1. Soient A un anneau commutatif et B une A-algèbre (non nécessairement commutative). On note ε l'image de X dans $A[X]/(X^2)$ et $A[\varepsilon] = A[X]/(X^2)$.

(a) Montrer que $B \otimes_A A[\varepsilon]$ est un B-module libre de base $1 \otimes 1$, $1 \otimes \varepsilon$. On note $B[\varepsilon] = B \otimes_A A[\varepsilon]$.

(b) Soit C une A-algèbre. Montrer que les morphismes de A-algèbres $B \to C[\varepsilon]$ sont en bijection avec les couples (f, D), où $f\colon B \to C$ est un morphisme de A-algèbres et $D\colon B \to C$ est une f-*dérivation*, c'est-à-dire une application A-linéaire qui vérifie

$$D(xy) = D(x)f(y) + f(x)D(y)$$

pour tous x, y dans B.

(c) Une *dérivation de* B est une id_B-dérivation. Montrer que les dérivations de l'algèbre tensorielle $T(M)$ sur un A-module M sont en bijection canonique avec les morphismes de A-modules de M dans $T(M)$.

(d) Supposons que B est une A-algèbre commutative. Montrer que l'ensemble des dérivations de B admet une structure naturelle de B-module. Montrer que si B est l'algèbre symétrique sur un A-module libre de rang fini n, ce module est libre de rang n.

2. Déterminer le groupe de Galois des équations suivantes :

(a) $t^4 + 4t^3 + 2t^2 + 3t - 5$ sur $\mathbb{Q}$;

(b) $t^3 - 3\lambda t - \lambda - \lambda^2 = 0$ sur $\mathbb{C}(\lambda)$, où λ est une indéterminée ;

(c) $t^6 - 3t^2 + 1 = 0$ sur $\mathbb{Q}$;

(d) $t^6 - 4t^2 - 1 = 0$ sur $\mathbb{Q}$.

3. (a) Déterminer l'entier positif minimal n tel que le corps de décomposition L du polynôme $X^n - 1$ sur $\mathbb{Q}$ contient une sous-extension E de degré 3. Montrer que cette sous-extension est unique.

(b) Montrer que E est galoisienne et exhiber un polynôme irréductible unitaire à coefficients entiers dont c'est le corps de décomposition.

4. Soient K un corps et L une extension finie normale de K. Montrer qu'il existe une sous-extension E de L telle que L est galoisienne sur E et les éléments de E n'appartenant pas à K sont tous inséparables sur K.