Partiel du 23/11/2011,
Durée 2 heures.

Exercice 1.

Préliminaires

Soir Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^3$. On considèrera dans cet exercice, uniquement des fonctions à valeurs réelles. On rappelle que pour $0 \leq s < \frac{3}{2}$, l'application

$$u \in H_0^s(\Omega) \mapsto u \in L^p(\Omega), s = 3(\frac{1}{2} - \frac{1}{p})$$

est bien définie et continue.

1. Montrer que pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$,

$$\|u\|_{L^4(\Omega)} \leq C\|u\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{4}}\|u\|_{H^1(\Omega)}^{\frac{3}{4}}$$

En déduire que l'injection

$$u \in H_0^1(\Omega) \mapsto u \in L^4(\Omega)$$

est compacte.

2. Montrer que pour $0 \leq s < \frac{3}{2}$, l'application

$$u \in C_0^\infty(\Omega) \mapsto u \in H^{-s}(\Omega)$$

se prolonge de manière unique en une application continue de $L^q(\Omega)$ dans $H^{-s}(\Omega)$, si

$$s = 3(\frac{1}{q} - \frac{1}{2})$$

On pourra introduire l'exposant conjugué de q, p défini par $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,

Un problème de minimisation

1. Soit $f \in L^2(\Omega)$. On considère la fonctionnelle

$$J : u \in H_0^1(\Omega) \mapsto J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla_x u|^2(x)dx + \frac{1}{4}\int_\Omega (u)^4(x)dx - \int_\Omega f(x)u(x)dx$$

Rappeler pourquoi cette fonctionnelle est continue de $H_0^1(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$.

2. Montrer que

$$\exists C \in \mathbb{R}; \forall u \in H_0^1(\Omega), J(u) \geq C$$

3. Montrer que

$$\lim_{\|u\|_{H^1(\Omega)} \to +\infty} J(u) = +\infty$$

4. On note $I = \inf_{u \in H_0^1(\Omega)} J(u)$. On considère une suite $u_n \in H_0^1(\Omega)$ telle que

$$\lim_{n \to +\infty} J(u_n) = I.$$

5. Rappeler pourquoi il existe une sous suite u_{n_k} et une limite $u \in H_0^1(\Omega)$ telle que u_{n_k} converge faiblement vers u dans H^1.
6. Montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} \int_\Omega u_n^4(x)dx = \int_\Omega u^4(x)dx$$

$$\lim_{n \to +\infty} \int_\Omega f(x)u_n(x)dx = \int_\Omega f(x)u(x)dx$$

7. Montrer que

$$\liminf_{n \to +\infty} \int_\Omega |\nabla_x u_n|^2(x)dx \geq \int_\Omega |\nabla_x u|^2(x)dx$$

8. En déduire

$$\lim_{n \to +\infty} J(u_n) = J(u)$$

9. Montrer que u_n converge vers u dans H^1.

Propriétés du minimiseur

On supposera dans la suite que $f \in C_0^\infty(\Omega)$.

1. On considère $u_0, v_0 \in H_0^1(\Omega)$. On suppose que si $u, v \in H_0^1(\Omega)$ vérifient

$$J(u) = J(v) = \inf_{w \in H_0^1(\Omega)} J(w).$$

En considérant l'application

$$\theta \in \mathbb{R} \mapsto I(\theta) = J(\theta u + (1-\theta)v),$$

Montrer que $u = v$. On notera par la suite u_0 l'unique minimiseur de la fonctionnelle J.

2. Montrer que u_0 vérifie

$$-\Delta u_0 + u_0^3 = f \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega)$$

3. En déduire que $u_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.
4. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_0 \in H^k(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.
5. En déduire que $u_0 \in C^\infty(\Omega)$.