Partiel 2013, 2h

Sans document, téléphone, ordinateur ou calculatrice.

Exercice 1. Soit X un espace localement compact, et soit x_n une suite de X. Montrer l'équivalence entre :

-La suite x_n n'a pas de valeur d'adhé rence dans X.

-La suite x_n tend vers le point ∞ dans le compactifié d'Alexandroff.

Exercice 2. On cherche à montrer la propriété suivante: Un espace localement compact métrisable admet une distance complète.

1. Soit U un ouvert d'un espace métrique complet (X, d). On suppose que son complémentaire F n'est pas vide. Montrer que la fonction
$$D(x,y) = d(x,y) + \left|\frac{1}{d(x,F)} - \frac{1}{d(y,F)}\right|$$
est une distance complète sur U qui engendre la même topologie que d.

2. Soit X un espace topologique et Y une partie dense de X. Montrer que $\bar{V} = \overline{Y \cap V}$ pour tout ouvert V de X.

3. Soit $Y \subset X$ une partie dense et localement compacte de l'espace topologique X. Montrer que Y est ouvert dans X.

4. Conclure.

Exercice 3. Soit E un espace de Banach uniformément convexe, c'est à dire qu'il existe une fonction croissante et strictement positive $\delta(\epsilon)$:$]0, \infty[\to]0, \infty[$ telle que: Pour tous points x et y vérifiant $\|x\| \leq 1$, $\|y\| \leq 1$, $\|x - y\| \geq \epsilon$, on a $\|(x + y)/2\| \leq 1 - \delta(\epsilon)$.

1. Montrer qu'un espace de Hilbert est uniformément convexe, avec $\delta(\epsilon) = 1 - \sqrt{1 - \epsilon^2/4}$

2. Si C est une partie convexe fermée d'un espace de Banach uniformément convexe, et si x est un point de E, montrer qu'il existe un unique point $c \in C$ tel que $d(x, C) = \|x - c\|$.

Exercice 4. Fixons $d \in \mathbb{N}^*$ et notons B la boule unité fermée et S la sphère unité de l'espace Euclidien $\mathbb{R}^d$. Soit X un espace métrique et Y une partie fermée de X.

1. Montrer que toute application continue $f : Y \to B$ se prolonge en une application continue $F : X \to B$.

2. Montrer que pour toute application continue $f : Y \to S$, il existe un voisinage U de Y dans X et une extension continue $F : U \to S$ de f à U.

Exercice 5. Soit K_n une suite décroissante de compacts connexes non-vides et soit $K = \cap_n K_n$ son intersection.

1. Soient U et V des ouverts disjoints de K_1 qui recouvrent K, montrer que $K \subset U$ ou $K \subset V$.

2. Montrer que K est connexe.

Exercice 6. Soit $l^1 \subset l^\infty$ les ensemble des suites sommables et bornées. On note n_1 et n_∞ les normes habituelles $n_1(x) = \sum_i |x_i|$ et $n_\infty(x) = \sup_i |x_i|$. Soit L une application linéaire continue de (l^∞, n_∞) dans lui-même qui préserve l'espace l^1, c'est à dire que $L(l^1) \subset l^1$.

1. Montrer que le graphe de $L_{|l^1}$ est fermé dans l'espace vectoriel normé $l^1 \times l^1$ muni de la norme $N_\infty(x, y) := n_\infty(x) + n_\infty(y)$.

2. Montrer que $L_{|l^1}$ est continue de (l^1, n_1) dans (l^1, n_1).

Corrigé du partiel

Exercice 1
(1) $\Rightarrow$ (2) : soit V un voisinage ouvert de ∞ dans le compactifié d'Alexandroff. Montrons que $x_n \in V$ pour tout n assez grand.
Par définition de la topologie sur le compactifié, V est le complémentaire d'un compact K de X.
Il n'y a qu'un nombre fini de points de (x_n) qui sont dans K. En effet, sinon, il existe une sous-suite de (x_n) dont tous tous les éléments sont dans K. Puisque K est compact, cette sous-suite admet une valeur d'adhérence. La valeur d'adhérence de la sous-suite est aussi une valeurs d'adhérence de (x_n). C'est en contradiction avec (1).
Donc, pour tout n assez grand, $x_n \notin K$, c'est-à-dire $x_n \in V$.

$\neg$(1) $\Rightarrow$ $\neg$(2) : soit y une valeur d'adhérence de (x_n). Soit K un voisinage compact de y. Notons V le complémentaire de K dans le compactifié d'Alexandroff. C'est un voisinage de ∞.
Il existe une infinité d'indices n tels que $x_n \in K$ car y est valeur d'adhérence. Il existe donc une infinité d'indices n tels que $x_n \notin V$. Donc (x_n) ne converge pas vers ∞.

Exercice 2
1. La fonction D bien définie sur U^2 car on a toujours $d(x,F), d(y,F) \neq 0$ si $x, y \in U$.
La fonction D est symétrique et séparante car d l'est. Elle vérifie l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned}
D(x,z) &= d(x,z) + \left|\frac{1}{d(x,F)} - \frac{1}{d(z,F)}\right| \\
&\leq d(x,y) + d(y,z) + \left|\frac{1}{d(x,F)} - \frac{1}{d(y,F)}\right| + \left|\frac{1}{d(y,F)} - \frac{1}{d(z,F)}\right| \\
&= D(x,y) + D(y,z)
\end{aligned}$$

Montrons qu'elle engendre la même topologie que d. Pour tous $x \in U, \epsilon > 0$, $B_D(x,\epsilon) \subset B_d(x,\epsilon)$ car $D \geq d$. Un ouvert pour d est donc un ouvert pour D. Il faut montrer la réciproque.
Montrons donc que, quels que soient $x \in U, \epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $B_d(x,\eta) \subset B_D(x,\epsilon)$. Soient x, ϵ fixés. Soit $r = d(x,F)$. La fonction $y \to d(y,F)$ est continue pour la distance d. Il existe donc $\zeta > 0$ tel que, si $y \in B_d(x,\zeta)$, alors $d(y,F) \geq r/2$.
Posons $\eta = \min\left(\zeta, \frac{\epsilon}{1+2/r^2}\right)$.
Pour tout $x \in B_d(x,\eta)$:

$$\begin{aligned}
D(x,y) &= d(x,y) + \left|\frac{1}{d(x,F)} - \frac{1}{d(y,F)}\right| \\
&< \eta + \left|\frac{d(y,F) - d(x,F)}{d(y,F)d(x,F)}\right| \\
&\leq \eta + \frac{d(x,y)}{r^2/2} \\
&\leq \eta\left(1 + \frac{2}{r^2}\right) \leq \epsilon
\end{aligned}$$

donc $B_d(x,\eta) \subset B_D(x,\epsilon)$.
Montrons enfin que la distance D est complète. Supposons que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de U qui est de Cauchy pour D. Montrons qu'elle converge.
Cette suite est de Cauchy pour d car $d \leq D$. Elle converge donc dans X car X est complet. Soit x_∞ sa limite dans X. Si on montre que $x_\infty \in U$, alors on aura que $x_n \to x_\infty$ au sens de la distance D car les distances d et D engendrent la même topologie sur U donc la convergence pour d vers x_∞ implique la convergence pour D vers x_∞.
Raisonnons par l'absurde et supposons que $x_\infty \notin U$. Alors, $d(x_n,F) \to d(x_\infty,F) = 0$ lorsque $n \to +\infty$. Donc, pour tout m, $\lim\limits_{n\to+\infty} D(x_m,x_n) = +\infty$. C'est en contradiction avec le fait que la suite est de Cauchy.

2. Puisque $Y \cap V \subset V$, $\overline{Y \cap V} \subset \overline{V}$. Montrons l'autre inclusion.
Soit $x \in \overline{V}$ quelconque. Soit U un voisinage ouvert de x. Alors $U \cap V \neq \emptyset$. Puisque Y est dense, $U \cap V \cap Y \neq \emptyset$. Tout voisinage ouvert de x rencontre donc $V \cap Y$. On a donc nécessairement $x \in \overline{V \cap Y}$. Donc $\overline{V} \subset \overline{V \cap Y}$.

3. Soit $y \in Y$. Nous allons montrer que Y contient un voisinage de y.
Soit S un voisinage compact de y dans Y. Puisque S est un compact de X, S est fermé dans X.
Soit V un voisinage de y dans X tel que $S = V \cap Y$. Soit $V' \subset V$ un voisinage ouvert de y dans X.
Alors $V' \subset \overline{V'} = \overline{V' \cap Y} \subset \overline{S} = S \subset Y$. Donc Y contient un voisinage de y.

4. Soit $\overline{X}$ le complété de X. Alors X est dense dans $\overline{X}$ et localement compact. C'est donc un ouvert de $\overline{X}$, d'après la question précédente. Puisque c'est un ouvert d'un espace complet, on peut le munir d'une distance complète, d'après la première question.

Exercice 3

1. Si $||x-y|| \geq \epsilon, ||x|| \leq 1, ||y|| \leq 1$, alors :
$$||(x+y)/2||^2 + ||(x-y)/2||^2 = ||x||^2/2 + ||y||^2/2 \leq 1$$
Donc $||(x+y)/2||^2 \leq 1 - ||x-y||^2/4 \leq 1 - \epsilon^2/4$
On a donc $||(x+y)/2|| \leq 1 - \delta(\epsilon)$.

2. Si $x \in C$, c'est clair. On suppose donc dans la suite que $x \notin C$.
Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de C telle que $d(x,c_n) \to d(x,C)$.
Montrons que la suite (c_n) est de Cauchy.
Soient n,m deux entiers quelconques. Posons $a_{n,m} = \max(||x-c_n||, ||x-c_m||)$. Alors $\left|\left|\frac{x-c_n}{a_{n,m}}\right|\right|, \left|\left|\frac{x-c_m}{a_{n,m}}\right|\right| \leq 1$ et $\left|\left|\frac{x-c_n}{a_{n,m}} - \frac{x-c_m}{a_{n,m}}\right|\right| = \frac{||c_n-c_m||}{a_{n,m}}$.
On a donc $\left|\left|\frac{x-c_n}{2a_{n,m}} + \frac{x-c_m}{2a_{n,m}}\right|\right| \leq 1 - \delta\left(\frac{||c_n-c_m||}{a_{n,m}}\right)$, soit :
$$\left|\left|x - \frac{c_n+c_m}{2}\right|\right| \leq a_{n,m}\left(1 - \delta\left(\frac{||c_n-c_m||}{a_{n,m}}\right)\right)$$
L'élement $\frac{c_n+c_m}{2}$ appartient à C car C est convexe. On doit donc avoir :
$$d(x,C) \leq a_{n,m}\left(1 - \delta\left(\frac{||c_n-c_m||}{a_{n,m}}\right)\right)$$
Lorsque $\min(n,m) \to +\infty$, $a_{n,m} \to d(x,C)$. On obtient donc :
$$\lim_{\min(n,m)\to+\infty} \delta\left(\frac{||c_n-c_m||}{a_{n,m}}\right) = 0$$

Puisque δ est croissante et strictement positive, cela signifie que $\frac{||c_n - c_m||}{a_{n,m}} \to 0$ quand $\min(n,m) \to +\infty$.
Puisque $a_{n,m} \to d(x,C)$, $||c_n - c_m|| \to 0$ quand $\min(n,m) \to +\infty$.
La suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc de Cauchy. Elle converge vers un certain $c_\infty \in C$ lorsque $n \to +\infty$ car E est complet et C est fermé.
Alors $d(x,C) = \lim\limits_{n\to+\infty} ||x - x_n|| = ||x - c_\infty||$. On a donc montré l'existence.

Montrons l'unicité. Si c_1, c_2 sont deux points distincts de C tels que $||x - c_1|| = ||x - c_2|| = d(x,C)$, en notant $a = \max(||x - c_1||, ||x - c_2||) = d(x,C)$, on a, comme précédemment :

$$d(x,C) \leq \left\| x - \frac{c_1 + c_2}{2} \right\| \leq a \left(1 - \delta \left(\frac{||c_1 - c_2||}{a} \right) \right) < d(x,C)$$

C'est absurde.

Exercice 4
On note $||.||$ la norme euclidienne usuelle sur $\mathbb{R}^d$.

1. On note, pour tout $x \in Y$, $f(x) = (f_1(x), ..., f_d(x)) \in B \subset \mathbb{R}^d$.
Pour tout k, l'application f_k est continue sur un fermé de X et à image dans $[-1;1]$. Puisque X est métrique, il est normal et a la propriété de Tietze. L'application f_k se prolonge donc sur X en une application continue qu'on note $g_k : X \to [-1;1]$.
Posons $g = (g_1, ..., g_d)$. C'est une application continue sur X, qui coïncide avec f sur Y et est à image dans $[-1;1]^d$.
Soit $h : [-1;1]^d \to B$ l'application suivante :

$$\forall x \in [-1;1]^d, \quad h(x) = \frac{x}{\max(1, ||x||)} \in B$$

C'est une application continue qui vaut l'identité sur B.
L'application $F = h \circ g : X \to B$ est continue (car composée d'applications continues) et à image dans B. De plus, pour tout $x \in Y$, $g(x) = f(x) \in B$ donc $h(g(x)) = g(x) = f(x)$, soit $F(x) = f(x)$. L'application F coïncide donc avec f sur Y.

2. L'application f peut être vue comme une application de Y dans B, puisque S est inclus dans B. D'après la question 1., il existe donc $\tilde{f} : X \to B$ continue telle que $\tilde{f} = f$ sur Y.
Posons $U = \{x \in X \text{ tq } ||\tilde{f}(x)|| > 1/2\}$. C'est un ouvert de X puisque $||\tilde{f}||$ est une application continue. De plus, cet ouvert contient Y. L'ouvert U est donc un voisinage de Y.
Posons, pour tout $x \in U$, $F(x) = \tilde{f}(x)/||\tilde{f}(x)||$. C'est une application continue et à image dans S. Pour tout $x \in Y$, $\tilde{f}(x) = f(x) \in S$ donc $F(x) = \tilde{f}(x) = f(x)$. L'application F coïncide avec f sur Y.

Exercice 5

1. Puisque $K \subset U \cup V$, $K \cap (K_1 - (U \cup V)) = \emptyset$. Or $K \cap (K_1 - (U \cup V)) = \bigcap\limits_n (K_n \cap (K_1 - (U \cup V)))$.
Tous les ensembles $K_n \cap (K_1 - (U \cup V))$ sont compacts (il s'agit de fermés inclus dans des compacts). Puisque leur intersection est vide, il existe n tel que $K_n \cap (K_1 - (U \cup V)) = \emptyset$. Pour ce n, on a alors $K_n \subset U \cup V$ donc $K_n = (U \cap K_n) \cup (V \cap K_n)$. Puisque $U \cap K_n, V \cap K_n$ est une partition de K_n en ouverts disjoints et puisque K_n est connexe, $U \cap K_n = \emptyset$ ou $V \cap K_n = \emptyset$. Puisque $K \subset K_n$, $U \cap K = \emptyset$ ou $V \cap K = \emptyset$.
Cela implique $K \subset U$ ou $K \subset V$.

2. Soient F_1, F_2 deux fermés disjoints de K tels que $F_1 \cup F_2 = K$. Les ensembles F_1 et F_2 sont des fermés de K_1. Puisque K_1 est compact, K_1 est normal. Il existe donc U, V deux ouverts disjoints de K_1 tels que $F_1 \subset U$ et $F_2 \subset V$.
Les ouverts U, V recouvrent K donc, d'après la première question, $K \subset U$ ou $K \subset V$. On a donc $K = F_1$ ou $K = F_2$.

Exercice 6

1. Notons $G_1 \subset l^1 \times l^1$ le graphe de $L_{|l^1}$ et $G_\infty \subset l^\infty \times l^\infty$ le graphe de L.
Puisque L est continue pour la norme n_∞, G_∞ est fermé dans $l^\infty \times l^\infty$ muni de la norme N_∞. Puisque $G_1 = G_\infty \cap (l^1 \times l^1)$, G_1 est fermé pour la topologie induite par N_∞ sur $l^1 \times l^1$.

2. Puisque $n_\infty \leq n_1$, la topologie induite sur $l^1 \times l^1$ par N_∞ est moins fine que celle induite par $N_1(x, y) = n_1(x) + n_1(y)$. Tous les sous-ensembles de $l^1 \times l^1$ qui sont fermés pour N_∞ sont donc également fermés pour N_1.
D'après la première question, le graphe de $L_{|l^1}$ est donc fermé pour la norme N_1.
Puisque (l^1, n_1) est un espace de Banach, le théorème du graphe fermé implique que $L_{|l^1}$ est continue de (l^1, n_1) dans lui-même.