$.

Cependant la généralisation de certains théorèmes, en particulier la caractérisation des fonctionnelles tangentes par $f(x) + \hat{f}(\hat{x}) = \langle \hat{x}, x \rangle$, n'est valide qu'avec des hypothèse supplémentaires, discutées notamment par Fenchel (dans le cas général on parle de transformée de Legendre-Fenchel). On se restreint en particulier au sous-espace vectoriel $\widehat{X}$ de X^* tel que $\forall x \in X \setminus \{0\}$, il existe $\hat{x} \in \widehat{X}$ avec $\langle \hat{x}, x \rangle \neq 0$; on appelle alors $\langle X, \widehat{X} \rangle$ une paire duale. Il faut aussi restreindre la maximisation dans (9) à un ensemble convexe vérifiant des « bonnes » propriétés.