Ecole Normale Supérieure Année 2012-2013
ENS **FIMFA**

Partiel de "processus aléatoires"

Durée : deux heures. Pas de document autorisé.
Le barème approximatif est 7/6/7.

Exercice 1 On a une population de taille $N \in \mathbb{N}^*$ fixée qui se renouvelle entièrement à chaque génération et dont chaque individu est de type a ou b. Chaque individu de la génération $n+1$ choisit son (seul) parent de la génération n de façon uniforme et indépendante des autres individus et hérite le type du parent. On note X_n le nombre d'individus de type a dans la génération n et $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \ldots, X_n)$. On a alors que la loi conditionnelle de X_{n+1} sachant $\mathcal{F}_n$ est une loi binomiale de paramètres $(N, X_n/N)$. On suppose que p.s. $X_0 = k$ où $k \in \{0, \ldots, N\}$.

1. Montrer que $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$-martingale.
2. Montrer que $(X_n)_{n\geqslant 0}$ converge p.s. et dans L^p pour tout $p \in [1, \infty[$ vers une variable X_∞.
3. On note $M_n = \left(\frac{N}{N-1}\right)^n X_n(N - X_n)$. Montrer que $(M_n)_{n\geqslant 0}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$-martingale.
4. Calculer $\mathbb{E}[X_\infty]$ et $\mathbb{E}[X_\infty(N - X_\infty)]$.
5. Déduire de la question précédente la loi de X_∞.

Exercice 2 Soit l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ défini par $\Omega = \mathbb{N}^*$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathrm{P}(\{n\}) = \frac{1}{n(n+1)}$. On définit pour tout $n \geqslant 0$:

$$\mathcal{F}_n = \big\{A \in \mathcal{A} \text{ tel que } A \cap [n+1, \infty[= \emptyset \text{ ou } [n+1, \infty[\big\},$$
$$X_n = (n+1)\mathbf{1}_{[n+1,\infty[}.$$

1. Vérifier que $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$ est une filtration et que $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est un processus $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$-adapté.
2. Montrer que $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$-martingale.
3. Montrer que $(X_n)_{n\geqslant 0}$ converge p.s. vers une variable aléatoire X_∞ qu'on identifiera. Est-ce que la convergence a lieu dans L^1 ?

Exercice 3 Soient $n \geqslant 2$ et $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires réelles i.i.d. de densité commune $f(x)$ et de fonction de répartition $F(x) = \int_{-\infty}^x f(x')dx'$. On pose

$$Y = \max(X_1, \ldots, X_n) \quad \text{et} \quad Z = \min(X_1, \ldots, X_n)$$

1. Montrer que la fonction de répartition $F_{Y,Z}(y,z) = \mathrm{P}(Y \leqslant y, Z \leqslant z)$ s'écrit

$$F_{Y,Z}(y,z) = \begin{cases} F(y)^n - (F(y) - F(z))^n & \text{si } z \leqslant y, \\ F(y)^n & \text{si } z > y. \end{cases}$$

2. Vérifier que (Y, Z) est à densité

$$f_{Y,Z}(y,z) = n(n-1)\big(F(y) - F(z)\big)^{n-2} f(y) f(z) \mathbf{1}_{z \leqslant y}.$$

3. Si la loi commune des X_i est la loi uniforme sur $[0,1]$, exprimer $\mathrm{E}[Y|Z]$.
4. Si la loi commune des X_i est la loi uniforme sur $[0,1]$, montrer que la loi conditionnelle de Z sachant Y est une famille de lois à densités $f_y(z)$ et identifier ces densités.
   On rappelle que la loi conditionnelle de Z sachant Y est la famille de probabilités $\nu_y(dz)$ telle que $\mathrm{E}[\psi(Z)|Y] = \int \psi(z)\nu_Y(dz)$ pour toute fonction test ψ.