Année 2014–2015

FIMFA – Probabilités

Partiel (2 heures)

Sans document et sans calculatrice.

Cette épreuve comporte 2 questions de cours, 2 exercices et 1 problème indépendants.

Questions de cours:
1) Enoncez le théorème central limite.
2) Enoncez le lemme de Borel–Cantelli.

Exercice 1: Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite infinie de v.a. indépendantes qui suivent la loi uniforme sur $[0,1]$. Posons, pour $n \in \mathbb{N}$, $Y_n = (X_n)^n$.
1) Calculer la loi de Y_n pour $n \in \mathbb{N}$.
2) Montrez que la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 en probabilité.
3) Montrez que la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans L^1.
4) Montrez que la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge p.s.

Exercice 2: *Direction aléatoire en dimension 3*
Soit $V = (X,Y,Z)$ un vecteur aléatoire dans $\mathbb{R}^3$ dont la loi a pour densité par rapport à la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^3$

$$f(x,y,z) = \begin{cases} 3/(4\pi) & \text{si } x^2+y^2+z^2 \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1) Les variables X et Y sont–elles indépendantes?
2) Calculez $E(|XY|)$.

On note (R,Θ,Φ) les coordonnées sphériques de V. Rappelons que les coordonnées sphériques (r,θ,ϕ) d'un vecteur $v = (x,y,z)$ de $\mathbb{R}^3$ sont définies de la manière suivante: r est la norme de v, ϕ l'angle entre l'axe vertical et v, et enfin θ l'angle entre l'axe des abscisses et la projection de v sur le plan horizontal. Notons que $r \in \mathbb{R}^+$, $\phi \in [0,\pi[$, $\theta \in [0,2\pi[$. On a alors

$$\begin{cases} x = r\cos\theta\sin\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\phi \end{cases}$$

3) Quelle est la loi du triplet (R,Θ,Φ)?
4) Les variables R,Θ,Φ sont–elles indépendantes?
5) Quelle est la loi de chaque variable R,Θ,Φ?

Soit U le vecteur $(X/R, Y/R, Z/R)$. Le vecteur U est une direction aléatoire dans $\mathbb{R}^3$.
6) Quelle est la loi de U?

He uses statistics as a drunken man uses lamp posts
– for support rather than illumination.
Andrew Lang (1844-1912).

Problème: *Nombre de visites en 0 de la marche aléatoire dans $\mathbb{Z}$*

Soit p un nombre réel dans $]0,1[$. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite infinie de v.a. indépendantes qui suivent toutes la loi de Bernoulli de paramètre p:

$$\forall n\in\mathbb{N}\qquad P(X_n=-1)=1-p\,,\quad P(X_n=+1)=p\,.$$

Posons

$$S_0=0\,,\qquad \forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}\qquad S_n\;=\;X_1+\cdots+X_n\,.$$

1) Quelle est la loi de S_n? Donnez son espérance et sa variance.

2) a) Donnez un équivalent, lorsque n tend vers l'infini, de $P(S_{2n}=0)$.

b) Dans le cas non symétrique où $p\neq 1/2$, en déduire que, avec probabilité 1, la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ visite 0 un nombre fini de fois.

Définissons

$$\forall n\in\mathbb{N}\qquad N_n\;=\;\sum_{1\leq k\leq n}1_{S_k=0}\,.$$

3) Que représente N_n?

4) Calculer $E(N_n)$ pour $n\geq 1$.

5) Montrez que la limite

$$N_\infty\;=\;\lim_{n\to\infty}N_n$$

existe presque sûrement.

6) Montrez que N_∞ est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}\cup\{\infty\}$.

7) Exprimer $E(N_\infty)$ sous la forme d'une série.

8) Montrez que si $p\neq 1/2$, alors

a) $P(N_\infty=\infty)=0$.

b) $E(N_\infty)<\infty$.

9) Montrez que si $p=1/2$, alors $E(N_\infty)=\infty$.

Notons f la fonction caractéristique de X_1.

10) Montrez que $|f(u)|<1$ pour tout $u\in\mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z}$.

11) Calculez la fonction caractéristique de S_n et étudier son comportement lorsque n tend vers l'infini. Que peut–on en conclure?

12) Montrez que

$$P(S_n=0)\;=\;\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}(f(u))^n\,du\,.$$

13) Montrez que

$$E(N_\infty)\;=\;\lim_{\substack{r\to 1\\ r<1}}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{du}{1-rf(u)}\,.$$

14) En déduire la valeur de $E(N_\infty)$ en fonction de p.

> The excitement that a gambler feels when making a bet is equal to the amount he might win times the probability of winning it.
> Pascal, Blaise (1623-1662)