Partiel de Topologie du 13 novembre 2017

Exercice 1

Soit une application continue $f : [0,1] \to [0,1]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note f^n la fonction obtenue en composant n fois la fonction f avec elle-même.

0. Montrer que si f est monotone, alors pour tout $x \in [0,1]$, la suite $(f^n(x))_n$ a au plus deux valeurs d'adhérence.

On suppose dorénavant que $f(x) = 4x(1-x)$. Nous allons montrer qu'il existe une partie G_δ-dense G de $[0,1]$ telle que pour tout $x \in G$ et tout $y \in [0,1]$, y est valeur d'adhérence de la suite $(f^n(x))_n$.

1. Soit $(x_n)_n$ une suite de $[0,1]$. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(x_n)_n$ est $[0,1]$ si et seulement si $\{x_n / \ n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[0,1]$.

2. Soient un espace métrique complet X et pour tout $n \in \mathbb{N}$, une application continue $T_n : X \to X$. On suppose que pour tout ouverts non-vides U et V de X, il existe $n \in \mathbb{N}$, tel que $T_n(U) \cap V \neq \emptyset$.

   (a) Montrer que si $(O_m, m \in \mathbb{N})$ est une base d'ouverts de X, alors $G := \cap_{m\in\mathbb{N}} \cup_{n\in\mathbb{N}} T_n^{-1}(O_m)$ est un G_δ-dense de X.

   (b) Montrer que pour tout $x \in G$ défini comme ci-dessus, $\{T_n(x) / \ n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans X.

3. Soit $S^1 = \{z \in \mathbb{C} / \ |z| = 1\}$ le cercle unité muni de la topologie de sous-espace de $\mathbb{C}$. Soient les applications $g : S^1 \to S^1$ et $h : S^1 \to [0,1]$ données par $g(z) = z^2$ et $h(e^{i\theta}) = \sin^2\theta$. On admet que $f \circ h = h \circ g$.

   (a) Montrer que pour tout ouvert non-vide U de S^1, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $g^n(U) = S^1$.

   (b) Montrer que pour tout ouvert non-vide V de $[0,1]$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $f^n(V) = [0,1]$.

4. Conclure.

Exercice 2

Considérons les parties suivantes de $\mathbb{R}^2$: le demi-plan supérieur $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \ y \geqslant 0\}$, l'axe des abscisses $A = \{(x, 0) / \ x \in \mathbb{R}\}$ et $P' := P \setminus A$.

Soit d la distance euclidienne de $\mathbb{R}^2$. Pour tout $z \in \mathbb{R}^2$ et $r > 0$, on note $D_r(z) \subset \mathbb{R}^2$ la boule ouverte centrée en z de rayon r pour d. Si $z \in P$, on note

$$D'_r(z) = \begin{cases} D_r(z) \cap P' & \text{si } z \in P', \\ \{z\} \cup (D_r(z) \cap P') & \text{si } z \in A. \end{cases}$$

1. (a) Montrer que $\mathcal{B} := \left\{D'_r(z) / \ z \in P \text{ et } r > 0\right\}$ est la base d'une topologie de P. Cette topologie sera notée $\mathcal{T}$ dans la suite de l'exercice.
   (b) Montrer que $\mathcal{T}$ est plus fine que la topologie usuelle.
2. Montrer que
   (a) la topologie de P' induite par $\mathcal{T}$ est la topologie usuelle,
   (b) la topologie de A induite par $\mathcal{T}$ est la topologie discrète.
3. Soit K une partie de P compacte pour la topologie $\mathcal{T}$. Montrer que
   (a) $K \cap A$ est fini,
   (b) K est compact pour la topologie usuelle.
4. Réciproquement, montrer que si K est une partie de P compacte pour la topologie usuelle et qui intersecte A en un nombre fini de points, alors K est compact pour la topologie $\mathcal{T}$.

Problème

Soit X un espace topologique séparé. On définit les notions suivantes:

- X est *régulier* si pour tout $x \in X$ et ouvert U de X contenant x, il existe un ouvert V de X tel que $x \in V$ et $\overline{V} \subset U$.
- une partie A de X est *métrisable* si A munie de sa topologie de sous-espace est métrisable.
- X est *localement métrisable* si tout point de X admet un voisinage métrisable

Le but des quatre questions suivantes est de montrer que si X est régulier, localement métrisable et admet une base dénombrable d'ouverts, alors X est métrisable.

1. Soit U un ouvert de X tel que $\overline{U}$ soit métrisable. Montrons qu'il existe une application continue $f : X \to [0,1]$ telle que $f^{-1}(\{0\}) = X \setminus U$. Pour ce faire on pose

$$f(x) = \begin{cases} \min(1, d(x, \partial U)) \text{ si } x \in \overline{U} \\ 0 \text{ si } x \notin \overline{U} \end{cases}$$

   où d est une distance de $\overline{U}$ et ∂U est la frontière de U. Vérifier que cette application répond bien à la question.

2. Montrer que si X est régulier, localement métrisable et admet une base dénombrable d'ouverts, alors X admet une base d'ouverts $(U_i,\ i \in \mathbb{N})$ telle que pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\overline{U}_i$ est métrisable.

3. Soit $(U_i,\ i \in \mathbb{N})$ une base d'ouverts de X et pour tout $i \in \mathbb{N}$ soit $f_i : X \to [0,1]$ une application continue telle que $f_i^{-1}(\{0\}) = X \setminus U_i$. On définit l'application

$$f : X \to [0,1]^{\mathbb{N}}, \qquad f(x) := (f_i(x))_{i \in \mathbb{N}}$$

   et on munit $[0,1]^{\mathbb{N}}$ de la topologie produit et $f(X)$ de la topologie de sous-espace. Montrer que

   (a) f est continue,
   (b) f est injective,
   (c) pour tout i, $f(U_i)$ est un ouvert de $f(X)$,
   (d) pour tout ouvert U de X, $f(U)$ est un ouvert de $f(X)$.

   En déduire que f se restreint en un homéomorphisme de X sur $f(X)$.

4. Conclure.

Discutons à présent les hypothèses. On rappelle qu'un espace topologique est *séparable* si il admet une partie dénombrable dense.

5. Montrer qu'un espace métrique est régulier.

6. Montrer qu'un espace métrique est séparable si et seulement si il admet une base dénombrable d'ouverts.

Rappels

1. Si X est un espace topologique, une base d'ouverts de X est un ensemble $\mathcal{B}$ de parties ouvertes de X tel que tout ouvert de X est réunion d'éléments de $\mathcal{B}$.

2. Si A est une partie d'un espace topologique, on note $\overline{A}$ son adhérence, $\mathring{A}$ son intérieur et $\partial A = \overline{A} \setminus \mathring{A}$ sa frontière.

3. Une partie G d'un espace topologique est un G_δ si G est une intersection dénombrable d'ouverts.

4. Si (X, d) est un espace métrique, la distance d'un point $x \in X$ à une partie A de X est par définition

$$d(x, A) := \inf\{d(x, y) / \ y \in A\}.$$