FIMFA 2011/2012
Vendredi 23 mars 2011

ANALYSE FONCTIONNELLE
DURÉE 2 HEURES – DOCUMENTS NON AUTORISÉS

1. Distributions à support compact

Soient S une distribution à support compact sur $\mathbf{R}$, k un entier et $T = S^{(k)}$ la dérivée d'ordre k de S. On note $X_k \in C^\infty(\mathbf{R})$ la fonction $t \mapsto t^k$.

1) Montrer que si $0 \leq j < k$, on a $\langle T, X_j \rangle = 0$.

Inversement, on veut montrer par récurrence sur $k \geq 1$ que si T est une distribution à support compact sur $\mathbf{R}$ telle que $\langle T, X_j \rangle = 0$ pour $0 \leq j < k$, il existe une distribution à support compact S telle que $T = S^{(k)}$. On note Y la "fonction d'Heaviside" définie par

$$Y(x) = 1\!\!1_{x \geq 0}$$

et $\widetilde{Y} = 1 - Y$.

2) Si T est une distribution à support compact telle que $\langle T, 1 \rangle = 0$, montrer que $T * Y$ est à support compact. Conclure dans le cas où $k = 1$.

3) On suppose maintenant que l'énoncé est vrai pour k et que $T \in \mathcal{E}'(\mathbf{R})$ vérifie $\langle T, X_j \rangle = 0$ pour $0 \leq j \leq k$. Montrer qu'il existe $S_0 \in \mathcal{E}'(\mathbf{R})$ telle que $T = S_0^{(k)}$ et $\langle S_0, 1 \rangle = 0$. Conclure.

Soit T une distribution à support compact sur $\mathbf{R}$. On désignera ici par $\varepsilon_z \in C^\infty(\mathbf{R})$ pour $z \in \mathbf{C}$, la fonction $x \mapsto \exp(-xz)$ et par $\mathcal{L}_T$ la fonction définie sur $\mathbf{C}$ par $z \mapsto \langle T, \varepsilon_z \rangle$.

4) On suppose que $\mathrm{Supp}(T) \subset]\alpha, \beta[$. Montrer qu'il existe un entier n et un nombre M tels que

$$\Big|\mathcal{L}_T(z)\Big| \leq M(1 + |z|^n)(|\exp(-\alpha z)| + |\exp(-\beta z)|) \tag{$*$}$$

Montrer que, de plus, si T est une fonction à support compact, on peut prendre $n = 0$.

Montrer aussi que, si T_1 est la dérivée de T, on a $\mathcal{L}_{T_1}(z) = z\mathcal{L}_T(z)$.

On suppose maintenant que la distribution à support compact T vérifie la condition $(*)$ ci-dessus, et on veut montrer que le support de T est contenu dans l'intervalle $[\alpha, \beta]$.

5) Soient $q \in \mathbf{N}$ et ψ une fonction positive, de classe C^∞, non identiquement nulle et à support dans $]\alpha, \beta[$. On considère la fonction Ψ qui à tout polynôme P de degré $< q$ associe l'élément $u \in C^q$ de coordonnées $u_j = \langle \psi, X_{j-1} P \rangle$ (pour $1 \leq j \leq q$).

Montrer que Ψ est linéaire et injective, puis qu'il existe un polynôme P de degré $< q$ tel que $\langle \psi P, X_{j-1} \rangle = \langle T, X_{j-1} \rangle$ pour tout j dans $[1, q]$. Conclure qu'il existe alors $S \in \mathcal{E}'(\mathbf{R})$ telle que $T - \psi P = S^{(q)}$.

Montrer que si T vérifie la condition $(*)$ et si on prend $q = n + 2$, la distribution S vérifie

$$\Big|\mathcal{L}_S(z)\Big| \leq \frac{C}{1 + |z|^2}(|\exp(-\alpha z)| + |\exp(-\beta z)|) \tag{$**$}$$

pour une constante convenable C.

6) On suppose que $S \in \mathcal{E}'(\mathbf{R})$ vérifie $(**)$ et, pour $\xi \in \mathbf{R}$ on note S_ξ la distribution $\varepsilon_\xi.S$. Montrer que la transformée de Fourier $\mathcal{F}S_\xi$ de S_ξ vérifie, avec la même constante C que ci-dessus,

$$\left|\mathcal{F}S_\xi(\eta)\right| = \left|\mathcal{L}_S(\xi + i\eta)\right| \le \frac{C}{1+\eta^2}(\exp(-\alpha\xi) + \exp(-\beta\xi)).$$

En déduire que, dans $\mathcal{S}'(\mathbf{R})$, S est égale à la fonction continue

$$g : x \mapsto \frac{1}{2\pi}\exp(x\xi)\int \mathcal{F}S_\xi(\eta)\exp(ix\eta)\,d\eta.$$

Montrer que la fonction g vérifie pour tout x et tout ξ :

$$|g(x)| \le \frac{C}{2}(\exp((x-\alpha)\xi) + \exp((x-\beta)\xi))\ .$$

7) En déduire que $g(x) = 0$ si $x < \alpha$ et si $x > \beta$, puis que $\mathrm{Supp}(S) \subset [\alpha, \beta]$.

Conclure que $\mathrm{Supp}(T) \subset [\alpha, \beta]$ si T vérifie $(*)$.

2. Distributions périodiques

On dit qu'une distribution T est 2π-périodique si elle est invariante par translation de 2π

$$\tau_{2\pi}T = T.$$

1) Soit $(\gamma_p)_{p\in\mathbf{Z}}$ une suite à croissance lente, c'est-à-dire telle qu'il existe $C > 0$, $N \in \mathbf{N}$

$$\forall p \in \mathbf{Z}, \quad |\gamma_p| \le C(1+|p|)^N.$$

Montrer que la série $\sum_{p\in Z}\gamma_p\exp(2i\pi pt)$ converge au sens des distributions, et définit une distribution 2π-périodioque.

Inversement, on veut montrer que toute distribution périodique est somme d'une unique série de Fourier, dont les coefficients sont à croissance lente. On rappelle le théorème classique suivant

Théorème de Dirichlet. *Soit f une fonction 2π-périodique de classe C^1 par morceaux. Si on pose $c_p(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\exp(-2i\pi pt)dt$, les sommes partielles symétriques $\sum_{p=-k}^{k} c_p(f)\exp(2i\pi pt)$ de la série de Fourier convergent uniformément vers f sur tout intervalle fermé sur lequel f est continue.*

2) Montrer que si $f \in C^\infty(\mathbf{R})$ est 2π-périodique, la suite de ses coefficients de Fourier est à décroissance rapide, c'est-à-dire que

$$\forall N, \quad \sup_{p\in\mathbf{Z}} |c_p(f)|(1+|p|)^N < +\infty,$$

et que la différence $f - \sum_{p=-k}^{k'} c_p(f)\exp(2i\pi pt)$ tend vers 0 uniformément ainsi que chacune de ses dérivées lorsque k et k' tedent vers ∞.

3) Construire $\chi \in C_c^\infty(\mathbf{R}, [0,1])$ telle que

$$\sum_{k\in\mathbf{Z}} \tau_{2\pi k}\chi \equiv 1.$$

Pour toute fonction $\alpha \in C_c^\infty(\mathbf{R})$, on pose $\tilde\alpha = \sum_{k\in\mathbf{Z}}\tau_{2\pi k}\alpha$. Montrer que pour toute suite (γ_p) à croissance lente, on a

$$\langle \sum \gamma_p \exp(2i\pi pt), \alpha\rangle = \sum \gamma_p c_{-p}(\tilde\alpha),$$

et en déduire que l'application qui à une suite (γ_p) à croissance lente associe la distribution $\sum \gamma_p\exp(2i\pi pt)$ est injective.

4) Soit U une distribution 2π-périodique. Montrer qu'il existe $u \in \mathcal{E}'(\mathbf{R})$ telle que

$$U = \sum \tau_{2\pi k} u\,.$$

On pose alors $\beta_p = (2\pi)^{-1}\langle u, \exp(-2i\pi p\cdot)\rangle$. Montrer que (β_p) est à croissance lente et que l'on a, pour toute $\alpha \in C_c^\infty(\mathbf{R})$

$$\langle U, \alpha\rangle = \sum \beta_p c_{-p}(\tilde{\alpha})\,.$$

Conclure.

5) Démontrer la formule sommatoire de Poisson

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}), \quad \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varphi(2\pi k) = \frac{1}{2\pi}\sum_{p=-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}\varphi(p).$$

3. Une application non-linéaire

Soit Ω un espace mesuré de mesure finie. Soient $p, q \in [1,\infty[$, et $a : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction continue telle que

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad |a(t)| \le C(|t|^{p/q} + 1).$$

On considère l'application $A : L^p(\Omega) \to L^q(\Omega)$ définie par

$$(Au)(x) = a(u(x)).$$

1) Montrer que si $f_n \longrightarrow f$ dans $L^p(\Omega)$ fort, il existe une extraction σ et $l \in L^p(\Omega)$ telles que $f_{\sigma(n)} \longrightarrow f$ presque partout et $|f_{\sigma(n)}| \le l$.

2) Montrer que A est continue de $L^p(\Omega)$ (fort) dans $L^q(\Omega)$ (fort).

On suppose maintenant que $\Omega =]0,1[$ et que pour toute suite (u_n) telle que $u_n \rightharpoonup u$ pour $\sigma(L^p, L^{p'})$ alors $Au_n \rightharpoonup Au$ pour $\sigma(L^q, L^{q'})$ (avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$).

3) Pour $t \in [0,1[$, soit $v^t : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la fonction 1-périodique telle que, pour $x \in [0,1[$, $v^t(x) = \mathbb{1}_{x\in[0,t[}$. On définit la suite $v_n : [0,1] \to \mathbf{R}$ par $v_n^t(x) = v^t(nx)$. Montrer que $v_n^t \rightharpoonup t\mathbb{1}_{[0,1]}$ dans $L^r([0,1])$-faible pour tout $r \in [1,\infty[$.

4) En déduire que la fonction a est affine.

4. Réciproque du théorème de Riesz-Fréchet-Kolmogorov

Soient Ω un ouvert borné de $\mathbf{R}^d$, $p \in [1,\infty[$ et $\mathcal{A} \subset L^p(\Omega)$. Si $f \in L^p(\Omega)$, on étend implicitement f à $\mathbf{R}^d$ en posant $f(x) = 0$ pour $x \notin \Omega$. On peut alors considérer pour $h \in \mathbf{R}^d$:

$$(\tau_h f)(x) = f(x+h).$$

On suppose que $\mathcal{A}$ est relativement compacte.

1) Montrer que pour $f \in L^p(\mathbf{R}^d)$, $\|\tau_h f - f\|_{L^p(\mathbf{R}^d)} \to 0$ quand $|h| \to 0$ (on commencera par le montrer pour les fonctions continues à support compact).

2) Conclure : montrer que $\mathcal{A}$ est bornée et vérifie

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \quad \forall f \in \mathcal{A},\ \forall h \in B(0,\delta), \quad \|\tau_h f - f\|_{L^p(\Omega)} < \varepsilon.$$