Année 2015–2016

FIMFA – Probabilités

Partiel (2 heures)

Sans document et sans calculatrice.

Cette épreuve comporte 1 question de cours, 2 exercices et 1 problème indépendants.
Nous rappelons la formule de Stirling: $n! \sim (n/e)^n \sqrt{2\pi n}$.

Question de cours:
a) Donner la définition de la loi d'une variable aléatoire X.
b) Enoncer le théorème de Paul Levy fort.

Exercice 1: Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite infinie de v.a. i.i.d. qui suivent toutes la loi uniforme sur $[0,1]$.
A) Soit $\alpha > 0$ et posons

$$\forall n \geq 1 \qquad U_n = \frac{1}{n^\alpha \sqrt{1-X_n}}.$$

1) Montrer que $(U_n)_{n\geq 1}$ converge vers 0 en probabilité.
2) Montrer que $(U_n)_{n\geq 1}$ converge vers 0 au sens L^1.
3) Discuter selon α la convergence presque sûre de $(U_n)_{n\geq 1}$.
B) Posons

$$\forall n \geq 1 \qquad Y_n = \frac{X_n}{X_{n+1}+n}.$$

1) Soit $n \geq 1$. Quelle est la loi de Y_n? Que vaut $E(Y_n)$?
2) Les variables aléatoires Y_n, $n \geq 1$, sont–elles indépendantes?
3) Les variables aléatoires Y_{2n}, $n \geq 1$, sont–elles indépendantes?
4) Montrez que $(Y_n)_{n\geq 1}$ converge presque sûrement vers 0.
5) Soit $\alpha > 0$ et posons $V_n = n^\alpha Y_n$ pour $n \geq 1$. Discuter selon α la convergence presque sûre de $(V_n)_{n\geq 1}$.

Exercice 2: Soit X une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $[0,1]$.
1) Trouver une fonction réelle ψ telle que $Y = \psi(X)$ suive la loi exponentielle de paramètre 1.
2) Soit $p_1 \in [0,1]$. Construire une fonction réelle ψ_1 telle que $Y_1 = \psi_1(X)$ suive la loi de Bernoulli de paramètre p_1.
3) Soit $p_2 \in [0,1]$ tel que $p_1 < p_2$. Construire une fonction réelle ψ_2 telle que $Y_2 = \psi_2(X)$ suive la loi de Bernoulli de paramètre p_2 et telle que $P(Y_1 \leq Y_2) = 1$.
4) Soient toujours $p_1 < p_2$ deux réels de $[0,1]$. Est–il possible de construire deux fonctions ψ_1, ψ_2 telles que $Y_i = \psi_i(X)$ suive la loi de Bernoulli de paramètre p_i pour $i = 1,2$ et que Y_1 et Y_2 soient indépendantes?

The excitement that a gambler feels when making a bet is equal to the amount he might win times the probability of winning it.
Blaise Pascal

Problème: Soit p un nombre réel dans $]0,1[$. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite infinie de v.a. indépendantes qui suivent toutes la loi de Bernoulli de paramètre p:

$$\forall n\in\mathbb{N}\qquad P(X_n=-1)=1-p\,,\quad P(X_n=+1)=p\,.$$

Nous considérons la marche aléatoire

$$S_0=0\,,\qquad \forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}\qquad S_n\;=\;X_1+\cdots+X_n\,.$$

1) Quelle est la loi de S_n pour n fixé? Que valent $E(S_n)$ et $\mathrm{Var}(S_n)$?
2) Soit $k\in\mathbb{Z}$. Donnez un équivalent, lorsque n tend vers l'infini, de $P(S_{2n}=2k)$.
3) Soit $M\in\mathbb{N}$. Calculez la limite $\lim_{n\to\infty}P(|S_n|\le M)$.
Définissons

$$I\;=\;\inf\{\,S_n:n\in\mathbb{N}\,\}\,,\qquad S\;=\;\sup\{\,S_n:n\in\mathbb{N}\,\}\,.$$

4) Montrez que I et S sont des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}\cup\{-\infty,+\infty\}$.
5) a) Montrez que pour tout $M\in\mathbb{N}$,

$$\forall n\in\mathbb{N}\qquad P(-M\le I\le S\le M)\;\le\;P(|S_n|\le M)\,.$$

b) En déduire que $P(I=-\infty \text{ ou } S=+\infty)=1$.
6) **Dans cette question, nous supposons que $P(S=+\infty)<1$.**
a) Montrez qu'il existe $k\in\mathbb{N}$ tel que $P(S=k)>0$.
b) Montrez que si $P(S=k)>0$ pour un certain $k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$, alors $P(S=k-1)>0$.
c) En déduire que $P(S=0)>0$.
Dans les questions 7 et 8 nous supposons que $p\neq 1/2$.
7) a) Donnez un équivalent, lorsque n tend vers l'infini, de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
b) Montrez que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ passe un nombre fini de fois par 0 avec probabilité 1.
c) Discutez selon p les valeurs de $P(I=-\infty)$ et $P(S=+\infty)$.
8) Nous posons

$$U_0=0\,,\qquad \forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}\qquad U_n\;=-X_2-\cdots-X_{2n}\,,$$
$$V_0=2\,,\qquad \forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}\qquad V_n\;=2\,+\,X_1+\cdots+X_{2n-1}\,.$$

a) Montrez que les suites $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont indépendantes l'une de l'autre. Comment les décririez–vous sans formules?
b) Montrez que si $p>1/2$, alors $P(\exists n\in\mathbb{N}\quad U_n=V_n)\;<\;1$.
c) Dans le cas $p<1/2$, que vaut $P(\exists n\in\mathbb{N}\quad U_n=V_n)$?
Dans toute la fin du problème, nous étudions le cas symétrique $p=1/2$.
9) Evaluez la probabilité de l'événement $A_n\;=\;\{\,S_1<1,\,\ldots,\,S_{n-1}<1,\,S_n=1\,\}$.
10) En déduire la probabilité pour que la marche aléatoire $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ passe par 1.
11) Notons T_1 le premier instant de visite de la marche aléatoire $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en 1:

$$T_1\;=\;\inf\{\,n\ge 1:S_n=1\,\}\,.$$

Quelle est la loi de T_1? Calculez $E(T_1)$.
12) M. Dupont et M. Durand sont coincés dans une embouteillage sur une route à deux voies. M. Dupont est dans la file de gauche et M. Durand dans la file de droite. Chacun observe les mouvements de la voiture de l'autre.
a) Comment modéliser l'évolution de leur position relative?
b) M. Dupont finira–t–il par dépasser M. Durand? Si oui, quel est le temps moyen pour que cela arrive? Qu'en dites–vous?

Life is a school of probability. Walter Bagehot