FIMFA 2012/2013
Vendredi 5 avril 2013

ANALYSE FONCTIONNELLE
DURÉE 2 HEURES – NOTES DE COURS AUTORISÉES

1. Unicité des solutions entropiques de l'équation de Hopf

On a vu dans le cours que l'on pouvait construire une solution de viscosité de l'équation de Hopf, i.e.une fonction $u \in L^\infty(\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R})$ vérifiant au sens des distributions

$$\partial_t u + \frac{1}{2}\partial_x u^2 = 0, \quad u_{|t=0} = u^0 \in C^0(\mathbf{R}), \tag{$*$}$$

obtenue par approximation visqueuse, c'est-à-dire comme limite de la suite (u_ε) définie par

$$\partial_t u_\varepsilon + \frac{1}{2}\partial_x u_\varepsilon^2 = \frac{\varepsilon}{2}\partial_{xx}^2 u_\varepsilon, \quad u_{\varepsilon|t=0} = u^0 \in C^0(\mathbf{R}).$$

On dit que $(\eta, q) \in (C^0(\mathbf{R}))^2$ est un couple entropie/ flux d'entropie pour l'équation de Hopf si η, q sont C^1 par morceaux, f est une fonction convexe et $q'(z) = z\eta'(z)$. En particulier, les solutions régulières de l'équation de Hopf satisfont

$$\partial_t \eta(u) + \partial_x q(u) = 0\,.$$

(1) Montrer que la solution de viscosité vérifie l'inégalité d'entropie

$$\partial_t \eta(u) + \partial_x q(u) \leq 0 \tag{$**$}$$

pour tout couple entropie/ flux d'entropie (η, q). On dit alors que la solution de viscosité est une solution entropique.

On se propose de montrer l'unicité d'une telle solution entropique. On va pour cela utiliser la méthode de doublement de variables introduite par Kruzkov.
Soient u et $\bar u$ deux solutions entropiques de l'équation de Hopf, c'est-à-dire vérifiant les relations $(*)$ et $(**)$ au sens des distributions. On pose

$$\tilde\eta(u, \bar u) = (u - \bar u)_+, \quad \tilde q(u, \bar u) = \frac{1}{2}(u^2 - \bar u^2)\mathbf{1}_{u - \bar u \geq 0}\,,$$

et on se donne une fonction ϕ de classe C^1 par morceaux, positive, à support compact sur $\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}$.

(2) En utilisant le fait que $\Big(\tilde\eta(\cdot, \bar u(\bar t, \bar x)), \tilde q(\cdot, \bar u(\bar t, \bar x)\Big)$ est un couple entropie/flux d'entropie pour $u = u(t, x)$, et que $\Big(\tilde\eta(u(t, x), \cdot), \tilde q(u(t, x), \cdot)\Big)$ est un couple entropie/flux d'entropie pour $\bar u = \bar u(\bar t, \bar x)$, montrer que

$$\begin{aligned}
&\iint\iint \Big((\partial_t + \partial_{\bar t})\Phi(t, x, \bar t, \bar x)\tilde\eta(u(t, x), \bar u(\bar t, \bar x)) \\
&\qquad + (\partial_x + \partial_{\bar x})\Phi(t, x, \bar t, \bar x)\tilde q(u(t, x), \bar u(\bar t, \bar x))\Big) dx d\bar x dt d\bar t \\
&\geq -\int\iint \Phi(0, x, \bar t, \bar x)\tilde\eta(u^0(x), \bar u(\bar t, \bar x)) dx d\bar x d\bar t \\
&\qquad -\int\iint \Phi(t, x, 0, \bar x)\tilde\eta(u(t, x), \bar u^0(\bar x)) dx dt d\bar x
\end{aligned}$$

Soient ρ un noyau de régularisation (à support compact et de masse 1), et ψ une fonction test sur $\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}$. On définit, pour tout $\varepsilon \in]0,1]$

$$\Phi_\varepsilon(t,x,\bar t,\bar x) = \frac{1}{\varepsilon^2}\psi\Big(\frac{t+\bar t}{2}, \frac{x+\bar x}{2}\Big)\rho\Big(\frac{t-\bar t}{2\varepsilon}\Big)\rho\Big(\frac{x-\bar x}{2\varepsilon}\Big)\,.$$

(3) En faisant tendre $\varepsilon \to 0$, montrer qu'on a

$$\iint\iint \Big(\partial_t\psi\tilde\eta(u(t,x),\bar u(t,x))) + \partial_x\psi\tilde q(u(t,x),\bar u(t,x)))\Big)dxdt$$
$$\geq -\int \psi(0,x)\tilde\eta(u^0(x),\bar u^0(x))dx\,.$$

(4) En choisissant des paires entropie/flux d'entropie adaptées, montrer qu'on a un principe du maximum :

$$-\|u^0\|_\infty \leq u \leq \|u^0\|_\infty\,.$$

(5) En remarquant que

$$|\tilde q(u,\bar u)| \leq s\tilde\eta(u,\tilde u) \text{ avec } s = \max(\|u^0\|_\infty, \|\bar u^0\|_\infty)\,,$$

et avec un choix approprié de ψ, montrer qu'on a

$$\frac{1}{\alpha}\int_t^{t+\alpha}\int_{|x|<R}(u-\bar u)_+(\tau,x)dxd\tau \leq \int_{|x|<R+st}(u^0-\bar u^0)_+(x)dx$$
$$-\frac{1}{\alpha}\int_0^t\int_{R+s(t-\tau)<x<R+s(t-\tau)+\alpha}\Big(s\eta(u,\bar u)+\mathrm{sgn}(x)\tilde q(u,\bar u)\Big)dxdt + O(\alpha)\,.$$

(6) En passant à la limite $\alpha \to 0$, montrer qu'on a l'inégalité de stabilité

$$\int_{|x|<R}(u(t,x)-\bar u(t,x))_+dx \leq \int_{|x|<R+st}(u^0(x)-\bar u^0(x))_+dx\,.$$

En déduire l'unicité.

(7) Montrer que l'équation de Hopf a une vitesse finie de propagation, i.e. que la valeur de la solution entropique à un point quelconque $(\bar t,\bar x)$ dépend seulement de la restriction de la donnée initiale à la boule $\{x\in\mathbf{R}\,/\,|x-\bar x|<s\bar t\}$.

2. Théorème de Banach-Steinhaus et distributions

(1) Soient X, Y deux espaces vectoriels topologiques localement convexes séparés, et (T_i) une famille d'opérateurs continus de X dans Y. On définit

$$B = \{x \in X\,/\,(T_ix)_i \text{ est bornée dans } Y.\}.$$

Prouver que, si B est non maigre dans X, alors $B = X$ et (T_i) est équicontinue au sens où

$$\forall W \text{ voisinage de 0 dans } Y, \exists V \text{ voisinage de 0 dans } X, \quad \forall i, \quad T_i(V)\subset W\,.$$

(2) Soient X un espace vectoriel normé, et A une partie de X. Montrer que A est bornée si et seulement si

$$\forall l \in X', \quad l(A)\subset \mathbf{R} \text{ est bornée.}$$

(3) Soient X un espace vectoriel topologique localement convexe séparé, et A une partie de X. Montrer que A est bornée si et seulement si

$$\forall l \in X', \quad l(A)\subset \mathbf{R} \text{ est bornée.}$$

Dans toute la suite, K désigne un compact de $\mathbf{R}^k$, $\mathcal{D}(K)$ est l'ensemble des fonctions C^∞ à support dans K, et $\mathcal{D}'(K)$ est l'ensemble des formes linéaires continues sur $\mathcal{D}(K)$.

(4) Montrer qu'un ensemble $A \subset \mathcal{D}(K)$ est borné si et seulement si
$$\forall T \in \mathcal{D}'(K), \quad \sup\{\langle T, \varphi\rangle \,/\, \varphi \in A\} < +\infty\,.$$

(5) Soit $(\varphi_n)_n$ une suite de $\mathcal{D}(K)$ telle que, pour toute $T \in \mathcal{D}'(K)$, $\big(\langle T, \varphi_n\rangle\big)_n$ est une suite numérique bornée. Montrer qu'il existe une sous-suite de (φ_n) qui converge pour la topologie de $\mathcal{D}(K)$.

(6) Soit $(T_n)_n$ une suite de $\mathcal{D}'(K)$ telle que, pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(K)$, $\big(\langle T_n, \varphi\rangle\big)_n$ est une suite numérique bornée. Montrer qu'il existe une sous-suite de (T_n) qui converge pour la topologie de $\mathcal{D}'(K)$.

Soit Ω un ouvert de $\mathbf{R}^k$. On note $\mathcal{D}'(\Omega)$ l'ensemble des fonctions C^∞ à support compact dans Ω, et $\mathcal{D}'(\Omega)$ l'ensemble des distributions sur Ω.

(7) Peut-on étendre les résultats des questions (4)(5)(6) dans ce cadre ?

3. Propriétés dispersives de l'équation de Schrödinger

On s'intéresse ici aux solutions de l'équation de Schrödinger linéaire sur $\mathbf{R}$
$$i\partial_t\psi - \partial^2_{xx}\psi = 0, \qquad \psi_{|t=0} = \psi^0 \in C_c(\mathbf{R}).$$
On se propose d'en étudier les propriétés de dispersion (i.e. la convergence locale vers 0 quand $t \to \infty$) en utilisant une méthode de phase non stationnaire (qui peut se généraliser facilement en dimension supérieure et pour des géométries plus compliquées).

(1) Montrer que
$$\psi(t,x) = \frac{1}{(2\pi)} \int \exp(i\xi \cdot x - it|\xi|^2)\mathcal{F}\psi^0(\xi)d\xi\,,$$
où $\mathcal{F}$ désigne la transformée de Fourier par rapport aux variables d'espace uniquement.

Quand $t \to \infty$, la phase devient très oscillante et on s'attend à ce que $\psi(t,x) \to 0$. La difficulté vient du fait que la phase stationne pour $\xi = 0$.

(2) Soit $\alpha > 0$. En remarquant que
$$\frac{i}{t}\partial_\xi(\exp(-it|\xi|^2)) = \xi \exp(-it|\xi|^2)\,,$$
montrer que
$$\Big|\int_{|\xi|\geq\alpha} \exp(i\xi \cdot x - it|\xi|^2)\mathcal{F}\psi^0(\xi)d\xi\Big| \leq \frac{C}{\alpha t}.$$

(3) Pour les basses fréquences, montrer qu'on a le contrôle suivant
$$\Big|\int_{|\xi|<\alpha} \exp(i\xi \cdot x - it|\xi|^2)\mathcal{F}\psi^0(\xi)d\xi\Big| \leq C\alpha.$$
Conclure.

(4) En utilisant une régularisation par une gaussienne $\exp\big(-\varepsilon\frac{|\xi|^2}{2}\big)$, calculer explicitement le noyau de Green de l'équation de Schrödinger, i.e. la solution de donnée initiale δ_0. Retrouver l'estimation de dispersion précédente pour une donnée initiale $\psi^0 \in L^1(\mathbf{R})$.

(5) Cette estimation de dispersion est-elle optimale quand $\psi^0 \in C_c(\mathbf{R})$?