Partiel de Géométrie Différentielle

Durée 2h. Pas de calculatrice, document, téléphone, etc.

I (cours)

Construire de deux manières différentes une structure de variété sur $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$. Montrer que les deux méthodes donnent la même structure de variété.

II (tore de Clifford)

On identifie $\mathbb{R}^4$ avec $\mathbb{C}^2$ par l'application $(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (\alpha = x_1 + ix_2, \beta = x_3 + ix_4)$.
1. Pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathrm{S}^3 \subset \mathbb{C}^2$, on note $\mathrm{X}(\alpha, \beta) = (i\alpha, i\beta)$ et $\mathrm{Y}(\alpha, \beta) = (i\alpha, -i\beta)$. Montrer que les applications $\mathrm{X}, \mathrm{Y} : \mathrm{S}^3 \to \mathbb{C}^2$ ainsi définies sont des champs de vecteurs sur S^3. Calculer le crochet $[\mathrm{X}, \mathrm{Y}]$.
2. Calculer les flots $(\phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ et $(\psi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ des champs de vecteurs X et Y.
3. Montrer que si $(\alpha, \beta) \in \mathrm{S}^3$ avec $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$, alors l'image de l'application $f_{\alpha,\beta} : \mathbb{R}^2 \to \mathrm{S}^3$ donnée par $f_{\alpha,\beta}(s, t) = \phi_s \circ \psi_t(\alpha, \beta)$ est une sous-variété de S^3 difféomorphe à un tore T^2.

III

On notera $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire standard sur $\mathbb{R}^p$ ou $\mathbb{R}^n$. On considère l'ensemble $\mathrm{R}(p, n)$ des applications linéaires $u : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ isométriques, c'est-à-dire telles que $\langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}^p$.
1. Montrer que $\mathrm{R}(p, n)$ est une sous-variété de $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$, dont on précisera la dimension.
2. On identifie à nouveau $\mathbb{R}^4$ avec $\mathbb{C}^2$, de sorte que $\mathrm{S}^3 \subset \mathbb{C}^2$. On rappelle que l'action du groupe de Lie SU_2 sur S^3 donne un difféomorphisme $\Phi : \mathrm{SU}_2 \to \mathrm{S}^3$ défini par $\Phi(g) = g(1, 0)$.
En déduire un isomorphisme de fibrés vectoriels entre le fibré tangent TS^3 et le fibré trivial $\mathrm{S}^3 \times \mathbb{R}^3$:

$$\mathrm{F} : \mathrm{TS}^3 \simeq \mathrm{S}^3 \times \mathbb{R}^3,$$

tel que le morphisme $\mathrm{F}_x : \mathrm{T}_x\mathrm{S}^3 \to \mathbb{R}^3$ induit sur chaque fibre soit une isométrie pour tout $x \in \mathrm{S}^3$ (chaque espace tangent $\mathrm{T}_x\mathrm{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$ étant muni du produit scalaire standard de $\mathbb{R}^4$).
3. Montrer que $\mathrm{R}(2, 4)$ est difféomorphe à $\mathrm{S}^3 \times \mathrm{S}^2$. On pourra commencer par trouver une application $\mathrm{R}(2, 4) \to \mathrm{TS}^3$.

IV

On munit $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ de son produit scalaire standard. On note S_r la sphère de rayon r dans $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$. Soit M une sous-variété de dimension n dans $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$, passant par l'origine. Le but de l'exercice est de montrer que pour $r > 0$ petit, $\mathrm{M} \cap \mathrm{S}_r$ est difféomorphe à la sphère S^{n-1}.
Soit $\mathrm{F} = \mathrm{T}_0\mathrm{M} \subset \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ et $\mathrm{G} = \mathrm{F}^\perp$.
1. Montrer que près de l'origine, M est le graphe d'une application $u : \mathrm{V} \to \mathrm{G}$, telle que $d_0u = 0$, où V est un voisinage ouvert de 0 dans F. On pourra commencer par montrer que la projection orthogonale de M sur F est un difféomorphisme local.
2. Montrer qu'il existe $\rho > 0$ tel que $|\langle u(x), d_xu(x)\rangle| \leqslant \frac{1}{4}\|x\|^2$ si $\|x\| \leqslant \rho$.
3. Montrer que si $0 < r \leqslant \rho$, alors $\mathrm{M} \cap \mathrm{S}_r$ est une sous-variété de M.
4. Montrer que si $0 < r \leqslant \rho$, alors $\mathrm{Y} = \{(t, x) \in]-2, 2[\times \mathrm{V},\ \|x\|^2 + t^2\|u(x)\|^2 = r^2\}$ est une variété, et que la projection $\mathrm{Y} \to]-2, 2[$ qui à (t, x) associe t est une submersion propre.
5. Conclure.