FIBRÉS VECTORIELS SUR LES SURFACES DE RIEMANN ESPACES DE MODULES ET BLOCS CONFORMES INTRODUCTION AU DOMAINE DE RECHERCHE

RÉMY OUDOMPHENG

Table des matières

Introduction

L'étude des surfaces de Riemann est un problème ancien, introduit au XIX[e] siècle pour étudier des fonctions *multiformes*, définies par une équation algébrique ou comme réciproque d'une fonction analytique usuelle. L'étude du prolongement analytique, par exemple, conduit naturellement à étudier des revêments ramifiés. Les travaux d'Abel et Jacobi sur les identités entre les intégrales maintenant dites *abéliennes*, comme les intégrales elliptiques ou hyperelliptiques, ont initié l'étude des courbes algébriques planes, qui sont maintenant vus sous l'angle de la variété *jacobienne*, et des fonctions thêta *abéliennes*.

En 1938, André Weil propose une généralisation non-abélienne de ces techniques, qui se développa notamment dans les années 1960 et 1970 lorsqu'on a su les comprendre grâce aux nouveaux outils de la géométrie algébrique et analytique inventés par Grothendieck. Plus tard, les fonctions thêta généralisées ont fait leur apparition dans l'étude des invariants quantiques des nœuds et des variétés de dimension trois, ainsi qu'en théorie conforme des champs, et les idées de Witten, inspirées de la physique, ont apporté un nouvel éclairage sur leur signification et leurs propriétés.

Du point de vue de la géométrie algébrique, l'étude des courbes algébriques planes est remarquablement poussée, et permet d'énoncer un grand nombre de résultats fins sur la structure de certains objets. C'est en particulier l'étude des espaces de modules associés qui a fait émerger la notion de *champ algébrique*, qui est aujourd'hui un cadre de travail relativement bien compris pour l'étude de quotients de variétés.

Ce texte présente et reprend les thèmes abordés dans mon mémoire de M2, réalisé sous la direction d'Arnaud Beauville, que je remercie de m'avoir présenté ces sujets anciens, mais toujours d'actualité et encore mystérieux, et de son expérience et ses remarques avisées.

Date: 20 juin 2007.

1. Géométrie des surfaces de Riemann

1.1. **Propriétés topologiques et différentielles.**

1.1.1. *Invariants topologiques des surfaces.* Soit Σ une surface différentiable réelle, orientée, compacte, connexe. Elle est entièrement déterminée à difféomorphisme près par son *genre*, un entier naturel qui est par exemple la moitié de la dimension de son premier groupe de cohomologie de Betti. Intuitivement, une surface de genre g est la somme connexe de g tores, un «tore à g anses».

Si Σ est une surface de genre g, on en connaît ainsi les groupes de cohomologie et homologie entiers : ils sont sans torsion, et les nombres de Betti valent $b_0 = 1$, $b_1 = 2g$ et $b_2 = 1$.

Le groupe fondamental de Σ est le groupe engendré librement par $2g$ éléments a_i, b_i (pour $1 \leqslant i \leqslant g$), soumis à la seule relation $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} = 1$.

1.1.2. *Classification des fibrés vectoriels sur les surfaces.* Les outils de topologie algébrique comme la théorie des faisceaux de Leray ou la cohomologie de Čech permettent d'exprimer efficacement un certain nombre de résultats. Par exemple, les fibrés en droites (réels ou complexes) de classe $\mathcal{C}^k$ sont classifiés par le groupe $H^1(\Sigma, \mathcal{C}^{k\times})$. Or on a une suite exacte

$$0 = H^1(\Sigma, \mathcal{C}^k) \to H^1(\Sigma, \mathcal{C}^{k\times}) \to H^2(\Sigma, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z} \to H^2(\Sigma, \mathcal{C}^k) = 0$$

qui identifie l'ensemble des classes d'isomorphisme de fibrés en droites (munis d'une structure de groupe par le produit tensoriel) aux entiers relatifs. L'acyclicité des faisceaux $\mathcal{C}^k$ provient de l'existence de partitions de l'unité. L'entier associé à un fibré en droites de la sorte est un invariant topologique appelé *degré* ou *première classe de Chern*.

Soit E un fibré vectoriel complexe sur Σ de rang supérieur strictement à 1. On peut trouver, au moyen de partitions de l'unité, une métrique hermitienne sur E continue (et même de classe $\mathcal{C}^\infty$ si nécessaire). On peut alors trouver une section de E continue ou de classe $\mathcal{C}^k$ ne s'annulant nulle part [Hus94]. Pour cela, on modélise la topologie de Σ par la réunion d'une cellule contractile de dimension deux, et d'un squelette de dimension 1. Le fibré est alors trivial sur le squelette, et on peut prolonger une section ne s'annulant pas sur la cellule contractile, à condition que les fibres intéressantes (de la forme $\mathbb{C}^k \setminus \{0\}$) soient simplement connexes.

En recommençant avec l'orthogonal, on obtient une décomposition $E = \Sigma \times \mathbb{C}^{r-1} \oplus L$, où L est un fibré en droites isomorphe à $\bigwedge^r E$. Celui-ci n'est pas forcément trivial, on peut le caractériser par une fonction de transition sur le bord de la cellule contractile, qui est une application de $\mathbb{S}^1$ dans $\mathbb{C}^*$. Celle-ci est caractérisée, à homotopie près, par son degré.

Proposition 1.1. Les fibrés vectoriels topologiques complexes sur Σ sont classifiés par leur degré (défini comme celui de leur déterminant). Si E est un fibré vectoriel complexe de rang $r > 1$ et de degré d, E est de la forme $\mathbb{C}^{r-1} \oplus L$, où L est un fibré en droites de degré d.

On peut également interpréter le degré d'un fibré en droites comme le nombre de zéros d'une section transverse, ou, dans le cas holomorphe, comme le nombre de zéros d'une section non nulle, à multiplicité près.

1.1.3. *Connexions et courbure.* On suppose ici par souci de simplicité que la surface et les fibrés considérés sont de classe $\mathcal{C}^\infty$. Un grand nombre d'invariants topologiques des surfaces et des fibrés peuvent être calculés par des méthodes analytiques et différentielles. C'est le cas, par exemple, de la cohomologie singulière, que l'on peut calculer par la cohomologie de De Rham, ou par la théorie de Hodge.

Définition 1.1 (Connexion). Une *connexion* sur un fibré vectoriel E est un morphisme entre les faisceaux de sections $\nabla : \mathcal{E} \to \mathcal{A}^1_X \otimes \mathcal{E}$ (où $\mathcal{A}^1$ est le faisceau des 1-formes différentielles) qui est un opérateur différentiel linéaire du premier ordre, vérifiant la condition de Leibniz $\nabla(fs) = df \otimes s + f\nabla s$.

Les connexions forment un espace affine sur $A^1(X, \operatorname{End} E)$, les 1-formes à valeurs dans $\operatorname{End} E$. Leur action s'étend naturellement, par la règle de Leibniz, aux formes différentielles de degré quelconque à valeurs dans E. La *courbure* est l'opérateur $\nabla^2 : \mathcal{E} \to \mathcal{A}^2_X \otimes \mathcal{E}$. C'est un morphisme de *fibrés* ($\mathcal{C}^\infty$-linéaire) et pas seulement un morphisme de faisceaux d'espaces vectoriels. On peut donc exprimer la courbure comme une 2-forme à valeurs dans $\operatorname{End} E$.

La théorie de Chern-Weil permet de construire les invariants topologiques de fibrés vectoriels comme classes de cohomologie de polynômes en la courbure. On obtient ainsi, notamment, les classes de Pontryagin et les classes de Chern. Dans le cas qui nous intéresse, la formule cruciale est

$$\deg E = -\frac{1}{2i\pi} \int_X \operatorname{Tr}(R_\nabla).$$

1.2. **Géométrie holomorphe**.

1.2.1. *Structures complexes.* On suppose désormais Σ munie d'une structure complexe. Les structures complexes possibles pour une surface de genre g forment une variété complexe, l'espace de modules des courbes de genre g, qui est quasi-projective. Toute structure presque complexe (c'est-à-dire une structure de fibré en droites complexes sur le fibré tangent) sur une surface est intégrable, c'est-à-dire qu'on peut trouver un atlas holomorphe pour cette structure presque complexe sur la variété. Une surface de Riemann est une surface Σ munie d'une structure complexe.

Le théorème d'uniformisation de Riemann permet de classifier les surfaces de Riemann par leur revêtement universel, en celles de genre 0, qui sont isomorphes à $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, celles de genre 1, qui sont isomorphes au quotient de $\mathbb{C}$ par un réseau (les courbes elliptiques), et celles de genre au moins 2, qui sont le quotient du disque unité de $\mathbb{C}$ par un sous-groupe discret de $PSU(2, \mathbb{C})$ agissant par homographies (les surfaces hyperboliques).

La théorie de Hodge permet de voir d'espace de cohomologie de de Rham $H^1(X, \mathbb{C})$ comme l'espace des 1-formes différentielles harmoniques. Pour cela, on choisit sur le fibré tangent de Σ une métrique hermitienne $h = g - i\omega$, où ω est une 2-forme (forcément fermée), qui fait de h une métrique kählérienne. On a alors le résultat plus fort de décomposition de Hodge : $H^1(X, \mathbb{C}) = H^0(X, \Omega_X) \oplus H^1(X, \mathcal{O}_X)$, où $\mathcal{O}_X$ est le faisceau des fonctions holomorphes, et Ω_X le faisceau des différentielles holomorphes sur X.

1.2.2. *Fibrés vectoriels holomorphes.* Un fibré vectoriel holomorphe sur une surface de Riemann est un fibré vectoriel complexe qui peut être défini des fonctions de transition holomorphes entre des trivialisations sur des cartes locales. Il est muni d'un opérateur canonique $\bar{\partial}$ dont le noyau est constitué des sections holomorphes du fibré. Il permet de construire la résolution de Dolbeault $0 \to E \otimes \mathcal{C}^\infty \to E \otimes A^{0,1} \to 0$, qui par dualité permet d'identifie $H^1(E)$ à $H^0(\Omega_X \otimes E^\vee)$ (c'est la dualité de Serre).

On définit la *pente* d'un fibré vectoriel comme $\mu(E) = \deg E / \operatorname{rg} E$, qui vérifie $\mu(E \otimes F) = \mu(E) + \mu(F)$, alors que $\deg(E \oplus F) = \deg E + \deg F$. Le théorème de Riemann-Roch exprime de manière élégante la caractéristique d'Euler d'un fibré.

Théorème 1.2 (Riemann-Roch). *On a la relation*

$$\chi(E) = h^0(E) - h^1(E) = (\operatorname{rg} E)(\mu(E) + 1 - g).$$

Démonstration. Ceci découle de la formule d'Hirzebruch-Riemann-Roch : on a

$$\chi(E) = \int_X \operatorname{ch}(E) \operatorname{Td}(TX)$$

avec $\operatorname{ch}(E) = r + c_1(E) = r(1 + \mu(E)\bullet)$ et $\operatorname{Td}(TX) = 1 + c_1(TX)/2 = 1 + (1-g)\bullet$. $\square$

On dit qu'un fibré est *semi-stable* si tous ses sous-fibrés sont de pente inférieure, et *stable* si cette inégalité est stricte. On voit facilement que tout fibré semi-stable de pente μ contient un fibré stable de pente μ de rang maximal, et en recommençant avec le quotient, on peut obtenir une filtration de tout fibré semi-stable à gradués stables : c'est la filtration de Jordan-Hölder, les fibrés stables jouant le rôle d'objets simples. Un fibré quelconque possède également une filtration, dite de Harder-Narasimhan, dont les gradués sont semi-stables (considérer un sous-fibré semi-stable de pente maximale) : on peut tracer une ligne brisée reliant les couples (rang, degré) des éléments de la filtration, pour constituer le polygone de Harder-Narasimhan du fibré.

1.3. **Variétés jacobiennes.**

1.3.1. *L'application d'Abel-Jacobi.* Soit $\omega_1, \ldots, \omega_g$ une base des 1-formes différentielles holomorphes. Si P est un point-base, on peut définir pour un point Q un n-uplet de nombres complexes $(\int_P^Q \omega_1, \ldots, \int_P^Q \omega_g)$ qui est défini à une période près, c'est-à-dire le g-uplet des intégrales des différentielles le long d'un lacet.

On assacie ainsi par linéarité à un diviseur sur la courbe un point de la variété jacobienne de X, qu'on peut exprimer sous la forme $\mathbb{C}^g/(\mathbb{Z}^g + \tau\mathbb{Z}^g)$ ou $H^0(X, \Omega_X)^\vee/H_1(X, \mathbb{Z})$, où τ est une matrice symétrique de partie imaginaire définie positive. On obtient ainsi une *application des périodes*, associant à une structure complexe sur la surface la matrice τ représentant les périodes de ses différentielles holomorphes.

1.3.2. *La jacobienne comme espace de module des fibrés en droites.* La jacobienne apparaît également sous la forme de la composante neutre du groupe de Picard de X. On a en effet une suite exacte

$$H^1(X, \mathbb{Z}) \to H^1(X, \mathcal{O}_X) \to H^1(X, \mathcal{O}_X^\times) \to H^2(X, \mathbb{Z})$$

(la suite exacte exponentielle). Le troisième terme classifie les fibrés en droites holomorphes sur X, la première flèche est injective, et le noyau de la dernière (les fibrés en droites topologiquement triviaux), est connexe comme image de $H^1(X, \mathcal{O}_X)$. On construit ainsi le groupe de Picard des fibrés de degré zéro comme $\mathrm{Pic}^0(X) = H^1(X, \mathcal{O}_X)/H^1(X, \mathbb{Z})$. Le théorème d'Abel-Jacobi énonce l'isomorphisme entre la variété définie précédemment et $\mathrm{Pic}^0(X)$, la bijection étant réalisée en passant par le groupe de classes des diviseurs.

1.3.3. *La jacobienne comme ensemble des caractères du groupe fondamental.* La jacobienne est également canoniquement isomorphe au groupe des caractères unitaires de groupe fondamental. On a en effet encore une suite exacte exponentielle

$$H^1(X, \mathbb{Z}) \to H^1(X, \mathbb{R}) \to H^1(X, \mathbb{U}_1) \to H^2(X, \mathbb{Z}) \to H^2(X, \mathbb{R})$$

qui fait apparaître le groupe $H^1(X, \mathbb{U}_1) = \mathrm{Hom}(H_1(X, \mathbb{Z}), \mathbb{U}_1)$ comme quotient de $H^1(X, \mathbb{R})$ par $H^1(X, \mathbb{Z})$. La dépendance en la structure complexe de X se traduit, grâce à la décomposition de Hodge, par un isomorphisme entre $H^1(X, \mathbb{R})$ et $H^1(X, \mathcal{O}_X)$, ainsi que $H^0(X, \Omega_X)$. Ceci revient à fixer une structure complexe sur $H^1(X, \mathbb{R})$, et on retrouve ainsi l'application des périodes.

Celle-ci fait l'objet d'un certain nombre de problèmes, résolus comme le problème de Torelli (voir [FK92] ou [Voi02]) qui consiste à démontrer son injectivité, ou encore ouverts comme le problème de Schottky [Deb95], qui consiste à trouver son image dans l'espace de modules des variétés abéliennes principalement polarisées.

2. Espaces de modules de fibrés vectoriels et fibrés déterminants

Dans son article de 1938 [Wei38], André Weil explique la construction, à partir d'une représentation unitaire du groupe fondamental d'une surface de Riemann Σ de genre au moins 2, d'une application holomorphe du revêtement universel $\widetilde{\Sigma}$ dans $GL_n(\mathbb{C})$ vérifiant des conditions d'automorphie naturelles. En termes modernes, il construit une connexion plate sur le fibré trivial, dont l'holonomie est la représentation fixée. Il propose, à cette occasion d'étudier l'ensemble de ces représentations, et les généralisations naturelles des fonctions abéliennes associées. Voyons comment celles-ci peuvent être construites.

2.1. **Aspects différentiels et symplectiques.** On s'intéresse à l'ensemble des représentations, à conjugaison près, du groupe fondamental d'une surface de Riemann Σ dans un groupe de Lie simple compact G. Celui-ci est muni naturellement d'une structure de variété analytique réelle. On le note également $H^1(\Sigma, G)$, et il classifie en fait les $G^{\mathbb{C}}$-torseurs sur Σ [Ram75].

Le point de vue des connexions permet d'étudier sa structure et sa topologie de façon analytique, sous l'angle de la géométrie symplectique et la théorie de Morse (voir en particulier [AB83] et [Aud04]).

Définition 2.1 (Fibré principal). Un *G-fibré principal* sur une variété différentielle X est la donnée d'une fibration $P \to X$ munie d'une action libre de G au-dessus de X, telle que $P/G \simeq X$.

Définition 2.2 (Connexion). Une *connexion* sur un G-fibré principal $\pi : P \to X$ est une section G-équivariante de la suite exacte $0 \to VP \to TP \to \pi^\star TX \to 0$. Une connexion définit une courbure F de la manière suivante : si V et W sont des champs de vecteurs sur X, ils remontent sur P en V_P et W_P. Le crochet $[V_P, W_P]$ est G-invariant, et $F(V, W)$ est par définition sa partie verticale qui descend en une fonction à valeurs dans $\mathfrak{g}$. On vérifie que F est un tenseur de $\Omega^2(X, \mathfrak{g})$, appelé courbure de la connexion.

Sur un G-fibré trivialisé, de la forme $G \times X \to X$, une connexion est simplement un élément de $\Omega^1(X, \mathfrak{g})$, où $\mathfrak{g}$ est l'algèbre de Lie de G. La notion traditionnelle de connexion sur un fibré vectoriel E correspond à une connexion sur le G-fibré principal $\mathcal{A}ut(E)$, où E peut être muni de structures supplémentaires de sorte que G n'est pas forcément GL_r mais éventuellement SO_r, SU_r, Sp_r, par exemple.

Proposition 2.1. On a une bijection canonique entre les connexions plates (de courbure nulle) à isomorphisme près sur le G-fibré trivial sur X et les classes de conjugaison de représentations de $\pi_1(X)$ dans G.

Démonstration. Par le théorème de Frobenius, la connexion définit une distribution intégrable, et un transport parallèle invariant par homotopie. Réciproquement, on peut facilement construire un G-fibré plat possédant la bonne holonomie, et on vérifie qu'il est trivialisable. □

L'espace qui nous intéresse est donc le quotient des connexions plates sur $G \times X$ par l'action du *groupe de jauge* $\mathcal{C}^\infty(X, G)$ qui est l'ensemble des automorphismes de $G \times X \to X$.

Le choix d'une forme quadratique Tr G-invariante sur $\mathfrak{g}$ (forme de Cartan-Killing) permet de définir une forme symplectique

$$\omega(A, B) = \int_X \mathrm{Tr}(A \wedge B)$$

sur l'ensemble $\mathcal{A} = \Omega^1(X, \mathfrak{g})$ qui est G-invariante et fournit une structure symplectique à l'espace de modules en passant au quotient.

Cette construction de l'espace de modules est un cas particulier de *quotient symplectique*, l'action du groupe de jauge étant hamiltonienne, d'application moment $\mu : \mathcal{C}^\infty(X, \mathfrak{g}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathcal{A})$ définie par

$$\mu(A) = \int_X \mathrm{Tr}(A \wedge F(\bullet)).$$

Celle-ci définit une forme linéaire nulle sur l'algèbre de Lie du groupe de jauge si et seulement si on se place sur une connexion plate. Ces propriétés, combinées avec la théorie de Morse, ont permis à Atiyah et Bott de calculer la cohomologie singulière de l'espace de modules [AB83].

Lorsqu'on prend en compte la structure complexe de Σ, et que $G = SU_r$, on est conduit à étudier les fibrés vectoriels complexes hermitiens sur Σ munis d'une connexion plate. Celle-ci définit toujours une structure holomorphe sur le fibré et on dispose du théorème suivant :

Théorème 2.2 (Narasimhan et Seshadri [NS65], Donaldson [Don83]). *Un fibré vectoriel holomorphe de degré 0 sur une surface de Riemann est stable si et seulement si il admet une métrique hermitienne et une connexion unitaire plate compatible avec sa structure holomorphe. De manière générale, un fibré de pente μ est stable si et seulement si il admet une connexion unitaire de courbure $-2i\pi\mu\,\mathrm{Id}$.*

2.2. **Construction algébrique**. Comme pour la jacobienne, l'espace de modules des représentations unitaires du groupe fondamental peut être muni d'une structure de variété complexe, à travers son interprétation algébro-géométrique. Le théorème précédent le met en relation avec l'espace de modules des fibrés vectoriels stables de degré 0 sur la surface de Riemann considérée. Les constructions de ce type peuvent se faire dans le cadre général de la théorie géométrique des invariants de Mumford (voir [MFK94]), et permettent notamment de construire l'espace de modules grossier des courbes projectives lisses connexes de genre donné, qui a été étudié abondamment par Deligne et Mumford.

Définition 2.3 (Espaces de modules). Considérons un type d'objet, et un foncteur de modules $S \to F(S)$, où $F(S)$ est l'ensemble des familles d'objets du type considéré paramétrées par S (pris dans une certaine catégorie d'espaces géométriques). Un espace de modules fin est un espace M tel que l'on ait une transformation naturelle $F(S) \to \mathrm{Mor}(S, M)$ qui réalise un isomorphisme de foncteurs : en particulier, on peut trouver une famille d'objets universelle, paramétrée par M. Les points de M correspondent alors aux classes d'isomorphismes d'objets, et la famille universelle porte en chaque point de M un objet de la classe d'isomorphisme correspondante.

Un espace de modules *grossier* M' ne possède qu'un morphisme de foncteurs $F \to \mathrm{Mor}(\bullet, M')$, universel parmi les morphismes de foncteurs de ce type. Il ne possède pas, en général, de famille universelle.

Les espaces de modules grossiers apparaisent naturellement lorsqu'on cherche à paramétrer des objets possédant des automorphismes : ceux-ci font apparaître des singularités et empêchent l'existence de familles universelles.

La construction par Grothendieck de certains espaces de modules fins fournit un point de départ intéressant : si les espaces de modules d'objets géométriques pris hors contexte sont souvent difficiles à cerner, le schéma Quot de Grothendieck constitue un espace de modules d'objets insérés dans un cadre précis (sous-fibrés d'un fibré donné, sous-schémas d'un schéma donné), qui est *fin*.

Théorème 2.3 (Construction Quot de Grothendieck). *Soit X un schéma projectif et $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur X. Le foncteur qui à un schéma S associe les quotients de $\mathcal{F} \boxtimes \mathcal{O}_S$, plats sur S (c'est-à-dire les familles plates de quotients de $\mathcal{F}$) est représentable par un schéma* $\mathrm{Quot}(X, \mathcal{F})$, *dont les composantes connexes paramètrent les quotients de polynôme de Hilbert P fixé, et sont des schémas projectifs.*

On peut aussi considérer que l'on paramètre les suites exactes de faisceaux de la forme

$$0 \to \mathcal{E} \to \mathcal{F} \to \mathcal{Q} \to 0$$

auquel on peut interpréter le schéma Quot_P comme l'ensemble des sous-fibrés de polynôme de Hilbert fixé d'un fibré donné. Plaçons-nous sur une courbe, avec F de rang N. En un point E localement libre, l'espace tangent de Zariski est $\mathrm{Hom}(E, Q)$ et l'obstruction à la déformation est paramétrée par $\mathrm{Ext}^1(E, Q)$, ce qui donne la dimension potentielle de $\mathrm{Quot}_{r,d}(F)$ (quotients de F de rang r et degré d) comme $\chi(E^\vee \otimes Q)$.

Pour retrouver l'espace de modules des fibrés de rang r et degré d sur une courbe X (ce qui détermine leur polynôme de Hilbert par le théorème de Riemann-Roch), on utilise le fait que si δ est le degré de X, c'est-à-dire le degré d'un fibré en droites ample fixé, noté $\mathcal{O}_X(1)$, et E de rang r et degré d, on a $\deg E(m) = d + rm\delta$, et pour m assez grand, $E(m)$ est engendré par ses sections globales, acyclique et vérifie éventuellement d'autres conditions utiles. Si on suppose de plus E semi-stable, on peut choisir m de sorte à satisfaire ces conditions uniformément pour tous les fibrés semi-stables.

On réalise ainsi tous les fibrés comme quotients de $\mathcal{O}_X(-m)^\chi$, où $\chi = \chi(E(m))$ et le groupe de symétrie de cette construction correspond aux automorphismes de $\mathcal{O}_X(-m)^\chi$, c'est-à-dire PGL_χ. La théorie géométrique des invariants permet d'effectuer un quotient *catégorique* du schéma Quot associé. Ce n'est pas une notion tout à fait satisfaisante, notamment parce qu'elle impose de se limiter aux classes de fibrés stables, ou semi-stables (les fibrés ayant le même gradué de Harder-Narasimhan se trouvant identifiés sur le même point par cette opération : on parle de classe de S-équivalence). La théorie de Mumford montre que le schéma obtenu est une variété projective, et c'est l'espace de modules grossier des classes de S-équivalence de fibrés vectoriels semi-stables de rang r et degré d.

Un certain nombre d'objets peuvent être déduits de cette construction. Pour une famille de fibrés $E \to X \times S \xrightarrow{\pi} S$, on définit ainsi le fibré déterminant par $\det^{-1} R\pi_\star E$, et l'application déterminant $S \to \mathrm{Jac}^d(X)$ qui classifie la famille $\det E$ paramétrée par S de fibrés en droites sur X. La façon la plus commode de définir le fibré déterminant consiste à produire une résolution libre de $R\pi_\star E$, l'une des plus simples et des plus fonctorielles consistant à trouver une suite exacte

$$0 \to \mathcal{K} \to \mathcal{O}(-m)^q \to E \to 0$$

où m est un entier suffisamment grand, de sorte qu'on ait

$$\pi_\star\mathcal{O}(-m)^q = 0 \to \pi_\star E \to R^1\pi_\star\mathcal{K} \to R^1\pi_\star\mathcal{O}(-m)^q \to R^1\pi_\star E \to 0.$$

On peut alors définir le fibré déterminant comme $\det R^1\pi_\star E \otimes (\det R^1\pi_\star\mathcal{O}(-m)^q)^{-1}$.

Les travaux initiés par Drézet et Narasimhan [DN89] ont permis d'expliciter le rôle central du fibré déterminant, qui engendre le groupe de Picard de l'espace de modules. On peut notamment exprimer le fibré canonique de l'espace de modules, et constater que le fibré déterminant est ample, et acyclique par le théorème de Kodaira.

2.3. **Construction à partir d'espaces homogènes.** Cette construction apparaît pour la première fois chez A. Beauville et Y. Laszlo [BL94].

Dans la suite, on notera $U(r,d)$ l'espace de modules des fibrés (semi-stables) de rang r et de degré d, et $SU(r,L)$ l'espace de modules des fibrés de rang r et de déterminant L. En fait, $SU(r,L)$ est la fibre en L du morphisme $\det : U(r,d) \to \mathrm{Jac}^d(X)$.

L'étude de l'espace de modules des fibrés de degré d fixé peut presque se ramener à l'étude des fibrés de *déterminant fixé* $\mathcal{L}$ (avec $\deg \mathcal{L} = d$) lorsqu'on considère le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
SU(r,\mathcal{L}) \times \mathrm{Jac}^0(C) \arrow[r, "\otimes"] \arrow[d, "(E,M)\to\mathcal{L}+M"] & U(r,d) \arrow[d, "\det"] \\
\mathrm{Jac}^d(C) \arrow[r, "\mathcal{L}+M\to\mathcal{L}+rM"] & \mathrm{Jac}^d(C)
\end{tikzcd}$$

qui est cartésien, puisque le choix d'un $E \in U(r,d)$ et d'un M tel que $\mathcal{L} + rM = \det E$ permet de construire canoniquement $E \otimes M^{-1}$ qui est de déterminant $\mathcal{L}$. Le morphisme du haut est donc un revêtement étale de degré r^{2g}, comme celui du bas.

Si $\mathcal{L}$ est trivial sur X^* (la courbe privée d'un point p fixé), tout fibré vectoriel de déterminant $\mathcal{L}$ a en fait un déterminant trivial sur X^*, et est donc trivial par le théorème de structure des modules de type fini sur un anneau de Dedekind. Il est donc entièrement déterminé, par un argument de descente, par ses trivialisations sur X^*, $\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_{X,p}$ et une fonction de transition dans $GL_r(k_{X,p})$.

En fait, on peut aller plus loin et considérer les anneaux locaux complétés en p. Les fibrés de déterminant trivial munis d'une trivialisation sur X^* sont ainsi paramétrés par la *grassmannienne affine* $SL_r(\mathbb{C}((z)))/SL_r(\mathbb{C}[[z]])$ (on compte les fibrés modulo un changement de trivialisation sur $\mathrm{Spec}\,\widehat{\mathcal{O}}_{X,p} \simeq \mathrm{Spec}\,\mathbb{C}[[t]]$. Pour obtenir véritablement l'espace de modules des fibrés de rang r et de déterminant trivial, il faut en plus quotienter par $SL_r(\mathcal{O}(X^*))$. Ceci fait sens en tant que champ, par exemple, $SL_r(\mathbb{C}((z)))/SL_r(\mathbb{C}[[z]])$ étant une ind-variété (limite inductive de variétés algébriques). On sait par ailleurs que ce champ est algébrique au sens d'Artin, et de dimension finie (à travers, par exemple, la construction précédente).

Cette construction se généralise à d'autres groupes de structure et fait apparaître plus naturellement les représentations d'algèbres de Lie affines qui définissent les blocs conformes.

3. Formule de Verlinde et dualité étrange

3.1. **Blocs conformes et algèbres de Lie affines.** Les liens entre géométrie et représentations de groupes algébriques apparaissent typiquement au travers du théorème de Borel-Weil-Bott.

Théorème 3.1 (Borel-Weil-Bott). *Soit G un groupe algébrique et B un sous-groupe de Borel. Soit T le tore maximal associé. Les caractères de B sont en bijection avec ceux de T (les poids). Chacun fournit une représentation L_λ et un fibré en droites $G \times_B L_\lambda$ sur $X = G/B$ (la variété drapeau). De plus $H^0(X, L_\lambda)$ est une représentation irréductible de plus haut poids λ. De plus, tous les fibrés en droites G-équivariants sur X sont obtenus de cette manière.*

Un résultat analogue tient pour $SL_r(\mathbb{C}((z)))/SL_r(\mathbb{C}[[z]])$. Les fibrés en droites sur cet objet sont en correspondance avec les modules sur $\widehat{\mathfrak{sl}}_r$, intégrables et à plus haut poids. Le fibré déterminant, notamment, a pour sections le dual du module intégrable irréductible associé au poids nul. Ses sections invariantes sous $SL_r(\mathcal{O}(X \setminus p))$ fournissent les sections passant au quotient sur l'espace de modules.

3.2. **Fibré des blocs conformes.** Les différents espaces de blocs conformes, pour les différentes courbes de genre arithmétique $g = H^1(X, \mathcal{O}_X)$ donné, s'organisent sur l'espace de modules des courbes selon un fibré vectoriel muni d'une connexion projectivement plate (sa courbure est une homothétie). Cette connexion est définie par la construction de Sugawara, qui munit les blocs conformes d'une action naturelle de l'algèbre de Virasoro (l'algèbre de Lie affine la plus simple, qui est une extension centrale de $\mathbb{C}((z))$).

Ce fibré s'étend naturellement au bord de l'espace de modules des courbes pointées, dans la compactification de Deligne-Mumford. On a de plus un isomorphisme naturel avec le fibré des blocs conformes sur les espaces de modules de courbes de genre inférieur qui constituent le diviseur à l'infini, qui se traduisent ponctuellement par les isomorphismes de factorisation (normalisation des points doubles).[TUY89, BK01]

3.3. **Algèbre de Verlinde et dimension des blocs conformes.** Les relations de factorisation permettent de construire une algèbre qui calcule les propriétés des blocs conformes pour un choix de poids quelconque. L'algèbre de Verlinde est donc, en tant de groupe additif, le groupe abélien libre sur P_l, l'ensemble des poids dominants de niveau l, muni de la structure $\lambda \cdot \mu = \sum N(\lambda, \mu, \nu^*)\nu$.

La dégénérescence d'une courbe de genre g en courbe rationnelle à g points doubles permet d'exprimer la dimension de $H^0(X, \mathcal{L}^k)$ comme de coefficient du poids nul dans ω^g, où $\omega = \sum \lambda\lambda^*$ est l'élément de Casimir de l'algèbre. De manière générale, le produit d'éléments de l'algèbre de Verlinde exprime la combinatoire de la formule de factorisation.

3.4. **Morphisme de dualité étrange.** Le calcul de la dimension des espaces de blocs conformes aboutit dans certains cas à une formule générale simple. On a par exemple :

$$H^0(\mathcal{M}_{GL_r}, \mathcal{L}^k) = \frac{k^g}{(r+k)^g} \sum_{\substack{S \subset \{1,\dots,r+k\} \\ \#S = r}} \prod_{s \in S, t \notin S} \left| 2 \sin \frac{s-t}{r+k} \right|^{g-1}$$

$$H^0(\mathcal{M}_{SL_r}, \mathcal{L}^k) = \frac{r^g}{(r+k)^g} \sum_{\substack{S\subset\{1,\ldots,r+k\}\\ \#S=r}} \prod_{s\in S, t\notin S} \left|2\sin\frac{s-t}{r+k}\right|^{g-1}$$

On a ainsi une symétrie entre les blocs conformes de GL_r à niveau k et ceux de SL_k à niveau r. Celle-ci s'exprime algébro-géométriquement par le morphisme $\mathcal{M}_{GL_r} \times \mathcal{M}_{SL_k} \to \mathcal{M}_{GL_{rk}}$ donné par le produit tensoriel, qui induit un morphisme

$$H^0(\mathcal{M}_{GL_{rk}}, \mathcal{L}) \to H^0(\mathcal{M}_{GL_r}, \mathcal{L}^k) \otimes H^0(\mathcal{M}_{SL_r}, \mathcal{L}^k).$$

La conjecture de dualité étrange, démontrée pour le type SL_r/GL_k par Marian et Oprea [MO06], indique que l'image du morphisme, qui est une droite, induit à un coefficient près un accouplement parfait entre les deux espaces. On peut également en trouver une autre preuve, par Belkale, s'appuyant sur le parallélisme du morphisme de dualité étrange le long de l'espace de modules des courbes [Bel07], et la démonstration dans le cas d'une courbe nodale rationnelle [Bel06].

4. Utilisations de cohomologies spécifiques dans la preuve de la dualité étrange

4.1. **Cohomologie équivariante**. Dans de nombreuses situations apparaissent des objets munis d'actions de groupes. Le cas des espaces de modules, construits généralement comme quotients de familles *verselles* (selon la terminologie d'Artin) est particulièrement représentatif.

Le formalisme de la cohomologie équivariante, et ses analogues pour les théories du même acabit (K-théorie, groupes de Chow), permet de calculer facilement des intégrales, ou nombres d'intersection, lorsque les objets intervenants sont eux-mêmes équivariants. Il donne aussi la possibilité d'appréhender la cohomologie d'objets définis comme quotients, en particulier les champs algébriques.

Soit X une variété complexe munie d'une action de G. La cohomologie G-équivariante de X est définie comme étant la cohomologie de $X_G = X \times_G \mathbf{E}G$, où $\mathbf{E}G$ est un fibré classifiant, c'est-à-dire un objet trivial sur lequel G agit librement, le quotient $\mathbf{B}G = \mathbf{E}G/G$ étant appelé *espace classifiant* de G : il représente le foncteur des classes d'isomorphisme de G-torseurs.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{E}G \arrow[d] \\ X_G \arrow[r] & \mathbf{B}G \end{tikzcd}$$

Dans la catégorie homotopique topologique, on demande à $\mathbf{E}$ d'être contractile. La cohomologie de X_G est bien définie, indépendamment du choix de $\mathbf{E}G$ (obtenu par exemple par la construction de Milnor). L'anneau de cohomologie $H^\bullet_G(X) = H^\bullet(X_G)$ est munie d'une flèche naturelle vers la cohomologie classique de X, et c'est une algèbre sur $H^\bullet_G(*)$, qui est l'anneau des classes caractéristiques de G, qui joue un rôle déterminant dans la construction d'invariants topologiques des G-fibrés principaux.

Une généralisation à la géométrie algébrique consiste à donner des approximations successives (pour une notion heuristique d'homotopie) de $\mathbf{E}G$, qui est dans la théorie des champs classifiants un point, par des espaces vectoriels où G agit librement en dehors d'une sous-variété de grande codimension [EG98].

La formule de localisation d'Atiyah-Bott permet de remplacer une intégration équivariante par une intégration traditionnelle sur les points fixes de l'action (ce qui réduit en général de beaucoup l'espace à considérer). On peut interpréter cette formule heuristiquement en imaginant que tant qu'un point n'est pas fixe, l'intégrale sur l'orbite d'un voisinage sera nulle à cause du moyennage.

Théorème 4.1 (Formule de localisation d'Atiyah-Bott). *Soit X une variété symplectique ou complexe, munie d'une action d'un groupe de Lie G, dont les points fixes sont répartis en sous-variétés F_i. Soit $\alpha \in H^\bullet_G(X)$ une classe de cohomologie G-équivariante sur X de degré maximal, et $\iota : F \hookrightarrow X$ l'inclusion canonique. Alors*

$$\int_X \alpha = \sum_i \int_{F_i} \frac{\iota^\star \alpha}{e(N_{F_i})}$$

où le quotient doit être compris dans une localisation convenable des algèbres de cohomologie équivariantes, et e désigne la classe d'Euler, ou la classe de Chern maximale dans le cas de fibrés complexes (ici N_F désigne le fibré normal à F dans X).

4.2. **Cohomologie quantique**. La clef de la démonstration de la dualité rang-niveau pour GL_r et SL_r est l'isomorphisme entre l'algèbre de Verlinde de SL_r au niveau k et la petite cohomologie quantique de la grassmannienne $G(r, r+k)$ des sous-espaces de dimension r de $\mathbb{C}^{r+k}$. Cette relation avait déjà été remarquée par Witten [Wit95], puis mentionnée et redécortiquée par Bertram, Belkale et autres.

La cohomologie quantique est un outil issu de méthodes utilisées en physique, et l'existence de cette structure a été remarquée et étudiée par Vafa, Witten, Kontsevich et un certain nombre de mathématiciens proches de la physique théorique. Il s'agit de munir la cohomologie quantique d'une structure d'algèbre de Frobenius différente de la structure usuelle, inspirée du calcul de certaines fonctions de corrélation dans la théorie conforme des champs ou la théorie des cordes.

Sa structure encode en particulier un certain nombre d'invariants de géométrie énumérative fait intervenir les invariants de Gromov-Witten, qui comptent (sous forme de nombres d'intersection) le nombre de morphismes d'une courbe (fixée ou simplement de genre fixée) envoyant certains points marqués sur des représentants de classes de cohomologie fixées.

Soit X une variété lisse. On pose l'accouplement

$$\langle \alpha \cup \beta \cup \gamma \rangle = \sum_d \langle \alpha \cup \beta \cup \gamma \rangle_d \, q^d$$

où q est une indéterminée, et $\langle \cdots \rangle_d$ est le nombre d'intersection des classes induites sur l'espace des courbes de degré d tracées sur X, ou sur $\mathrm{Mor}_d(C, X)$ où C est la courbe de référence choisie.

Cet accouplement munit $H^\bullet(X)[q]$ d'une structure d'algèbre de Frobenius. On parle de cohomologie quantique (et de petite cohomologie quantique si la courbe de départ est fixée).

L'isomorphisme entre une algèbre de Verlinde et une comohologie quantique permet en extrayant les coefficients de structure des algèbres (sachant qu'on a une bijection canonique entre une base additive de chacune) d'exprimer les nombres de Verlinde comme nombres d'intersection.

On obtient ainsi la formule suivante [MO06]

$$H^0(\mathcal{M}_{GL_r}, \Theta^k \otimes \det{}^\star \Theta) = \int_{\mathrm{Quot}_{r,d}(\mathcal{O}_C^{r+k})} a_k^s$$

où a_k est la classe de Chern maximale du dual $\mathcal{E}^\vee$ du sous-fibré universel restreint à $Q \times \{p\}$ où p est un point fixé de C : elle mesure l'ensemble des points du schéma $Q = \mathrm{Quot}$ où la sous-fibre est contenue dans un certain hyperplan, et s est l'entier nécessaire pour que l'intégrale ait un sens, sachant que dans les cas favorables, $\dim Q = d(r+k) - rk(g-1)$. On peut obtenir la valeur de l'intégrale en utilisant les lois de composition des invariants de Witten, ou, comme le font Marian et Oprea, par un calcul d'intégration équivariante. Le résultat est la formule de Vafa et Intriligator, qui exprime de manière élégante et générale la valeur de ce type d'intégrale sur un schéma Quot.

Théorème 4.2 (Formule de Vafa-Intriligator [MO05,Int91,Ber94]). *Soit R le polynôme symétrique tel que $R(\alpha_1, \dots, \alpha_r) = P(a_1, \dots, a_r)$, où les α_i sont les racines de Chern de $\mathcal{E}^\vee$. On pose*

$$J(x_1, \dots, x_r) = N^r (x_1 \cdots x_r)^{-1} \prod_{i<j} (x_i - x_j)^{-2}.$$

Alors

$$\int_{[Q]^{\mathrm{vir}}} P(a_1, \dots, a_r) = (-1)^{(g-1)\binom{r}{2} + d(r-1)} \sum_{\lambda_1, \dots, \lambda_r} R(\lambda_1, \dots, \lambda_r) J^{g-1}(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$$

où la somme porte sur les r-uplets ordonnés de racines N-ièmes de l'unité distinctes.

Cette formule généralise le résultat obtenu par la méthode des résidus (exprimé par Witten [Wit95] par exemple) pour le cas de $\mathbb{P}^1$, correspondant à la petite cohomologie quantique de la grassmannienne.

Alina Marian et Dragos Oprea utilisent cette identité pour démontrer directement la dualité dans le cas général, en remarquant de plus que la dimension de $H^0(\mathcal{M}_{GL_r}, \Theta^k \otimes \det^\star \Theta)$ est symétrique en r et k, contrairement à l'énoncé originel de la conjecture de dualité (qui s'en déduit cependant relativement facilement).

Cette autre dualité résulte de l'interprétation du nombre d'intersection comme le nombre de points d'une intersection schématique correspondante, obtenue comme $\mathrm{Quot}_{r,d}(F)$ où F est le sous-fibré de $\mathcal{O}^{r+k}$ des sections qui en s points fixés sont à valeurs dans des hyperplans fixés. Ces points donnent des fibrés qui réalisent la dualité étrange de manière géométrique.

Références

[AB83] M. F. Atiyah and R. Bott, *The Yang-Mills equations over Riemann surfaces*, Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A **308** (1983), no. 1505, 523–615.

[Aud04] Michèle Audin, *Torus actions on symplectic manifolds*, Second revised edition, Progress in Mathematics, vol. 93, Birkhäuser Verlag, Basel, 2004.

[BK01] Bojko Bakalov and Alexander Kirillov Jr., *Lectures on tensor categories and modular functors*, University Lecture Series, vol. 21, American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.

[BL94] Arnaud Beauville and Yves Laszlo, *Conformal blocks and generalized theta functions*, Comm. Math. Phys. **164** (1994), no. 2, 385–419.

[Bel06] Prakash Belkale, *The strange duality conjecture for generic curves* (2006), disponible à arXiv:math/0602018v2.

[Bel07] ———, *Strange duality and the Hitchin/WZW connection* (2007), disponible à arXiv:0705.0717v2.

[Ber94] Aaron Bertram, *Towards a Schubert calculus for maps from a Riemann surface to a Grassmannian*, Internat. J. Math. **5** (1994), no. 6, 811–825, disponible à arXiv:alg-geom/9403007.

[Deb95] Olivier Debarre, *The Schottky problem : an update*, Current topics in complex algebraic geometry (Berkeley, CA, 1992/93), Math. Sci. Res. Inst. Publ., vol. 28, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995, pp. 57–64.

[Don83] S. K. Donaldson, *A new proof of a theorem of Narasimhan and Seshadri*, J. Differential Geom. **18** (1983), no. 2, 269–277.

[DN89] J.-M. Drezet and M. S. Narasimhan, *Groupe de Picard des variétés de modules de fibrés semi-stables sur les courbes algébriques*, Invent. Math. **97** (1989), no. 1, 53–94.

[EG98] Dan Edidin and William Graham, *Equivariant intersection theory*, Invent. Math. **131** (1998), no. 3, 595–634, disponible à arXiv:alg-geom/9603008.

[FK92] H. M. Farkas and I. Kra, *Riemann surfaces*, 2nd ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 71, Springer-Verlag, New York, 1992.

[Hus94] Dale Husemoller, *Fibre bundles*, 3rd ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 20, Springer-Verlag, New York, 1994.

[Int91] Kenneth Intriligator, *Fusion residues*, Modern Phys. Lett. A **6** (1991), no. 38, 3543–3556, disponible à arXiv:hep-th/9108005.

[MO05] Alina Marian and Dragos Oprea, *Virtual intersection on the* Quot *scheme and Vafa-Intriligator formulas* (2005), disponible à arXiv:math/0505685.

[MO06] ———, *The rank-level duality for nonabelian theta functions* (2006), disponible à arXiv:math/0605097.

[MFK94] D. Mumford, J. Fogarty, and F. Kirwan, *Geometric invariant theory*, 3rd ed., Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (2), vol. 34, Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[NS65] M. S. Narasimhan and C. S. Seshadri, *Stable and unitary vector bundles on a compact Riemann surface*, Ann. of Math. (2) **82** (1965), 540–567.

[Ram75] A. Ramanathan, *Stable principal bundles on a compact Riemann surface*, Math. Ann. **213** (1975), 129–152.

[TUY89] Akihiro Tsuchiya, Kenji Ueno, and Yasuhiko Yamada, *Conformal field theory on universal family of stable curves with gauge symmetries*, Integrable systems in quantum field theory and statistical mechanics, Adv. Stud. Pure Math., vol. 19, Academic Press, Boston, MA, 1989, pp. 459–566.

[Voi02] Claire Voisin, *Théorie de Hodge et géométrie algébrique complexe*, Cours Spécialisés, vol. 10, Société Mathématique de France, Paris, 2002.

[Wei38] André Weil, *Généralisation des fonctions abéliennes*, Journal de Math. Pures et Appl., IX^{e} série **17** (1938), 47–87.

[Wit95] Edward Witten, *The Verlinde algebra and the cohomology of the Grassmannian*, Geometry, topology, & physics, Conf. Proc. Lecture Notes Geom. Topology, IV, Int. Press, Cambridge, MA, 1995, pp. 357–422, disponible à arXiv:hep-th/9312104.