SÉPARATION D'ÉCHELLES EN MÉCANIQUE DES FLUIDES
PARTIEL DU JEUDI 24 MARS 2016
DURÉE 1 HEURE 30 – DOCUMENTS AUTORISÉS

Exercice 1. On se propose ici d'étudier l'effet combiné de la force de Coriolis et de la gravité sur un écoulement en eau peu profonde. le cas d'un modèle simplifié 2D à surface libre, dit modèle de Saint-Venant :

$$\left\{\begin{array}{l}\partial_t \eta + \dfrac{1}{\varepsilon}\nabla\cdot((1+\varepsilon\eta)u) = 0,\\ \partial_t u + u\cdot\nabla u + \dfrac{1}{\varepsilon}u^\perp + \dfrac{1}{\varepsilon}\nabla\eta + \nabla\dfrac{\eta^2}{2} = \dfrac{\nu}{1+\varepsilon\eta}\Delta u\,,\end{array}\right. \tag{0.1}$$

où η est la fluctuation de hauteur de la surface $h = H(1+\varepsilon\eta)$ et $u^\perp = (-u_2, u_1)$. (On a supposé que le nombre de Froude U^2/gH qui mesure l'effet de la gravité est du même ordre de grandeur que le nombre de Rossby). Pour simplifier, on suppose que le domaine horizontal est le tore bidimensionnel, et que le vecteur de rotation est constant.

• Montrer formellement qu'on a l'estimation d'énergie

$$\int(1+\varepsilon\eta_\varepsilon)|u_\varepsilon|^2(t,x)dx + \int|\eta_\varepsilon|^2(t,x)dx + 2\nu\int_0^t\int|\nabla u_\varepsilon|^2(s,x)dxds \le 2\mathcal{E}_0\,.$$

On admettra que cela permet, pour tout ε fixé et pour toute donnée initiale (η^0, u^0) d'énergie finie, de construire une solution faible globale $(\eta_\varepsilon, u_\varepsilon)$ du système (0.1)

• Montrer que l'opérateur de perturbation singulière

$$L : \begin{pmatrix}\eta\\ u\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}\nabla\cdot u\\ u^\perp+\nabla\eta\end{pmatrix}$$

décrit la propagation d'ondes, dont on donnera la relation de dispersion.
(On pourra utiliser la décomposition sur les modes de Fourier).

• On définit $m_\varepsilon = (1+\varepsilon\eta_\varepsilon)u_\varepsilon$. Déduire des deux questions précédentes que, lorsque $\varepsilon\to 0$, on a, à extraction près,

$$(\eta_\varepsilon, m_\varepsilon) \rightharpoonup (\eta, u) \text{ faiblement dans } L^2([0,T], L^p) \text{ pour tout } p<2\,,$$

où (η, u) vérifie les contraintes

$$\nabla\cdot u = 0, \qquad u^\perp + \nabla\eta = 0\,.$$

• Montrer que la projection $(\bar\eta, \bar m)$ de (η, m) sur le noyau de L est définie par

$$\begin{aligned}\bar\eta &= (I-\Delta)^{-1}(\eta - \nabla^\perp\cdot m)\,,\\ \bar m &= \nabla^\perp(I-\Delta)^{-1}(\eta-\nabla^\perp\cdot m)\,.\end{aligned}$$

En projetant le système (0.1) sur le noyau de L, montrer qu'on a de la régularité temporelle uniforme sur la suite $(\bar\eta_\varepsilon, \bar m_\varepsilon)$, puis en déduire que cette suite converge fortement.

• On veut montrer que la dynamique lente du mode non oscillant $(\bar\eta_\varepsilon, \bar m_\varepsilon)$ se découple des oscillations $(\widetilde\eta_\varepsilon, \widetilde m_\varepsilon)$. Montrer que si on a l'équation de propagation

$$\begin{aligned}\widetilde\eta_\varepsilon &= \nabla^\perp\cdot\widetilde m_\varepsilon\,,\\ \varepsilon\partial_t\widetilde\eta_\varepsilon + \nabla\cdot\widetilde m_\varepsilon &= O(\varepsilon)\,,\\ \varepsilon\partial_t\widetilde m_\varepsilon + \widetilde m_\varepsilon^\perp + \nabla\widetilde\eta_\varepsilon &= O(\varepsilon)\end{aligned} \tag{0.2}$$

le terme non linéaire

$$\nabla^{\perp} \otimes \nabla \cdot (\widetilde{m}_{\varepsilon} \otimes \widetilde{m}_{\varepsilon}) = -\varepsilon \partial_t \nabla^{\perp} \cdot (\widetilde{\eta}_{\varepsilon} \widetilde{m}_{\varepsilon}) + O(\varepsilon)\,,$$

et qu'il converge donc vers 0 au sens des distributions.
(On pourra ignorer les difficults liés à la régularité spatiale des différents termes.)

- Passer à la limite dans l'équation sur $\eta_{\varepsilon} - \nabla^{\perp} \cdot m_{\varepsilon}$ et conclure.