ALGEBRE-04/2010
(documents interdits)

I

On rappelle qu'étant données deux $\mathbb{R}$-algèbres A et B, leur produit tensoriel $A \otimes_{\mathbb{R}} B$ est une $\mathbb{R}$-algèbre dont la multiplication est telle que

$$(a \otimes b)\,(a' \otimes b') = aa' \otimes bb', \quad a, a' \in A, \quad b, b' \in B.$$

I.1. Démontrer que $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ est isomorphe, comme $\mathbb{R}$-algèbre, à la somme directe $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ munie de la multiplication terme à terme et du produit par un réel tel que

$$x\,(z, z') = (xz, xz'), \quad x \in \mathbb{R}, \quad z, z' \in \mathbb{C}.$$

I.2. Démontrer que le produit par $\mathbb{C}$ sur la première et sur la seconde composante de $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ munit $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ de deux structures de $\mathbb{C}$-algèbres. Décrire ces structures en utilisant l'isomorphisme $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ de la question précédente.

II

On appelle algèbre des quaternions, et on note $\mathbb{H}$, l'algèbre (associative mais non commutative) de dimension 4 sur $\mathbb{R}$ engendrée par les trois éléments i, j, k soumis aux relations $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$.

II.1. Vérifier que ces relations donnent bien une algèbre de dimension 4. Montrer que $\mathbb{H}$ est une algèbre à divisions (i.e., tout élément non nul de $\mathbb{H}$ admet un inverse).

II.2. Montrer que $\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = M_2(\mathbb{C})$ comme $\mathbb{C}$-algèbre.

II.3. (Facultatif, plus difficile) Montrer que $\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} = M_4(\mathbb{R})$ (il s'agit de trouver seize matrices de $M_4(\mathbb{R})$ qui en forment une base correspondant à la base $\{1 \otimes 1, 1 \otimes i, 1 \otimes j, 1 \otimes k, i \otimes 1, ..., k \otimes k\}$ de $\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}$ et vérifient les mêmes relations).

<u>Rédiger ce troisième exercice sur une copie différente.</u>

III

Si H est un groupe abélien, on note H^n le sous-groupe de H constitué des puissances n-ièmes des éléments de H.

Soient $n \geq 1$ un entier, K un corps de caractéristique 0 contenant le groupe μ_n des racines n-ièmes de l'unité et L/K une extension finie, galoisienne dont le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(L/K)$ est un groupe abélien de n-torsion c'est-à-dire que tout élément est d'ordre divisant n. On note $H_L = (L^\times)^n \cap K^\times$.

(a) Si $x \in H_L$ et $g \in \mathrm{Gal}(L/K)$, on pose $\langle x, g \rangle = g(y)/y$ où y est un élément de L tel que $y^n = x$. Montrer que cette définition ne dépend pas du choix de y et que pour tout $(x, g) \in H_L \times \mathrm{Gal}(L/K)$, on a $\langle x, g \rangle \in \mu_n$, en déduire ainsi un morphisme de groupes

$$\kappa_L : H_L \to \mathrm{Hom}(\mathrm{Gal}(L/K), \mu_n).$$

(b) Montrer que le noyau de κ_L est $(K^\times)^n$.

(c) Si H est un groupe et $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ des morphismes de groupes deux à deux distincts de H dans $L^\times$, montrer que la famille $(\sigma_1, \ldots, \sigma_k)$ est libre dans le L-espace vectoriel des applications de H dans L.

(d) Soit $\sigma : \mathrm{Gal}(L/K) \to \mu_n$ un morphisme de groupes. Montrer qu'il existe $x \in L$ tel que $\sum_{g \in \mathrm{Gal}(L/K)} \sigma(g)^{-1} g(x)$ est non nul. En déduire qu'il existe $y \in L^\times$ tel que $\sigma(g) = \frac{g(y)}{y}$ pour tout $g \in \mathrm{Gal}(L/K)$. En déduire que κ_L est surjectif.

(e) Montrer qu'il existe $y_1, \ldots, y_r$ dans L tels que $y_i^n \in K^\times$ pour tout i et que $L = K(y_1, \ldots, y_r)$ (on pourra remarquer que $\mathrm{Hom}(\mathrm{Gal}(L/K), \mu_n)$ est de type fini).