Critère d'irréductibilité d'induites localement analytiques de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$

Aurel Page - Guillaume Scerri
sous la direction de Benjamin Schraen

27 juin 2008

Résumé

On cherche à étudier des représentations de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$. Comme c'est un problème difficile, on se restreint au cas des représentations localement analytiques. Dans ce mémoire, on va travailler sur certaines représentations localement analytiques en dimension 2, qui sont construites par induction (c'est actuellement le seul moyen connu de construire des représentations localement analytiques). Pour ces représentations, on va obtenir une condition nécessaire et suffisante d'irréductibilité.

Table des matières

1 Préliminaires

1.1 Définition de $\mathbb{Q}_p,\ \mathbb{Z}_p,\ \mathbb{C}_p$

Propriétés de $\mathbb{Q}_p$

Définition 1.1. La *valeur absolue p-adique* du rationnel x est

$$|x|_p = p^{-v_p(x)}$$

où $v_p(\frac{a}{b}) = v_p(a) - v_p(b)$ et v_p est la valuation p-adique.

Il est intéressant de voir que cette valeur absolue est ultramétrique.
Remarque : on ne démontrera pas ce résultat, mais $\mathbb{Q}_p$ n'est pas algébriquement clos.

Définition 1.2. $\mathbb{Q}_p$ est le complété de $\mathbb{Q}$ pour cette valeur absolue.

Proposition 1.1. *On a* $\mathbb{Q}_p = \left\{\sum_{k\geq r} a_k p^k | r \in \mathbb{Z},\ 0 \leq a_i \leq p-1\right\}$

Démonstration. Déjà l'ensemble des sommes finies dans l'ensemble précédent sont dans $\mathbb{Q}$. Par ailleurs, pour la métrique p-adique, les restes de telles séries convergent vers 0 ; en effet $\left|\sum_{k\geq n}(a_k)p^k\right|_p \leq p^{-n}$, ainsi l'ensemble décrit ci dessus est inclus dans $\mathbb{Q}_p$.

Posons $A = \left\{\sum_{k\geq r} a_k p^k | r \in \mathbb{Z},\ 0 \leq a_i \leq p-1\right\}$. $\mathbb{Z} \subset A$ (sommes finies avec $r = 0$). A est clairement un anneau. De plus l'inverse formel de telles séries (non nulle) existe sous cette forme, donc A est un corps. Donc $\mathbb{Q} \subset A$. De plus une suite de telles séries est de Cauchy si et seulement si tous les termes sont constants à partir d'un certain rang, donc sa limite dans $\mathbb{Q}_p$ est bien dans A. Donc A est fermé dans $\mathbb{Q}_p$ et contient $\mathbb{Q}$, donc $A = \mathbb{Q}_p$. □

On peut remarquer que le r maximal dans cette écriture est la valuation de l'élément.

Proposition 1.2. *Dans $\mathbb{Q}_p$ une série est convergente si et seulement si son terme général tend vers 0.*

Démonstration. Soit $\sum_{n\geq 0} a_n$ une série à coefficients dans $\mathbb{Q}_p$, telle que $a_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

Soit R_n le reste de rang n, comme $|.|_p$ est ultramétrique,
on a $|R_n|_p \leq \sup\limits_{k\geq n}|a_n|_p$, ainsi $|R_n|_p \underset{n\to\infty}{\to} 0$, et comme $\mathbb{Q}_p$ est complet la série converge. □

Propriétés de $\mathbb{Z}_p$

Définition 1.3. $\mathbb{Z}_p$ (l'anneau des *entiers p-adiques*) est la limite projective des $\frac{\mathbb{Z}}{p^n\mathbb{Z}}$. C'est-à-dire que $x \in \mathbb{Z}_p$ est une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $a_n \in \{0, \cdots, p^n - 1\}$ et, si $n < m$, $a_m \equiv a_n[p^n]$.

Proposition 1.3. $\mathbb{Z}_p$ *est compact.*

Démonstration. $\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid a_n \in \{0, \cdots, p^n - 1\}\}$ est compact (comme produit de compacts). Par ailleurs, $A_k = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A \mid a_k \equiv a_{k+1}[p^n]\}$ est fermé dans $\mathbb{Z}_p$ par continuité des projections. On a $\mathbb{Z}_p = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k$ et ainsi $\mathbb{Z}_p$ est fermé dans un compact, donc compact. $\square$

Proposition 1.4. *$\mathbb{Z}_p$ est isomorphe comme anneau topologique au sous-ensemble de $\mathbb{Q}_p$. :*

$$\left\{ \sum_{n\geq 0} a_n p^n \mid \forall i \in \mathbb{N} a_n \in \{1, \cdots, p-1\} \right\} = B_f(0,1)$$

Démonstration. On envoie chaque série sur la suite de ses réductions modulo p^n. Ceci est clairement un isomorphisme d'anneaux. Montrons que les topologies sont les mêmes. Il suffit de regarder des bases de voisinages de 0.
Pour la topologie limite projective, une base est l'ensemble des suites nulles jusqu'à un certain rang r, qui s'envoie sur les séries de valuation supérieure ou égale à r, soit la boule de centre 0 et de rayon p^{-r}, et ces boules constituent une base de voisinages de 0 dans $\mathbb{Q}_p$. $\square$

Comme $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des sommes finies dans l'ensemble précédent, on a $\mathbb{Z}$ dense dans $\mathbb{Z}_p$.

Proposition 1.5. $\mathbb{Z}_p^* = \mathbb{Z}_p \setminus p\mathbb{Z}_p$ *Dans $\mathbb{Q}_p$ on a les égalités suivantes :*
- $\mathbb{Z}_p^* = S(0,1)$
- $\mathbb{Z}_p = B_f(0,1)$
- $p\mathbb{Z}_p = B(0,1)$

Démonstration. Avec l'écriture séquentielle, la multiplication est la multiplication terme à terme, et a_n est inversible dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ssi $p \not| a_n$. Ainsi $x \in \mathbb{Z}_p$ est inversible ssi $x \notin p\mathbb{Z}_p$.

Si $x \notin p\mathbb{Z}_p$, alors $|x|_p = 1$, on a bien $\mathbb{Z}_p^* = S(0,1)$. Réciproquement, en voyant les éléments de $\mathbb{Q}_p$ en tant que séries, on a le résultat.

Si $x \in \mathbb{Z}_p$, on écrit $x = \sum_{n\geq 0} a_n p^n$ avec cette écriture, on voit que $|x|_p \leq 1$ ainsi $\mathbb{Z}_p \subset B_f(0,1)$, par le même argument que précédemment la réciproque est claire.

Avec ce qui précède, $p\mathbb{Z}_p = B(0,1)$ $\square$

Proposition 1.6. *$\mathbb{Z}_p$ est non-dénombrable.*

Démonstration. $\mathbb{Z}_p$ est localement compact, c'est donc un espace de Baire.
Les singletons sont des fermés d'intérieur vide (il n'y a pas de point isolé car 0 n'est pas isolé) dans $\mathbb{Z}_p$. Ainsi, si $\mathbb{Z}_p$ était dénombrable, $\mathbb{Z}_p$ serait d'intérieur vide, ce qui n'est pas car dans $\mathbb{Q}_p$ on a $\mathbb{Z}_p = B(0,1)$ $\square$

Il est intéressant de remarquer que tout $x \in \mathbb{Q}_p$ s'écrit $\frac{k}{p^n}$ avec $k \in \mathbb{Z}_p$, $n \in \mathbb{N}$.

Définition de $\mathbb{C}_p$

Définition 1.4. $\mathbb{C}_p$ est le complété de la clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$.

Le logarithme p-adique On peut poser pour $|x| < 1$:

$$\log(1+x) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$$

et pour $|x| < R$:

$$\exp(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}.$$

Lorsque cela a un sens, log et exp vérifient $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$ et $\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$, $\exp(\log(x)) = x$ et $\log(\exp(y)) = y$.
La fonction log admet un unique prologement à $\mathbb{Q}_p \subset K$ (extension finie) tel que $\log(p) = 0$.
On note $\mu_\infty = \{z \in \mathbb{C}_p,\ \exists n,\ (1+z)^{p^n} = 1\}$.
On a $\mu_\infty \cap \mathbb{Q}_p \subset \{x \in \mathbb{Q}_p,\ \log(1+x) = 0\}$.
De plus si $\log(1+x) = 0$, pour n assez grand, on a $(1+x)^{p^n} = \exp(p^n \log(1+x)) = \exp(0) = 1$ donc $x \in \mu_\infty$.

Pour les démonstrations, voir [Dia99]

1.2 Fonctions localement analytiques sur un ouvert de $\mathbb{Q}_p^d$

On prendra dans toute la suite K une extension finie de $\mathbb{Q}_p$.

Définition 1.5. Soit X un ouvert de $\mathbb{Q}_p^d$.
On dit que $f : X \to K$ est localement analytique si elle s'écrit comme une série entière convergente en les coefficients au voisinage de tout point de X. On appelle cet espace $\mathcal{C}^{\mathrm{an}}(X, K)$.

Si X est compact, on définit pour $n \in \mathbb{N}$, soit :

$$A_n = \{f \in \mathcal{C}^{\mathrm{an}}(X, K) \mid \\ f \text{ se développe en série entière sur toute boule de rayon } p^{-n}\}$$

On définit sur A_n, $||f||_n = \sup_{x\in X}(\sup(|a_{i,x}(f)|_p p^{-n}))$ où, au voisinage de sur la boule de centre x et de rayon p^{-n} les $a_{i,x}$ sont les coefficients du développement de f en série entière. Comme, dans $\mathbb{Q}_p^n$, deux boules de même rayon sont soit égales soit disjointes, le recouvrement par des boules de rayon p^{-n} est fini, le premier supremum est donc un maximum. Le deuxième est fini car si une série converge, son terme général tend vers 0.

On a $\mathcal{C}^{\mathrm{an}}(X, K) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, et les inclusions des A_n sont compactes, l'espace $\mathcal{C}^{\mathrm{an}}(X, K)$ est donc une limite inductive d'espaces de Banach qui est alors un espace de type compact.

Définition 1.6. Si V est de type compact et X ouvert de $\mathbb{Q}_p^d$, on définit $\mathcal{C}^{\mathrm{an}}(X, V)$ ainsi : si $V = \bigcup_n V_n$ et les V_n sont des espaces de Banach on pose : $\mathcal{C}^{\mathrm{an}}(X, V) = \bigcap_n \mathcal{C}^{\mathrm{an}}(X, V_n)$ (les restrictions) où $\mathcal{C}^{\mathrm{an}}(X, V_n)$ est définie comme les fonctions localement analytiques au sens des espaces de Banach.

1.3 Représentations localement analytiques

Définition 1.7. Soient G un sous-groupe compact de $\mathrm{GL}_d(\mathbb{Q}_p)$, et H un sous-groupe de G. Soit χ un caractère localement analytique à valeurs dans K :

$$\chi : H \to K^*.$$

Soit $V = \{f \in \mathcal{C}^{\mathrm{an}}(G, K) \mid f(gh) = \chi(h^{-1})f(g)\}$ qui est bien un espace de type compact.
On donne pour $g \in G$, $\rho_g(f) = x \to f(g^{-1}x)$
(V, ρ) est la représentation, localement analytique, de G induite par χ : on la note $\mathrm{Ind}_H^G(\chi)$.

Définition 1.8. Une représentation (V, ρ) d'un groupe G est *localement analytique* si V est un espace de type compact, pour tout $g \in G$, ρ_g est continue, et pour tout $v \in V$, $g \to \rho_g(v)$ est localement analytique sur G.

Définition 1.9. Une représentation est dite *topologiquement réductible* si elle admet une sous-représentation fermée, topologiquement irréductible sinon.

2 Position du problème

2.1 Problème posé

Soit $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ et $G_0 = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$, B l'Iwahori de G (le sous-groupe de G_0 des matrices triangulaires inférieures modulo p), P le sous-groupe de Borel de G (matrices triangulaires inférieures), $P_0 = P_0^+$ celui de G_0, P_0^- les matrices triangulaires supérieures de B, T le sous-groupe des matrices diagonales de G.
On a $T \subset P_0^+, P_0^- \subset B \subset G_0 \subset G$ et $T \subset P \subset G$.
On prend K une extension finie de $\mathbb{Q}_p$.
Remarque : en fait le résultat reste vrai pour $\mathbb{Q}_p \subset K \subset \mathbb{C}_p$ une extension de corps avec K sphériquement complet.
Soit $\chi : T \to K^\times$ un caractère localement analytique. On étend χ à P en posant $\chi(\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}) = \chi(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix})$.
(En fait on a ainsi tous les caractères localement analytiques de P.)
On cherche à étudier l'irréductibilité topologique de $\mathrm{Ind}_P^G(\chi)$.

$\rho_\chi : t \mapsto \chi(\begin{pmatrix} t^{-1} & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix})$ est un morphisme de $\mathbb{Q}_p^\times \to K^\times$ continu.

Proposition 2.1. *il existe $c(\chi) \in K$ tel que localement (pour t proche de 1), $\chi(\begin{pmatrix} t^{-1} & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}) = \exp(c(\chi)\log(t))$.*

Démonstration. Pour t proche de 1, on note $f = \log \circ \rho_\chi \circ \exp$ d'un voisinage ouvert de 1 dans K.

On a $f(u+v) = f(u) + f(v)$
Ainsi, sur $\mathbb{Q}$, $f(q) = f(1)q$. On a, pour t petit, par continuité de f, $f(t) = f(1)t$.
$\rho_\chi(t) = \exp \circ f \circ \log(t) = \exp(f(1)\log(t))$

□

On note aussi $\sigma_\chi : t \mapsto \chi\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix}\right)$.
On va démontrer le résultat suivant :

Théorème 2.2. $\mathrm{Ind}_P^G(\chi)$ *est topologiquement irréductible ssi $c(\chi) \notin -\mathbb{N}$.*

2.2 Simplification du problème

On cherche à étudier $\mathrm{Ind}_P^G(\chi)$; on va d'abord chercher à le décomposer en représentations plus simples.
Tout d'abord, comme $\mathbb{Q}_p = p^{-\mathbb{N}}\mathbb{Z}_p$, on a $G = G_0P$.

Proposition 2.3. *L'application de restriction $\mathrm{Ind}_P^G(\chi) \xrightarrow{\psi} \mathrm{Ind}_{P_0}^{G_0}(\chi)$ est un isomorphisme de G_0-représentations topologiques.*

Démonstration. En effet, si f appartient à $\mathrm{Ind}_{P_0}^{G_0}(\chi)$, on peut poser $\phi(f)(g_0p_0) = \chi(p_0)^{-1}f(g_0)$ pour $g_0 \in G_0, p_0 \in P$. Elle est bien définie car si $g_0p_0 = g_1p_1$ alors $g_0 = g_1p_1p_0^{-1}$ et $p_1p_0^{-1} \in P \cap G_0 = P_0$ donc $f(g_0) = \chi(p_1p_0^{-1})^{-1}f(g_1) = \chi(p_0)\chi(p_1)^{-1}f(g_1)$ donc $\chi(p_0)^{-1}f(g_0) = \chi(p_1)^{-1}f(g_1)$. On vérifie alors aisément que ψ et ϕ sont inverses l'une de l'autre, et sont des morphismes de

G_0-représentations. ψ est clairement continue, linéaire, bijective, c'est donc un homéomorphisme par propriété des espaces de types compacts.

$\square$

Il suffit donc d'étudier $\mathrm{Ind}_{P_0}^{G_0}(\chi)$.
On utilise alors la décomposition de Bruhat :

Proposition 2.4. *$G_0 = B \sqcup BwP_0$ (union disjointe) où $w = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.*

Démonstration. En effet, si $b_0 = \begin{pmatrix} a & pb \\ c & d \end{pmatrix} \in B$, $b_0 w = \begin{pmatrix} pb & -a \\ d & -c \end{pmatrix}$. Donc $Bw = \left\{ \begin{pmatrix} pa & b \\ c & d \end{pmatrix}, b, c \in \mathbb{Z}_p^\times \right\}$
Soit $g = \begin{pmatrix} pa & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} \in BwP_0$.
Alors $g = \begin{pmatrix} pa\alpha + b\beta & b\gamma \\ c\alpha + d\beta & d\gamma \end{pmatrix}$. Si $g \in B$, alors $b\gamma$ n'est pas inversible, donc soit b n'est pas inversible : $b = pb'$ mais alors $g = \begin{pmatrix} p(a\alpha + b'\beta) & pb'\gamma \\ c\alpha + d\beta & d\gamma \end{pmatrix}$ n'est pas dans G_0 : impossible, soit γ n'est pas inversible : $\gamma = p\gamma'$ mais alors $g = \begin{pmatrix} pa\alpha + b\beta & pb\gamma' \\ c\alpha + d\beta & pd\gamma' \end{pmatrix}$ n'est pas dans G_0 : impossible. Donc $B \cap BwP_0 = \emptyset$.
Soit maintenant $\begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix} \in G_0 \backslash B$. Alors $ZY - TX$ et Y sont inversibles.
De plus, $\begin{pmatrix} p & Y \\ Z - TY^{-1}(X-p) & T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ Y^{-1}(X-p) & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix}$, la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ Y^{-1}(X-p) & 1 \end{pmatrix}$ est un élément de P_0 et $\begin{pmatrix} p & Y \\ Z - TY^{-1}(X-p) & T \end{pmatrix} \in Bw$ car Y est inversible et $Z - TY^{-1}(X-p) = Y^{-1}(ZY - TX) + pTY^{-1}$ est inversible car $ZY - TX$ l'est. Donc $G_0 \backslash B \subset BwP_0$: $G_0 = B \cup CwP_0$.

$\square$

On peut en déduire la décomposition :

Proposition 2.5. $\mathrm{Ind}_{P_0}^{G_0}(\chi) = \mathrm{Ind}_{P_0^+}^{B}(\chi) \oplus \mathrm{Ind}_{P_0^-}^{B}(w\chi)$ *comme B-représentations topologiques, où $w\chi : x \in P_0^- \mapsto \chi(w^{-1}xw)$.*

Démonstration. $w\chi$ est bien défini car si $x = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in P_0^-$, $w^{-1}xw = \begin{pmatrix} c & 0 \\ -b & a \end{pmatrix}$ est un élément de P_0^+.
L'isomorphisme se fait via l'application

$$\psi : \left| \begin{array}{ccc} \mathrm{Ind}_{P_0}^{G_0}(\chi) & \longrightarrow & \mathrm{Ind}_{P_0^+}^{B}(\chi) \oplus \mathrm{Ind}_{P_0^-}^{B}(w\chi) \\ f & \longmapsto & f_{|B} \oplus x \mapsto f(xw) \end{array} \right.$$

qui est bien définie :
$f_{|B} \in \mathrm{Ind}_{P_0^+}^{B}(\chi)$ est évident.
$x \mapsto f(xw) \in \mathrm{Ind}_{P_0^-}^{B}(w\chi)$ car si $b \in B, p_0 \in P_0^-$, $f(bp_0w) = f(bww^{-1}p_0w) = \chi(w^{-1}p_0w)^{-1}f(bw) = w\chi(p_0)^{-1}f(bw)$.

ψ est évidemment un morphisme de B-représentations topologiques.
Soit :

$$\phi : \left| \begin{array}{rcl} \mathrm{Ind}_{P_0^+}^B(\chi) \oplus \mathrm{Ind}_{P_0^-}^B(w\chi) & \longrightarrow & \mathrm{Ind}_{P_0}^{G_0}(\chi) \\ f \oplus g & \longmapsto & h \end{array} \right.$$

où

$$h : \left| \begin{array}{rcl} G_0 & \longrightarrow & K \\ b \in B & \longmapsto & f(b) \\ bwp_0 \in BwP_0 & \longmapsto & \chi(p_0)^{-1}g(b) \end{array} \right.$$

L'application h est bien définie, d'une part par décomposition de Bruhat, et car si $b_0wp_0 = b_1wp_1 \in BwP_0$, alors $b_0 = b_1wp_1p_0^{-1}w^{-1}$, donc $wp_1p_0^{-1}w^{-1} \in P_0^-$, donc $g(b_0) = w\chi(wp_1p_0^{-1}w^{-1})^{-1}g(b_1) = \chi(p_1p_0^{-1})^{-1}g(b_1) = \chi(p_0)\chi(p_1)^{-1}g(b_1)$ d'où $\chi(p_0)^{-1}g(b_0) = \chi(p_1)^{-1}g(b_1)$.
On a bien $h \in \mathrm{Ind}_{P_0}^{G_0}(\chi)$, car B et BwP_0 sont tous les deux stables par multiplication à droite par P_0, donc si $x \in g_0$ et $p_0 \in P_0$:
si $xp_0 \in B$, alors $x \in B$ et $h(xp_0) = f(xp_0) = \chi(p_0)^{-1}f(x) = \chi(p_0)^{-1}h(x)$.
si $xp_0 \in BwP_0$, alors $x = bwp_1 \in BwP_0$ donc $h(xp_0) = \chi(p_1p_0)^{-1}g(b) = \chi(p_0)^{-1}\chi(p_1)^{-1}g(b) = \chi(p_0)^{-1}h(bwp_1) = \chi(p_0)^{-1}h(x)$.
On vérifie alors facilement que ϕ et ψ sont inverses l'une de l'autre. De même que précédemment, ψ est un homéomorphisme, donc un isomorphisme de G_0-représentations topologiques.

□

2.3 Réduction à $\mathcal{C}^{\mathrm{an}}(\mathbb{Z}_p, K)$

Proposition 2.6. *$B/P_0^- \simeq \mathbb{Z}_p$ (bijection) et*

$$\iota : \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{Z}_p & \longrightarrow & B \\ b & \longmapsto & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

est une section de $B \longrightarrow B/P_0^-$ (attention, $P_0^- \ntriangleleft B$).

Démonstration. Posons $H = \iota(\mathbb{Z}_p)$ (ι est un isomorphisme $\mathbb{Z}_p \longrightarrow H$)
Soit $\begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix} \in B$ ($Y \in p\mathbb{Z}_p,\ X, T \in \mathbb{Z}_p^\times$).
Alors $\begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ ZX^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & Y \\ 0 & T - ZX^{-1}Y \end{pmatrix}$, et on a $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ ZX^{-1} & 1 \end{pmatrix} \in H$ et $\begin{pmatrix} X & Y \\ 0 & T - ZX^{-1}Y \end{pmatrix} \in P_0^-$, car $X \in \mathbb{Z}_p^\times$, et $T - ZX^{-1}Y \in \mathbb{Z}_p^\times$ car $T \in \mathbb{Z}_p^\times$ et $Y \in p\mathbb{Z}_p$.
De plus $H \cap P_0^- = \{1\}$ donc cette décomposition est unique (Si $hp_0 = h'p_1$, alors $h'^{-1}h = p_1p_0^{-1} \in H \cap P_0^-$)
On pose $\pi\left(\begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ ZX^{-1} & 1 \end{pmatrix}$ et $\tau\left(\begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} X & Y \\ 0 & T - ZX^{-1}Y \end{pmatrix}$.
Soit alors :

$$j : \left| \begin{array}{rcl} B/P_0^- & \longrightarrow & H \\ bP_0^- & \longmapsto & \pi(b) \end{array} \right.$$

Cette application est bien définie car si $bP_0^- = b'P_0^-$, alors $b' = bp_0$ avec $p_0 \in P_0^-$. Donc $\pi(b')\tau(b') = \pi(b)\tau(b)p_0$, mais $\tau(b)p_0 \in P_0^-$, donc par unicité $\pi(b') = \pi(b)$.

La fonction j est surjective car si $h \in H$, $\pi(h) = h$.
Elle est injective car si $\pi(b) = \pi(b')$, alors

$$\begin{aligned} b &= \pi(b)\tau(b) \\ &= \pi(b')\tau(b) \\ &= \pi(b')\tau(b')\tau(b')^{-1}\tau(b) \\ &= b'\tau(b')^{-1}\tau(b) \end{aligned}$$

et $\tau(b')^{-1}\tau(b) \in P_0^-$, donc $bP_0^- = b'P_0^-$.

□

Corollaire 2.7. $\mathrm{Ind}_{P_0^-}^B(\chi) \simeq \mathcal{C}^{\mathrm{an}}(\mathbb{Z}_p, K)$ *comme K-espaces vectoriels topologiques, et l'action de $\mathbb{Z}_p \overset{\iota}{\hookrightarrow} B$ sur $\mathcal{C}^{\mathrm{an}}(\mathbb{Z}_p, K)$ induite par cet isomorphisme est simplement l'action de translation.*

Démonstration. Soient

$$\psi : \left| \begin{array}{ccc} \mathrm{Ind}_{P_0^-}^B(\chi) & \longrightarrow & \mathcal{C}^{\mathrm{an}}(\mathbb{Z}_p, K) \\ f & \longmapsto & f \circ \iota \end{array} \right.$$

et

$$\phi : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^{\mathrm{an}}(\mathbb{Z}_p, K) & \longrightarrow & \mathrm{Ind}_{P_0^-}^B(\chi) \\ f & \longmapsto & \big(b \mapsto \chi(\tau(b))^{-1} f \circ \iota^{-1} \circ \pi(b)\big) \end{array} \right.$$

- Il est clair que ψ est bien définie, linéaire, continue.

- ϕ est bien définie, car si $f \in \mathcal{C}^{\mathrm{an}}(\mathbb{Z}_p, K)$, $b \in B$, $p_0 \in P_0^-$, $bp_0 = \pi(b)\tau(b)p_0$ donc $\pi(bp_0) = \pi(b)$ et $\tau(bp_0) = \tau(b)p_0$ par unicité.
  Donc $\phi(f)(bp_0) = \chi(\tau(bp_0))^{-1} f(\iota^{-1}(\pi(bp_0))) = \chi(\tau(b)p_0)^{-1} f(\iota^{-1}(\pi(b))) = \chi(p_0)^{-1}\chi(\tau(b))^{-1} f(\iota^{-1}(\pi(b))) = \chi(p_0)^{-1}\phi(f)(b)$.

- ϕ est clairement linéaire, continue.

- ϕ et ψ sont inverses l'une de l'autre :
  $\phi \circ \psi(f)(b) = \chi(\tau(b))^{-1} f \circ \iota \circ \iota^{-1} \circ \pi(b) = \chi(\tau(b))^{-1} f(\pi(b)) = f(b)$ car $f \in \mathrm{Ind}_{P_0^-}^B(\chi)$.
  $\psi \circ \phi(g)(z) = \chi(\tau(\iota(z)))^{-1} g \circ \iota^{-1} \circ \pi(\iota(z)) = g \circ \iota^{-1}(\iota(z)) = g(z)$.

L'action de $\mathbb{Z}_p \overset{\iota}{\hookrightarrow} B$ sur $\mathcal{C}^{\mathrm{an}}(\mathbb{Z}_p, K)$ induite par cet isomorphisme est donnée par $z.f(x) = \iota(z).f(x) = f(x - z)$ (cf. partie suivante)

□

3 Critère nécessaire

Théorème 3.1. *Si $c(\chi) \in -\mathbb{N}$, alors $\mathrm{Ind}_P^G(\chi)$ n'est pas topologiquement irréductible.*

On va même dans ce cas décrire explicitement une sous-représentation propre.

Démonstration. On se place dans le cas $c(\chi) \in -\mathbb{N}$. Pour $f \in \mathrm{Ind}_P^G(\chi)$, en tout point $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$, on peut écrire pour $x = \begin{pmatrix} t_1 & t_2 \\ t_3 & t_4 \end{pmatrix}$ assez petit :

$$f(g+x) = \sigma_\chi(\det(g+x)) \sum_{m \in \mathbb{N}^4} \alpha_m(f,g) t_1^{m_1} t_2^{m_2} t_3^{m_3} t_4^{m_4}$$

On pose W le sous-espace des $f \in \mathrm{Ind}_P^G(\chi)$ telles que pour tout $g \in G$ et $m \in \mathbb{N}^4$, si $m_2 + m_4 > c(\chi)$ alors $\alpha_m(f,g) = 0$.

W est une sous-G-représentation de $\mathrm{Ind}_P^G(\chi)$: soit $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$ et $f \in W$, montrons que $g^{-1}.f \in W$. Soit $x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$ et $h = \begin{pmatrix} h_1 & h_2 \\ h_3 & h_4 \end{pmatrix}$ proche de x. Lorsque gh est assez proche de gx (et pour cela il suffit d'avoir h assez proche de x), on peut écrire le développement en gx de f :

$$\begin{aligned}
g^{-1}.f(h) &= f(gh) \\
&= f\left(\begin{pmatrix} ah_1 + bh_3 & ah_2 + bh_4 \\ ch_1 + dh_3 & ch_2 + dh_4 \end{pmatrix}\right) \\
&= \sigma_\chi(\det gh) \sum_{m \in \mathbb{N}^4} \alpha_m(f, gx) \cdot (a(h_1 - x_1) + b(h_3 - x_3))^{m_1} \\
&\qquad \cdot (a(h_2 - x_2) + b(h_4 - x_4))^{m_2} \\
&\qquad \cdot (c(h_1 - x_1) + d(h_3 - x_3))^{m_3} \\
&\qquad \cdot (c(h_2 - x_2) + d(h_4 - x_4))^{m_4} \\
&= \sigma_\chi(\det h) \sum_{m \in \mathbb{N}^4} \sigma_\chi(\det g) \alpha_m(f, gx) \cdot (a(h_1 - x_1) + b(h_3 - x_3))^{m_1} \\
&\qquad \cdot (a(h_2 - x_2) + b(h_4 - x_4))^{m_2} \\
&\qquad \cdot (c(h_1 - x_1) + d(h_3 - x_3))^{m_3} \\
&\qquad \cdot (c(h_2 - x_2) + d(h_4 - x_4))^{m_4}.
\end{aligned}$$

Les termes non nuls en $(h_2 - x_2)$ et $(h_4 - x_4)$ proviennent uniquement des termes $(a(h_2 - x_2) + b(h_4 - x_4))^{m_2}$ et $(c(h_2 - x_2) + d(h_4 - x_4))^{m_4}$, donc sont de degrés inférieurs ou égaux à $c(\chi)$ car $f \in W$.
Donc $g^{-1}.f \in W$.

Montrons maintenant que W est une sous-représentation propre.

Tout d'abord, $W \neq 0$.
En effet regardons :

$$f : \begin{cases} G & \longrightarrow & K \\ g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \longmapsto & \sigma_\chi(\det g)\rho_\chi(d^{-1}\det g) \end{cases}$$

f est bien localement analytique car β_χ, det et ρ_χ le sont.
De plus si $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$ et $p_0 = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & z \end{pmatrix} \in P$,

$$\begin{aligned} f(gp_0) &= f\left(\begin{pmatrix} ax+by & bz \\ cx+dz & dz \end{pmatrix}\right) \\ &= \sigma_\chi(\det gp_0)\rho_\chi((dz)^{-1}\det gp_0) \\ &= \sigma_\chi(p_0)\rho_\chi(z^{-1}\det p_0)f(g) \\ &= \chi(p_0)^{-1}f(g). \end{aligned}$$

Donc $f \in \mathrm{Ind}_P^B(\chi)$.
On a de plus $f \in W$, car ρ_χ est localement proportionnelle à l'élévation à la puissance $c(\chi) \in -\mathbb{N}$.

De plus, $W \neq \mathrm{Ind}_P^B(\chi)$.
En effet, sinon $W \cap \mathrm{Ind}_{P_0^-}^B(w\chi) = \mathrm{Ind}_{P_0^-}^B(w\chi) = \mathcal{C}^{\mathrm{an}}(\mathbb{Z}_p, K)$. Or via l'isomorphisme $\mathrm{Ind}_{P_0^-}^B(w\chi) = \mathcal{C}^{\mathrm{an}}(\mathbb{Z}_p, K)$, $W \cap \mathrm{Ind}_{P_0^-}^B(w\chi)$ s'envoie sur les fonctions localement polynômiales de degré au plus $-c(\chi)$, mais il existe des fonctions de $\mathcal{C}^{\mathrm{an}}(\mathbb{Z}_p, K)$ qui ne le sont pas (l'élévation à la puissance $1 - c(\chi)$ par exemple). $\square$

4 Critère suffisant

4.1 Dualité

Pour étudier ces représentations, on va maintenant s'intéresser à leur dual : On note tout d'abord, pour $H = \mathbb{Z}_p$ ou H sous-groupe de G, $\mathcal{C}^{\mathrm{an}}(H,K)$ l'espace vectoriel des fonctions localement analytiques de H dans K, et $D(H,K)$ son dual.

On admettra le résultat suivant :

> *Si H est compact, $D(H,K)$ est un espace de Fréchet pour la topologie forte.*

Pour une preuve, voir [Sch05].

On va munir $D(H,K)$ du produit de convolution de la manière suivante :

Produit de convolution

Proposition 4.1. *On pose pour $f_1, f_2 \in C^{an}(H,K)$, $(f_1 \times f_2)(g_1, g_2) = f_1(g_1).f_2(g_2)$. On a une unique application bilinéaire*

$$\hat{\otimes} : D(H,K) \times (H,K) \to D(H \times H, K)$$

telle que, pour tout $f_1, f_2 \in C^{an}(H,K)$

$$(\lambda \hat{\otimes} \mu)(f_1 \times f_2) = \lambda(f_1).\mu(f_2).$$

Cette application est continue par rapport à chacune des variables.

Démonstration. On prendra H compact.

On va commencer par montrer que $A = \mathrm{Vect}(\{f_1 \times f_2 | f_1, f_2 \in \mathcal{C}^{\mathrm{an}}(H,K)\})$ est dense dans $\mathcal{C}^{\mathrm{an}}(H,K)$

On remarque que les fonctions polynômes sont denses dans les séries entières. L'espace engendré par $\{P_1 \times P_2 \in K[X_1, \cdots, X_{2n}] \mid P_1, P_2 \in K[X_1, \cdots, X_n]\}$ est $K[X_1, \cdots, X_{2n}]$

Soit $f \in \mathcal{C}^{\mathrm{an}}(H,K)$, soit $U_1, \cdots U_k$ une subdivision de H telle que f soit une série entière sur chacun de U_i. Comme H est strictement paracompact, car ultramétrique, (cf [Sch05]) on peut affiner cette subdivision en $V_1, \cdots, V_r$ telle que les V_i soient deux à deux disjoints.

Soit $\varepsilon > 0$,

On approche à ε près f sur chacun des V_i par un polynôme P_i. On pose :

$$g : \left| \begin{array}{ccc} H & \longrightarrow & K \\ x & \longmapsto & P_i(x) \,\mathrm{si}\, x \in V_i \end{array} \right.$$

g approche f à ε près, et g est bien dans A.

Comme on s'interesse à des distribution continues, on a bien l'existence et l'unicité de $\lambda \hat{\otimes} \mu$.

La continuité par rapport à chacune des variables est claire.

$\square$

Soit $m : H \times H \to H$ la multiplication dans H. On pose

$$m_* : \left| \begin{array}{rcl} D(H \times H, K) & \longrightarrow & D(H, K) \\ \lambda & \longmapsto & \lambda(f \circ m) \end{array} \right.$$

Comme m est continue, m_* l'est aussi.

Définition 4.1. On définit le *produit de convolution* sur $D(H, K)$ par :

$$* := m_* \circ \hat{\otimes} \quad (= f \mapsto \hat{\otimes}(\lambda, \mu)(f \circ m))$$

Proposition 4.2. *Munie de la convolution, $D(H, K)$ est une algèbre associative. La convolution est continue par rapport aux deux coordonnées. Par ailleurs, si H est compact, $D(H, K)$ est une algèbre de Fréchet.*

Démonstration. Associativité :

$$\begin{array}{rcl} \lambda \hat{\otimes} \mu(f_1 \times f_2) & = & \lambda(f_1)\mu(f_2) \\ & = & \lambda(\mu(f_2)f_1) \\ & = & \lambda(g \mapsto \mu(f_2)f_1(g)) \\ & = & \lambda(g \mapsto \mu(f_1(g)f_2)) \\ & = & \lambda(g \mapsto \mu(f_1 \times f_2(g, .))) \end{array}$$

$(\lambda, \mu) \mapsto f \mapsto \lambda(g \mapsto \mu(f(g, .)))$ est encore linéaire continue, elle coïncide avec $\lambda \hat{\otimes} \mu$ sur un sous-espace dense, elle est donc égale à $\lambda \hat{\otimes} \mu$.

Avec ceci $\lambda * \mu(f) = \lambda(g \mapsto \mu(f(g.)))$. Avec cette expression, l'associativité est claire. $\square$

Corollaire 4.3. $\lambda * \mu(f) = \lambda\Big(g \mapsto \mu\big(f(g.)\big)\Big)$

Éléments de $D(H, K)$, actions du groupe de Lie Les éléments les plus simples de $D(H, K)$ sont les δ_x, pour $x \in H$ tels que : $\delta_x : \left| \begin{array}{rcl} C^{an}(H, K) & \longrightarrow & K \\ f & \longmapsto & f(x) \end{array} \right.$.
On remarquera que δ_1 est l'élément neutre pour la convolution.

Nous allons construire de éléments particuliers de $D(H, K)$ grâce à l'action de l'algèbre de Lie (notée $\mathfrak{g}$) de G.
$\mathfrak{g}$ agit sur $\mathcal{C}^{\mathrm{an}}(H, K)$ (si H est un sous-groupe ouvert compact) par

$$(\mathfrak{x}f)(g) = \frac{d}{dt} f(\exp(-t\mathfrak{x})g)_{|t=0}$$

En effet, pour t suffisamment petit, $\exp(-t\mathfrak{x})$ est proche de 1 et donc dans H. Ceci s'écrit également

$$\mathfrak{x}f = \lim_{t \to 0} \frac{\exp(t\mathfrak{x})f - f}{t}$$

où $hf = (g \mapsto f(h^{-1}g))$ pour $h \in H$ qui est l'action par translation de H sur $\mathcal{C}^{\mathrm{an}}(H, K)$

Par ailleurs, $\mathfrak{g}$ agit sur $D(H, K)$ par $\mathfrak{x}\lambda(f) = \lambda(-\mathfrak{x}f)$
Réécrivons :

$$\mathfrak{x}\lambda(f) = \lim_{t \to 0} \frac{\exp(t\mathfrak{x})\lambda - \lambda}{t}(f)$$

On a, pour $h \in H, \lambda \in D(H,K)$, $h\lambda(f) = (\delta_h * \lambda)(f)$ Ceci nous donne :

$$\mathfrak{x}\lambda = \lim_{t\to 0}\left(\frac{\delta_{\exp t\mathfrak{x}} - \delta_1}{t} * \lambda\right)$$

Par continuité de la convolution par rapport à la première variable, on obtient :

$$\mathfrak{x}\lambda = \left(\lim_{t\to 0}\frac{\delta_{\exp(t\mathfrak{x})} - \delta_1}{t}\right) * \lambda = (\mathfrak{x}\delta_1) * \lambda$$

Ceci nous donne :

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \hookrightarrow & D(H,K) \\ \mathfrak{x} & \mapsto & \mathfrak{x}\delta_1 \end{array}$$

Ceci s'étend à une inclusion de $U(\mathfrak{g})$ par propriété universelle.

Par ailleurs, on a également :

$$\begin{array}{ccc} H & \hookrightarrow & D(H,K) \\ g & \mapsto & \delta_g \end{array}$$

Dualité des représentations On a également une structure de $D(H,K)$-module sur V' le dual topologique de V donnée par :
$\lambda * \mu(v) = \lambda(g \mapsto \mu(g^{-1}.v))$. Sous cette forme, il est clair que c'est bien une action. Par ailleurs, la définition est cohérente car $\mu \mapsto \mu(g^{-1}.v)$ est bien localement analytique.

Proposition 4.4. *Si V' est irréductible en tant que $D(G,K)$-module, alors V est topologiquement irréductible.*

Démonstration. Soit W une sous-représentation propre fermée de V. V/W est bien de type compact car il reste limite inductive d'espaces de Banach. Cette représentation est bien localement analytique (les développements en série au voisinage d'un point passent bien au quotient). On a alors un morphisme $V \xrightarrow{\pi} V/W$ de G-représentations.
On a donc un morphisme de $D(H,K)$-modules $(V/W)' \to V'$ défini par $\lambda \mapsto \lambda \circ \pi$. C'est un morphisme de $D(H,K)$-modules car $\lambda * \psi(\mu) = v \mapsto \lambda(g \mapsto \mu(\pi(g^{-1}.v))) = v \mapsto \lambda(g \mapsto \mu(g^{-1}.\pi(v))) = (\lambda * \mu) \circ \pi = \psi(\lambda * \mu)$.
Mais $\psi((V/W)')$ est donc un sous-$D(H,K)$-module de V', propre car W était propre. □

On définit :

$$M_\chi = \left(\mathrm{Ind}_{P_0}^{G_0}(\chi)\right)'$$

$$M_\chi^- = \left(\mathrm{Ind}_{P_0^-}^{B}(\chi)\right)'$$

$$M_\chi^+ = \left(\mathrm{Ind}_{P_0^+}^{B}(\chi)\right)'$$

On a alors :

$$M_\chi = M_\chi^+ \oplus M_{w\chi}^-$$

comme $D(B,K)$-modules.

4.2 Transformée de Fourier

On va construire ici la transformée de Fourier sur $D(\mathbb{Z}_p, K)$.

Soit $X_r(L) = \{x \in L | \, |x| < r\}$ et $X(L) = X_1(L)$ la boule unité ouverte dans L pour une extension L de $\mathbb{Q}_p$ contenue dans $\mathbb{C}_p$)

Pour $z \in X(\mathbb{C}_p)$ on définit pour $a \in \mathbb{Z}_p$:

$$\kappa_z(a) = (1+z)^a = \sum_{n \geq 0} \binom{a}{n} z^n$$

Comme on a $|\binom{a}{n}|_p \leq 1$ et $|z|_p < 1$, le terme général tends vers 0 et donc la série converge pour tout $a \in \mathbb{Z}_p$. Cela définit un caractère localement analytique. On a bien $\kappa_z(1) - 1 = z$.

Par ailleurs, si $z \in K$, κ_z est localement K analytique.

On a ainsi une inclusion :

$$\begin{array}{ccc} X(k) & \hookrightarrow & \mathcal{C}^{\mathrm{an}}(\mathbb{Z}_p, K) \\ z & \rightarrow & \kappa_z \end{array}$$

Pour $\lambda \in D(\mathbb{Z}_p, K)$ on définit la transformée de Fourier comme suit :

$$F_\lambda(z) = \lambda(\kappa_z)$$

Proposition 4.5. *F_λ coïncide avec une unique série entière convergente dans $X(\mathbb{C}_p)$.*

Démonstration. La famille $(\binom{a}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, ainsi $\lambda(\binom{a}{n})$ est bornée. On a alors $\sum_{n \geq 0} \lambda \binom{a}{n} z^n$ converge pour $z < 1$. □

Posons :

$$\mathcal{O}(X) = \{F(T) = \sum_{n \geq 0} a_n T^n | a_n \in K, \; F \text{ converge sur } X(\mathbb{C}_p)\}$$

Théorème 4.6 (Amice)**.** *L'application*

$$\begin{array}{ccc} D(\mathbb{Z}_p, K) & \overset{\cong}{\to} & \mathcal{O}(X) \\ \lambda & \mapsto & F_\lambda \end{array}$$

est un isomorphisme d'algèbres de Fréchet.

On admettra ce théorème. Pour une preuve, voir [Sch99].

4.3 Théorème de Lazard

On pose $G_K = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$.

On appelle X l'ensemble des G_K-orbites dans $X(\overline{K})$ et X_r l'ensemble des G_K-orbites dans $X_r(\overline{K})$

Définition 4.2. Un *diviseur effectif* sur X_r est une application de $X_r \to \mathbb{N}$ à support fini. On a l'ordre partiel sur les diviseurs : $D \leq D'$ ssi pour tout $x \in X_r, \; D(x) \leq D'(x)$.

Définition 4.3. À chaque $F \in \mathcal{O}(X_r)$, on associe un diviseur (F) défini par $(F)(x) = k$ où k est la multiplicité de x en tant que zéro de F.

Définition 4.4.

$$Div^+(X) = \left\{ D : X \to \mathbb{N} | D_{|X_r} \text{ est un diviseur effectif} \right\}$$

Ce qui donne naturellement :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{O}(X) \setminus \{0\} & \to & Div^+(x) \\ F & \mapsto & (F) \end{array}$$

Proposition 4.7. *soient $F, F' \in \mathcal{O}(X) \setminus \{0\}$, alors $F|F'$ ssi $(F) \leq (F')$, en particulier, si $(F) = (F')$, on a $F' = uF$ avec $u \in \mathcal{O}(X)$ inversible.*

Démonstration. On admettra ce résultat. Pour une preuve, voir [Sch99]. □

Théorème 4.8. *(Lazard)*

1. *$F \mapsto (F)$ de $\mathcal{O}(X) \setminus \{0\} \to Div^+(x)$ est surjective.*
2. *La fonction*

$$\begin{array}{rcl} Div^+(X) & \to & \{\text{idéaux fermés non vides de } \mathcal{O}(X)\} \\ D & \mapsto & I_D = \{F \in \mathcal{O}(X) | (F) \geq D\} \cup \{0\} \end{array}$$

   est une bijection.

3. *L'adhérence d'un idéal non vide $I \subseteq \mathcal{O}(X)$ est exactement l'idéal $I_{D(I)}$ où $D(I)(x) = \min_{F \in I} (F)(x)$.*
4. *Dans $\mathcal{O}(X)$ l'ensemble des idéaux finiment engendrés, l'ensemble des idéaux fermés et l'ensemble des idéaux principaux coïncident.*

Démonstration. On admettra ce théorème. Pour une preuve voir [Sch99] □

4.4 Irréductibilité algébrique de M_χ^-

4.4.1 Réduction à $D(\mathbb{Z}_p, K)$

Proposition 4.9. *$M_\chi^- \simeq D(\mathbb{Z}_p, K)$ comme K-espace vectoriel, l'action de $D(\mathbb{Z}_p, K) \hookrightarrow D(B, K)$ sur $D(\mathbb{Z}_p, K)$ induite par cet isomorphisme est simplement la multiplication d'algèbre, et l'action de $B \hookrightarrow D(B, K)$ sur $D(\mathbb{Z}_p, K)$ est $b.\lambda(f) = \lambda(b.f)$.*

Démonstration. L'énoncé dual du corollaire 2.7 est : $M_\chi^- = D(\mathbb{Z}_p, K)$.
On a $D(\mathbb{Z}_p, K) \hookrightarrow D(B, K)$ par $\beta : \lambda \mapsto (f \mapsto \lambda(f|_H \circ \iota))$.
L'action de $D(\mathbb{Z}_p, K) \hookrightarrow D(B, K)$ sur $D(\mathbb{Z}_p, K)$ est :
$\lambda.\mu(f) = \lambda(z\lambda(g \mapsto \mu(\delta_g.f)) \mapsto \mu(\delta_z.f)) = \lambda(z \mapsto \mu(x \mapsto f(zx))) = \lambda * \mu(f)$.
□

4.4.2 Calculs préliminaires

Proposition 4.10. *On peut décrire explicitement l'action de certains éléments :*

1. *Action de B sur $\mathcal{C}^{\mathrm{an}}(\mathbb{Z}_p, K)$: si $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in B$ et $f \in \mathcal{C}^{\mathrm{an}}(\mathbb{Z}_p, K)$, alors*

$$g^{-1}.f(x) = \rho_\chi(a+bx)\sigma_\chi(\det g^{-1}) f\left(\frac{c+dx}{a+bx}\right)$$

En particulier, l'action de $\mathbb{Z}_p$ sur $\mathcal{C}^{\mathrm{an}}(\mathbb{Z}_p, K)$ est l'action de translation :

$$u.f(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -u & 1 \end{pmatrix}^{-1}.f(x) = f(x-u)$$

On a aussi :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}.f(x) = \sigma_\chi(u) f(u^{-1}x)$$

On peut passer à la transformée de Fourier :

2. $$F_{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}.\lambda}(T) = \sigma_\chi(u)^{-1} F_\lambda((1+T)^u - 1)$$

On peut décrire l'action de certains éléments du groupe de Lie de B sur $\mathcal{C}^{\mathrm{an}}(B, K)$:

3. *Soit* $\mathfrak{u}^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Lie}(B)$. *Alors :*

$$\mathfrak{u}^+.f(x) = -\frac{df}{dx}(x)$$

4. *Soit* $\mathfrak{u}^- = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Lie}(B)$. *Alors :*

$$\mathfrak{u}^-.f = -c(\chi)\Theta(f) - \Theta^2(\mathfrak{u}^+ f)$$

où on a posé

$$\Theta(f)(x) = xf(x)$$

5. *On a*

$$(\mathfrak{u}^-)^m = (-1)^m \sum_{i=0}^{m} c_i^{(m)} \Theta^{m+i} \circ (\mathfrak{u}^+)^i$$

où

$$c_i^{(m)} = \frac{n!}{i!}\binom{c(\chi)-i}{n-i}$$

On passe à la transformée de Fourier :

6. *De plus*

$$F_{\mathfrak{u}^+.\lambda}(T) = \log(1+T) F_\lambda(T)$$

7. *En outre*

$$F_{\lambda\circ\Theta}(T) = \Delta F_\lambda(T)$$

où

$$\Delta F(T) = (1+T)\frac{dF}{dT}(T)$$

8. *D'autre part*

$$F_{(\mathrm{u}^-)^m.\lambda}(T) = (-1)^m \sum_{i=0}^{m} c_i^{(m)} (\log(1+T))^i \Delta^{m+i} F_\lambda(T)$$

Démonstration. Voir l'annexe. □

4.4.3 Irréductibilité

Théorème 4.11. *Si $c(\chi) \notin \mathbb{N}$, alors M_χ^- est (algébriquement) irréductible.*

Démonstration. Une sous-représentation propre de M_χ^- correspond, via la transformée de Fourier, à un idéal (car $D(\mathbb{Z}_p, K) \subset D(B, K)$ agit par multiplication sur $D(\mathbb{Z}_p, K)$) de $\mathcal{O}(X)$, invariant par l'action de $D(B, K)$.
On va considérer une sous-représentation non nulle, qui correspond donc à un idéal non nul de $\mathcal{O}(X)$, et montrer qu'alors $I = \mathcal{O}(X)$.

Pour cela, on va commencer par trouver un élément $F \in I$ dont tous les zéros sont dans μ_∞, puis on va le perturber en faisant agir $D(B, K)$ dessus, afin d'obenir un autre élément $F^c \in I$, dont tous les zéros sont dans $X \setminus \mu_\infty$. D'après le théorème de Lazard, on aura alors $< F, F^c >$ est finiment engendré, donc fermé, donc est égal à son adhérence qui vaut $\mathcal{O}(X)$ car F et F^c n'ont pas de zéro commun, ce qui concluera la preuve.

Pour pouvoir construire l'élément F, on va commencer par montrer le résultat suivant :

Proposition 4.12. *I est engendré par des éléments dont tous les zéros sont dans μ_∞.*

Démonstration. Soit $F \in I\setminus\{0\}$. On pose Z l'ensemble des zéros de F, et $Z_0 = Z \setminus Z \cap \mu_\infty$. On va perturber l'élément F en utilisant l'action des éléments $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}$

On pose $f(u, z) = (1+z)^u - 1$ pour $z \in Z_0$, $u \in \mathbb{Z}_p^\times$. Pour tout $z \in Z_0$, $u \mapsto f(u, z)$ est injective. En effet, si $(1+z)^u - 1 = (1+z)^v - 1$, alors $(1+z)^{u-v} = 1$ donc $(u-v)\log(1+z) = 0$. Or $z \notin \mu_\infty$ car $z \in Z_0$, donc $\log(1+z) \neq 0$ donc $u = v$.

On veut montrer qu'il existe $u \in \mathbb{Z}_p^\times$ tel que $f(u, Z_0) \cap Z_0 = \emptyset$.

Supposons par l'absurde que ce soit faux. Alors pour tout $u \in \mathbb{Z}_p^\times$, $\exists z, z' \in Z_0$ tels que $f(u, z) = z'$. Mais par injectivité, pour tout tel couple z, z', il existe au plus un $v \in \mathbb{Z}_p^\times$ tel que $f(v, z) = z'$, et $Z_0 \times Z_0$ est dénombrable, mais $\mathbb{Z}_p^\times$ est indénombrable : contradiction.

On dispose donc de $u \in \mathbb{Z}_p^\times$ tel que $f(u, Z_0) \cap Z_0 = \emptyset$. Alors si Z' est l'ensemble des zéros de $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}.F$, on a $Z \cap Z' \subset \mu_\infty$.

En effet, soit $z \in Z \cap Z'$. Si $z \notin \mu_\infty$, $z \in Z_0$. De plus il existe $z' \in Z$ tel que $z = f(u, z')$, soit $1 + z = (1 + z')^u$, donc $\log(1 + z) = u \log(1 + z')$. Or $z \notin \mu_\infty$ donc $z' \notin \mu_\infty$, d'où $z \in Z_0 \cap f(u, Z_0) = \emptyset$: impossible.

D'après le théorème de Lazard, $< F, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}.F >$ est principal, et donc engendré par un élément dont tous les zéros sont dans μ_∞. Ceci étant vrai pour tout $F \in I$, I est engendré par des éléments dont tous les zéros sont dans μ_∞. □

Soit $x_0, x_1, \ldots$ une suite dans X décrivant les orbites par le groupe de Galois de K des points de μ_∞.

On va construire un élément $F \in I \backslash \{0\}$ et une suite d'entiers $m_0 < m_1 < \ldots$ tels que le support de (F) et contenu dans $x_0, x_1, \ldots$ et $(F)(x_k) = m_k$.

Pour cela on part d'un élément $F_{-2} \in I \backslash \{0\}$ dont tous les zéros sont dans μ_∞ (un tel élément existe d'après la proposition précédente). Soit $0 < m_1 < m_2 < \ldots$ tels que pour tout k, $m_k \geq (F_{-2})(x_k)$. On définit ensuite le diviseur D à support dans $x_1, x_2, \ldots$ par $D(x_k) = m_k - (F_{-2})(x_k)$. D'après le théorème de Lazard, il existe $F_{-1} \in I$ telle que $(F_{-1}) = D$. On pose alors $F = F_{-2}F_{-1}$, F vérifie bien les conditions précédentes.

On va maintenant perturber l'élément F comme annoncé, et pour cela on va utiliser l'action de $\mathfrak{u}^-$.

On sait que $\log(1 + T)$ a une multiplicité exactement 1 en chaque x_k. De plus si $(H)(x) > 0$, alors $(\Delta(H))(x) = (H)(x) - 1$, donc si $(H)(x) \geq m$, alors $(\Delta^m(H))(x) = (H)(x) - m$. Écrivons l'action de $(\mathfrak{u}^-)^m$ modulo $\log(1 + T)$:

$$(\mathfrak{u}^-)^m.H(T) = c_0^{(m)} \Delta^m H(T) \pmod{\log(1 + T)\mathcal{O}(X)}$$

et $c_0^{(m)} \neq 0$ car $c(\chi) \notin \mathbb{N}$.
Donc la multiplicité de x_k dans $(\mathfrak{u}^-)^{m_k}.H$ vaut 0, et que la multiplicité de x_j pour $j > k$ est strictement positive, car $m_j > m_k$.

On va construire par récurrence une suite d'éléments $F_k = b_0(\mathfrak{u}^-)^{m_0}F + \cdots + b_k(\mathfrak{u}^-)^{m_k}F$ avec les b_k dans K, vérifiant la propriété suivante : la multiplicité de $x_0, \ldots, x_k$ dans F_k est nulle. La multiplicité de x_{k+1} dans F_k est strictement positive d'après ce qui précède, et on veut imposer de plus que pour tout k, $|b_k| \leq p^{-m_k^2}$.

On prend $b_0 = 1$, F_0 vérifie alors la propriété voulue.

Supposons qu'on a construit F_k. On sait que la multiplicité de x_{k+1} dans F_k est strictement positive, mais sa multiplicité dans $(\mathfrak{u}^-)^{m_{k+1}}F$ est nulle, donc il suffit de prendre $b_{k+1} \neq 0$ pour avoir la condition sur x_{k+1}. Pour les $x_j,\ j < k$, leur multiplicité dans F_k est nulle, donc si leur multiplicité dans $(\mathfrak{u}^-)^{m_{k+1}}F$ est strictement positive cela n'impose pas de condition sur b_{k+1}, et si leur multiplicité dans $(\mathfrak{u}^-)^{m_{k+1}}F$ est nulle, ça n'ajoute quand même qu'un nombre fini de valeurs interdites pour b_{k+1}. Il suffit donc de choisir $|b_{k+1}| \leq p^{-m_{k+1}^2}$ en évitant un nombre fini de cas, ce qui est possible. On a ainsi construit $Fk+1$ vérifiant les propriétés voulues.

La condition $|b_k| \leq p^{-m_k^2}$ implique que la série

$$\sum_k b_k(\mathfrak{u}^-)^{m_k}$$

converge dans $D(B,K)$ vers un élément $\mathfrak{u}_\infty$, qui donne $F^c = \mathfrak{u}_\infty.F = \lim_{k\to\infty} F_k$.

Or par construction, la multiplicité de x_k dans F_k est nulle, mais sa multiplicité dans $F^c - F_k$ est strictement positive, donc sa multiplicité dans F^c est nulle : le support de (F^c) est entièrement contenu dans $X\ \mu_\infty$, ce qui conclut comme on l'a vu.

$\square$

On admet le résultat suivant, dont la preuve est exactement la même que pour M_χ^- :

Théorème 4.13. *Si $c(\chi) \notin -\mathbb{N}$, alors M_χ^+ est algébriquement irréductible.*

4.5 Non isomorphisme de M_χ^- et $M_{w\chi}^+$

On rappelle que $M_\chi^- = \left(\mathrm{Ind}_{P_0^-}^B(\chi)\right)'$.

Proposition 4.14.

$$M_\chi^- \cong D(B,K) \otimes_{D(P_0^-,K)} \chi^{-1}$$

comme $D(B,K)$-module à gauche, où χ^{-1} est K vu comme $D(P_0^-,K)$ module par l'action : $\lambda.x = \lambda(\chi^{-1})x$. Et $D(P_0^-,K)$ agit sur $D(B,K)$ par produit(de convolution) à droite.

Démonstration. Soient $\phi,\ \psi$ tels que :

$$\psi : \left| \begin{array}{rcl} D(B,K) \otimes_{D(P_0^-,K)} \chi^{-1} & \longrightarrow & M_\chi^- \\ \lambda \otimes x & \longmapsto & x\lambda \end{array} \right.$$

$$\phi : \left| \begin{array}{rcl} M_\chi^- & \longrightarrow & D(B,K) \otimes_{D(P_0^-,K)} \chi^{-1} \\ \lambda & \longmapsto & \left(f \mapsto \varphi^{-1}(\lambda)\left(z \mapsto f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{pmatrix}\right)\right) \otimes 1 \end{array} \right.$$

où

$$\varphi : \left| \begin{array}{rcl} D(\mathbb{Z}_p,K) & \longrightarrow & M_\chi^- \\ \lambda & \longmapsto & f \mapsto \varphi^{-1}(\lambda)\left(z \mapsto f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{pmatrix}\right) \end{array} \right.$$

est l'isomorphisme du corollaire 3.11.

Montrons que ψ est un morphisme.
Soit $f \in \mathrm{Ind}_{P_0^-}^B(\chi)$.

$$: \left| \begin{array}{ccc} P_0^- \times B & \longrightarrow & K \\ (h,g) & \longmapsto & f(gh) = \chi^{-1}(h) f(g) \end{array} \right. = f \times \chi^{-1}$$

Ainsi on a, pour $\lambda \in D(B,K),\ \mu \in D(P_0^-,K),\ \lambda * \mu(f) = \mu(\chi^{-1})\lambda(f)$.

$$\begin{array}{rcl} \psi(\lambda * \mu \otimes x)(f) & = & x\lambda * \mu(f) \\ & = & \mu(\chi^{-1}) x \lambda(f) \\ & = & \psi(\lambda \otimes \mu.x) \end{array}$$

Montrons que ϕ est un morphisme.
Soit $\nu \in D(P_0^+,K)$.
$\phi(\lambda * \nu) = \mu' \otimes 1$ où $\mu' = \varphi^{-1}(\lambda * \nu)(z \mapsto f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{pmatrix}\right)$

$$\begin{array}{rcl} \mu'(f) & = & \varphi^{-1}(\lambda) * \varphi^{-1}(\nu)\left(z \mapsto f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{pmatrix}\right)\right) \\ & = & \varphi^{-1}(\lambda)\left(z \mapsto \varphi^{-1}(\nu)\left(y \mapsto f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z+y & 1 \end{pmatrix}\right)\right) \\ & = & \varphi^{-1}(\lambda)\left(z \mapsto \nu\left(h \mapsto f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{pmatrix} h\right)\right)\right) \end{array}$$

par définition de φ.
Posons $\mu = \left(f \mapsto \varphi^{-1}(\lambda)\left(z \mapsto f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{pmatrix}\right)\right)\right)$. On a bien : $\mu' = \mu * \nu$. Ce qui est exactement $\phi(\nu.\lambda) = \nu.\phi(\lambda)$.

Montrons maintenant que ϕ et ψ sont inverses l'un de l'autre.

$$\begin{array}{rcl} \psi \circ \phi(\lambda) & = & \psi\left(\left(f \mapsto \varphi^{-1}(\lambda)\left(z \mapsto f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{pmatrix}\right)\right)\right) \otimes 1\right) \\ & = & f \mapsto \varphi^{-1}(\lambda)\left(z \mapsto f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{pmatrix}\right)\right) \\ & = & \lambda \end{array}$$

par construction de φ.

$$\begin{array}{rcl} \phi \circ \psi(\lambda \otimes x) & = & \phi(x\lambda) \\ & = & \left(f \mapsto x\varphi^{-1}(\lambda)\left(z \mapsto f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{pmatrix}\right)\right) \otimes 1 \\ & = & \left(f \mapsto \varphi^{-1}(\lambda)\left(z \mapsto f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{pmatrix}\right) * x\delta_1\right) \otimes 1 \\ & = & \left(f \mapsto \varphi^{-1}(\lambda)\left(z \mapsto f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{pmatrix}\right)\right) \otimes x\delta_1.1 \\ & = & \lambda \otimes x\delta_1(\chi^{-1}) \\ & = & \lambda \otimes x\chi^{-1}(1) \\ & = & \lambda \otimes x \end{array}$$

Ainsi ϕ et ψ sont des isomorphismes et $\phi = \psi^{-1}$.

□

Proposition 4.15. $\mathrm{Hom}_{D(B,K)}(M_\chi^-, M_\chi^+) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{D(P_0^-,K)}(\chi^{-1}, M_{\chi'}^+)$. *(En fait on a même l'égalité)*

Démonstration. Soit $B \in \mathcal{B}_{D(B,K)}(D(B,K) \times \chi^{-1}, M_{\chi'}^+)$.

On a $B(1,.) \in \mathrm{Hom}_{D(P_0^-,K)}(\chi^{-1}, M_{\chi'}^+)$. Par ailleurs, si $B(1,.) = B'(1,.)$ on a bien $B = B'$ car B et B' sont $D(B,K)$ invariantes. $\square$

Proposition 4.16. $\mathrm{Hom}_{D(P_0^-,K)}(\chi^{-1}, M_{\chi'}^+) = \{0\}$

Démonstration. Soit $L \in \mathrm{Hom}_{D(P_0^-,K)}(\chi^{-1}, M_{\chi'}^+)$.

On a : $L(\lambda.1) = \lambda * L(1)$ et $L(\lambda.1) = L(\lambda(\chi^{-1})) = \lambda(\chi^{-1})L(1)$.

En passant à la transformée de Fourier on a pour tout $\lambda \in D(P_0^-, K)$:

$$F_{\lambda * L(1)}(T) = \lambda(\chi^{-1})F_{L(1)}(T)$$

Pour $\lambda = \delta_{\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ u & 1\end{smallmatrix}\right)}$, on obtient :

$$F_{\lambda * L(1)}(T) = (1+T)^u F_{L(1)}(T) = \lambda(\chi^{-1})F_{L(1)}(T)$$

Ainsi $F_{L(1)} = 0$ donc (par injectivité de la transformée de Fourier) $L(1) = 0$ et $L = 0$. $\square$

Ainsi, M_χ^- et $M_{\chi'}^+$ ne sont pas isomorphes.

4.6 Fin de la preuve

Proposition 4.17. *Si $c(\chi) \notin -\mathbb{N}$, alors M_χ est algébriquement irréductible.*

Démonstration. Soit $W \neq 0$ un sous-$D(G,K)$-module de M_χ.

On a vu que $M_\chi = M_\chi^- \oplus M_{w\chi}^+$ comme $D(B,K)$-modules, que M_χ^- et $M_{w\chi}^+$ sont simples (car $c(w\chi) = -c(\chi)$) et que M_χ^- et $M_{w\chi}^+$ ne sont pas isomorphes. On note π^- et π^+ les projecteurs respectivement sur M_χ^- et $M_{w\chi}^+$ parallèlement à l'autre espace. Ce sont des morphismes de $D(B,K)$-modules.

M_χ est semi-simple, donc W l'est aussi. On peut donc écrire $W = \bigoplus_{j\in J} V_j$ avec V_j sous-$D(B,K)$-module irréductible de M_χ.

Considérons un V_j, posons $W_j^\pm = \pi^\pm$.

1. Si $W_j^+ = W_j^- = 0$ alors $V_j = 0$: non.
2. Si $W_j^+ = M_{w\chi}^+$ et $W_j^- = M_\chi^-$, alors $\pi^-|_{V_j}$ est un isomorphisme de V_j dans M_χ^-, et de même pour π^+, donc $M_{w\chi}^+$ et M_χ^- sont isomorphes : impossible. Donc l'un des $W_j^\pm$ est nul et pas l'autre. Supposons (par symétrie) que $W_j^+ = 0$:
3. Si $W_j^+ = 0$ et $W_j^- = M_\chi^-$ alors $V_j \subset \ker \pi^+ = M_\chi^-$, d'où $V_j = M_\chi^-$.

Conclusion : $V_j = M_\chi^-$ ou $V_j = M_{w\chi}^+$, d'où $W = M_\chi^-$ ou $W = M_{w\chi}^+$ ou $W = M_\chi$.

Comme l'action de $\delta_w \in D(B,K)$ ne respecte pas la décomposition $M_\chi = M_\chi^- \oplus M_{w\chi}^+$, $W = M_\chi$.

$\square$

Proposition 4.18. *Si* $c(\chi) \notin -\mathbb{N}$, *alors* $\mathrm{Ind}_{P_0}^{G_0}(\chi)$ *est topologiquement irréductible.*

Démonstration. Le résultat précedent et la proposition 4.4 donnent immédiatement le résultat. $\square$

5 Annexe : calculs d'actions

Preuve de la proposition 4.10 :

Démonstration. 1. Si $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in B,\ x \in \mathbb{Z}_p$, alors

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{c+dx}{a+bx} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a+bx & b \\ 0 & \frac{\det g}{a+bx} \end{pmatrix}$$

d'où

$$\begin{aligned} g^{-1}.f(x) &= f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix}\right) \\ &= f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{c+dx}{a+bx} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a+bx & b \\ 0 & \frac{\det g}{a+bx} \end{pmatrix}\right) \\ &= \chi\left(\begin{pmatrix} a+bx & b \\ 0 & \frac{\det g}{a+bx} \end{pmatrix}\right)^{-1} f(\frac{c+dx}{a+bx}) \\ &= \rho_\chi(a+bx)\sigma_\chi(\det g^{-1}) f\left(\frac{c+dx}{a+bx}\right) \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} F_{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u \end{smallmatrix}\right).\lambda}(T) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}.\lambda(\kappa_T) \\ &= \lambda\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u^{-1} \end{pmatrix}.\kappa_T\right) \\ &= \lambda(x \mapsto \sigma_\chi(u)^{-1}\kappa_T(ux)) \\ &= \sigma_\chi(u)^{-1}\lambda(x \mapsto (1+T)^{ux}) \\ &= \sigma_\chi(u)^{-1}\lambda(x \mapsto ((1+T)^u)^x) \\ &= \sigma_\chi(u)^{-1}\lambda(\kappa_{(1+T)^u-1}) \\ &= \sigma_\chi(u)^{-1}F_\lambda((1+T)^u-1) \end{aligned}$$

3. $f(\exp(-\mathfrak{u}^+ t)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix}) = f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -t & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix}\right) = f(x-t)$.
Donc $\mathfrak{u}^+.f(x) = -\frac{df}{dx}(x)$.

4. Pour t assez petit on a :

$$\begin{aligned}
f\left(\exp(-\mathfrak{u}^- t)\begin{pmatrix}1 & 0\\ x & 1\end{pmatrix}\right) &= f\left(\begin{pmatrix}1 & -t\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ x & 1\end{pmatrix}\right)\\
&= f\left(\begin{pmatrix}1-tx & -t\\ x & 1\end{pmatrix}\right)\\
&= f\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ \frac{x}{1-tx} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1-tx & -t\\ 0 & \frac{1}{1-tx}\end{pmatrix}\right)\\
&= \rho_\chi(1-tx)f(\frac{x}{1-tx})\\
&= \exp(c(\chi)\log(1-tx))f(\frac{x}{1-tx})\\
&= \exp(-c(\chi)tx+o(t))f(x+tx^2+o(t))\\
&= (1-c(\chi)tx+o(t))(f(x)+tx^2\frac{df}{dx}(x)+o(t))\\
&= f(x)+(-c(\chi)xf(x)+x^2\frac{df}{dx}(x))t+o(t)
\end{aligned}$$

Donc $\mathfrak{u}^-.f(x) = -c(\chi)xf(x)+x^2\frac{df}{dx}(x)$.

5. On a

$$\begin{aligned}
c_i^{(m)}(c(\chi)-m-i)+c_{i-1}^{(m)} &= \frac{m!}{i!}\binom{c(\chi)-i}{m-i}(c(\chi)-m-i)+\frac{m!}{(i-1)!}\binom{c(\chi)-i+1}{m-i+1}\\
&= \frac{m!}{i!}\binom{c(\chi)-i}{m-i}(c(\chi)-m-i)+i\frac{c(\chi)-i+1}{m-i+1}\frac{m!}{i!}\binom{c(\chi)-i}{m-i}\\
&= \frac{m!}{i!}\binom{c(\chi)-i}{m-i}\frac{1}{m-i+1}(c(\chi)m-c(\chi)i+c(\chi)\\
&\quad -m^2+im-m-im+i^2-i+ic(\chi)-i^2+i)\\
&= \frac{m!}{i!}\binom{c(\chi)-i}{m-i}\frac{1}{m-i+1}(c(\chi)m+c(\chi)-m^2-m)\\
&= \frac{m!}{i!}\binom{c(\chi)-i}{m-i}\frac{(m+1)(c(\chi)-m)}{m-i+1}\\
&= c_i^{(m+1)}
\end{aligned}$$

On a aussi :

$$c_0^{(m)}(c(\chi)-m) = c_0^{m+1}.$$

De plus il est clair que :

$$\mathfrak{u}^+\Theta^m = -m\Theta^{m-1}+\Theta^m\mathfrak{u}^+.$$

On va montrer par récurrence que $(\mathfrak{u}^-)^m = (-1)^m\sum_{i=0}^m c_i^{(m)}\Theta^{m+i}\circ(\mathfrak{u}^+)^i$.
C'est évident au rang $m=0$.

De plus par récurrence :

$$
\begin{aligned}
(\mathfrak{u}^-)^{m+1} &= \mathfrak{u}^- \circ (\mathfrak{u}^-)^m \\
&= \mathfrak{u}^- \circ (-1)^m \sum_{i=0}^{m} c_i^{(m)} \Theta^{m+i} \circ (\mathfrak{u}^+)^i \\
&= (-1)^m \sum_{i=0}^{m} c_i^{(m)} \mathfrak{u}^- \circ \Theta^{m+i} \circ (\mathfrak{u}^+)^i \\
&= (-1)^m \sum_{i=0}^{m} c_i^{(m)} (-c(\chi)\Theta - \Theta^2 \circ \mathfrak{u}^+) \circ \Theta^{m+i} \circ (\mathfrak{u}^+)^i \\
&= (-1)^{m+1} \left(\sum_{i=0}^{m} c_i^{(m)} c(\chi)\Theta \circ \Theta^{m+i} \circ (\mathfrak{u}^+)^i \right. \\
&\quad \left. + \sum_{i=0}^{m} c_i^{(m)} \Theta^2 \circ \mathfrak{u}^+ \circ \Theta^{m+i} \circ (\mathfrak{u}^+)^i \right) \\
&= (-1)^{m+1} \left(\sum_{i=0}^{m} c_i^{(m)} c(\chi)\Theta^{m+i+1} \circ (\mathfrak{u}^+)^i \right. \\
&\quad \left. + \sum_{i=0}^{m} c_i^{(m)} \Theta^2 \circ (-(m+i)\Theta^{m+i-1} + \Theta^{m+i}\mathfrak{u}^+) \circ (\mathfrak{u}^+)^i \right) \\
&= (-1)^{m+1} \left(\sum_{i=0}^{m} c_i^{(m)} c(\chi)\Theta^{m+i+1} \circ (\mathfrak{u}^+)^i \right. \\
&\quad + \sum_{i=0}^{m} c_i^{(m)} \Theta^2 \circ (-m-i)\Theta^{m+i-1} \circ (\mathfrak{u}^+)^i \\
&\quad \left. + \sum_{i=0}^{m} c_i^{(m)} \Theta^2 \circ \Theta^{m+i}\mathfrak{u}^+ \circ (\mathfrak{u}^+)^i \right) \\
&= (-1)^{m+1} \left(\sum_{i=0}^{m} c_i^{(m)} c(\chi)\Theta^{m+i+1} \circ (\mathfrak{u}^+)^i \right. \\
&\quad + \sum_{i=0}^{m} c_i^{(m)} (-m-i)\Theta^{m+i+1} \circ (\mathfrak{u}^+)^i \\
&\quad \left. + \sum_{i=0}^{m} c_i^{(m)} \Theta^{m+i+2} (\mathfrak{u}^+)^{i+1} \right) \\
&= (-1)^{m+1} \left(\sum_{i=1}^{m+1} (c_i^{(m)}(c(\chi) - m - i) + c_{i-1}^{(m)}) \Theta^{(m+1)+i} \circ (\mathfrak{u}^+)^i \right. \\
&\quad \left. + (c_0^{(m)}(c(\chi) - m))\Theta^{m+1} \right) \\
&= (-1)^{m+1} \left(\sum_{i=1}^{m+1} c_i^{(m+1)} \Theta^{(m+1)+i} \circ (\mathfrak{u}^+)^i + (c_0^{(m+1)})\Theta^{m+1} \right) \\
&= (-1)^{m+1} \sum_{i=0}^{m+1} c_i^{(m+1)} \Theta^{(m+1)+i} \circ (\mathfrak{u}^+)^i
\end{aligned}
$$

6. $F_{\mathfrak{u}^+.\lambda}(T) = \mathfrak{u}^+.\lambda(\kappa_T) = \lambda(-\mathfrak{u}^+.\kappa_T) = \lambda(\frac{d\kappa_T(x)}{dx}) = \lambda(\log(1+T)\kappa_T) = \log(1+T)F_\lambda(T)$.
7. $F_{\lambda\circ\Theta}(T) = \lambda\circ\Theta(\kappa_T) = \lambda(x \mapsto x\kappa_T(x)) = \lambda(x \mapsto (1+T)x\kappa_T(x-1)) = (1+T)\lambda(\frac{d\kappa_T}{dT}) = (1+T)\frac{d(\lambda(\kappa_T))}{dT} = \Delta F_\lambda(T)$.
8. Immédiat en appliquant la transformée de Fourier à 5. et en utilisant 6. et 7.

$\square$

Références

[Dia99] Bertin Diarra. Analyse p-adique. 1999.

[Sch99] Peter Schneider. The 1999 britton lectures at mcmaster university on "p-adic representation theory". 1999.

[Sch05] Peter Schneider. *Nonarchimedian functional analysis.* Springer Monographs in Mathematics, 2005.

[Sch07] Peter Schneider. p-adic analysis and lie groups. 2007.

[ST02] Peter Schneider and Jeremy Teitelbaum. Locally analytic distributions and p-adic representation theory, with applications to GL_2. *AMS*, 2002.