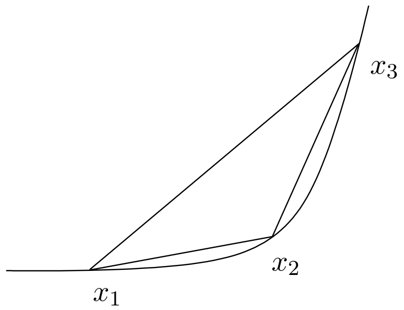
Aspects rigoureux de la mécanique statistique à l'équilibre
Corrigé du TD n° 4 : Transformées de Legendre

Jérémie Bouttier et Guilhem Semerjian

Avril 2015

1 Fonctions convexes

1. Ecrivons $x_2 = \alpha\, x_1 + (1-\alpha) x_3$, avec $\alpha = \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} \in]0,1[$.



De l'inégalité de convexité

$$f(x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_3) \tag{1}$$

on tire sans difficultés les deux inégalités, qui portent sur les pentes des trois droites tracées sur cette figure.

2. A x fixé, avec $h > 0$, notons $g_+(h) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. En prenant $x_1 = x$, $x_2 = x+h$ et $x_3 = x+h'$ dans l'inégalité précédente on montre que g_+ est une fonction croissante, elle admet donc une limite $(\Delta_+ f)(x)$ quand $h \to 0^+$.
De même $g_-(h) = \frac{f(x)-f(x-h)}{h}$ est décroissante (prendre $x_3 = x$, $x_2 = x-h$, $x_1 = x-h'$), d'où l'existence de sa limite $(\Delta_- f)(x)$ quand $h \to 0^+$.
Comme $g_-(h) \leq g_+(h)$ (prendre $x_2 = x$, $x_1 = x-h$, $x_3 = x+h$), les limites vérifient $(D_- f)(x) \leq (D_+ f)(x)$.
Finalement si $x < y$, en prenant $z \in]x,y[$,

$$(D_+ f)(x) \leq \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \frac{f(y)-f(z)}{y-z} \leq (D_- f)(y) \ . \tag{2}$$

3. Une fonction qui est dérivable à gauche et à droite en x est continue en x, donc f est continue.
Par ailleurs une fonction monotone est continue partout sauf en un nombre au plus dénombrable de points : considérons g croissante, les limites à gauche et à droite de g existent partout, notons $X_\epsilon(I)$ les points d'un intervalle borné I où la discontinuité de g est $> \epsilon$. Sur I g est bornée, $X_\epsilon(I)$ est donc fini pour tout $\epsilon > 0$. Donc l'ensemble des points de discontinuité de g sur $\mathbb{R}$ est $\bigcup_{n>0,p>0} X_{1/n}([-p,p])$, au plus dénombrable.
On peut appliquer ce résultat à $\Delta_+ f$ qui est bien monotone. En un point de continuité x de $\Delta_+ f$ on a $(\Delta_+ f)(x) = (\Delta_- f)(x)$ (en prenant $y \to x^+$ dans l'inégalité (4) de l'énoncé), donc f est dérivable en x.

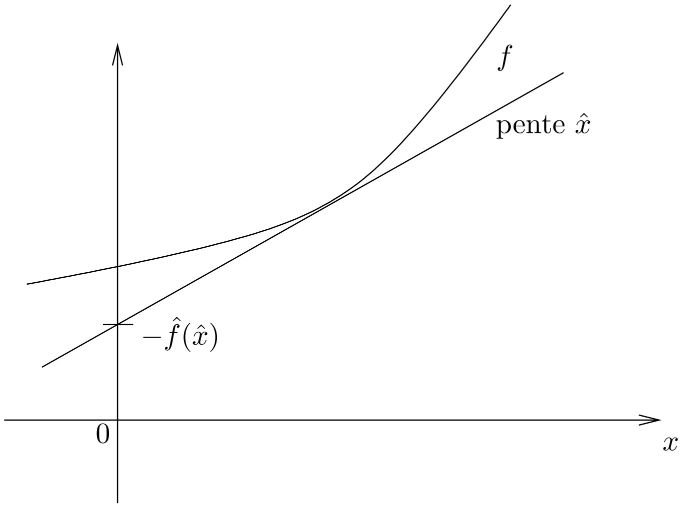
4.

$$\begin{aligned} f(\alpha x + (1-\alpha) y) &= \sup_{g\in\mathcal{G}} g(\alpha x + (1-\alpha) y) \leq \sup_{g\in\mathcal{G}} [\alpha g(x) + (1-\alpha) g(y)] && (3) \\ &\leq \alpha \sup_{g\in\mathcal{G}} [g(x)] + (1-\alpha) \sup_{g\in\mathcal{G}} [g(y)] = \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y) \ . && (4) \end{aligned}$$

5. On a vu qu'en tout point x une fonction convexe f admet des dérivées à gauche et à droite $(D_- f)(x)$ et $(D_+ f)(x)$, avec $(D_- f)(x) \leq (D_+ f)(x)$. Si $\gamma \in [(D_- f)(x), (D_+ f)(x)]$ alors v_γ vérifie la définition, car pour $y > x$
$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq (D_+ f)(x) \geq \gamma \quad \Rightarrow f(y) \geq f(x) + \gamma(y - x) = f(x) + v_\gamma(y - x) \ , \tag{5}$$
et pour $y < x$
$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} \leq (D_- f)(x) \leq \gamma \quad \Rightarrow f(y) \geq f(x) + \gamma(y - x) = f(x) + v_\gamma(y - x) \ . \tag{6}$$
Il y a donc unicité si et seulement si $(D_- f)(x) = (D_+ f)(x)$, autrement dit si f est dérivable au point x considéré.
6. Notons h la fonction obtenue à partir de la famille $\mathcal{G}'$, i.e. $h(x) = \sup\limits_{g \in \mathcal{G}'} g(x)$. Comme $\mathcal{G}' \subset \mathcal{G}$, on a $h(x) \leq (E.C. f)(x)$. Par ailleurs $E.C. f$ est une fonction convexe, elle admet donc au moins une fonction linéaire tangente en tout point. Considérons un point x_0 arbitraire, et une fonction affine $g_{a,b}$ tangente à $E.C. f$ en x_0. Comme $g_{a,b}$ minore $E.C. f$ elle minore aussi f, donc $g_{a,b} \in \mathcal{G}'$, donc $h(x_0) \geq g_{a,b}(x_0) = (E.C. f)(x_0)$. Comme c'est vrai quelque soit x_0, et comme on a aussi l'égalité inverse, on en conclut $h = E.C. f$.

2 Transformées de Legendre

1. L'ordonnée à l'origine d'une droite de pente $\hat{x}$ intersectant f en x est $f(x) - \hat{x}x$. Il faut donc chercher la droite de pente $\hat{x}$ la plus basse possible qui touche f, son ordonnée à l'origine est $-\hat{f}(\hat{x})$.



Si f est dérivable les points stationnaires de la fonction dont on cherche le sup sont solutions de $\hat{x} = f'(x)$.
2. Dans le premier cas la relation entre x et $\hat{x}$ est donnée par $\hat{x} = \beta x$, on trouve $\hat{f}(\hat{x}) = \frac{1}{\beta}\frac{1}{2}\hat{x}^2$. Pour la transformée de Legendre de la valeur absolue il vient
$$\hat{f}(\hat{x}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \hat{x} \in [-\beta, \beta] \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \tag{7}$$
Dans le dernier cas on trouve
$$\hat{f}(\hat{x}) = \begin{cases} |\hat{x}| & \text{si } \hat{x} \in [-\beta, \beta] \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \tag{8}$$
3. $\hat{f}$ est le sup de fonctions convexes de $\hat{x}$ (car affines), elle est donc convexe.

4. D'après la définition,

$$\hat{\hat{f}}(x) = \sup_{\hat{x}}[x\hat{x} - \sup_{x'}[\hat{x}x' - f(x')]] = \sup_{\hat{x}}\inf_{x'}[f(x') + \hat{x}(x-x')] \ . \tag{9}$$

Quelque soit $\hat{x}$ l'inf sur x' est plus petit que sa valeur en x qui vaut $f(x)$, d'où $\hat{\hat{f}}(x) \leq f(x)$.

5.
$$\inf_{x'}[f(x') + \hat{x}(x-x')] \geq \inf_{x'}[ax' + b + \hat{x}(x-x')] = \begin{cases} ax+b & \text{si } \hat{x} = a \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases} \ , \tag{10}$$

d'où $\hat{\hat{f}}(x) \geq ax + b = g(x)$.

6. On a donc d'après les deux dernières questions $(E.C.\,f)(x) \leq \hat{\hat{f}}(x) \leq f(x)$ pour tout x. Or $\hat{\hat{f}}$ est convexe et minore f implique $\hat{\hat{f}}(x) \leq (E.C.\,f)(x)$ pour tout x, ce qui permet de conclure $\hat{\hat{f}} = E.C.\,f$. Si f est convexe elle est égale à son enveloppe convexe, et donc à sa double transformée de Legendre. On peut vérifier explicitement la relation $\hat{\hat{f}} = f$ pour f convexe sur les deux premiers exemples traités ci-dessus. Dans le troisième cas on trouve

$$\hat{\hat{f}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [-1,1] \\ \beta(|x|-1) & \text{sinon} \end{cases} \ , \tag{11}$$

qui est bien l'enveloppe convexe de f.

7. Pour tout x et γ on a $f(x) + \hat{f}(\gamma) \geq v_\gamma(x)$, par définition de la transformée de Legendre. De plus

$$f(x) + \hat{f}(\gamma) \leq v_\gamma(x) \quad \Leftrightarrow \quad \hat{f}(\gamma) = \sup_y[\gamma y - f(y)] \leq v_\gamma(x) - f(x) \tag{12}$$

$$\Leftrightarrow \quad \gamma y - f(y) \leq v_\gamma(x) - f(x) \quad \forall y \tag{13}$$

$$\Leftrightarrow \quad f(y) \geq f(x) + v_\gamma(y-x) \quad \forall y \ . \tag{14}$$