École Normale Supérieure Département de Mathématiques et Applications

Partiel d'Algèbre 1

Durée : 2 heures. Aucun document n'est autorisé.

I. Question de cours. Soit G un groupe fini d'ordre n, et p un nombre premier divisant n. Rappeler la définition d'un p-Sylow de G. Démontrer l'existence d'un p-Sylow de G.

II. Exercice. 1. Rappeler le calcul de l'ordre du groupe $\mathrm{PSL}(n, \mathbb{F}_q)$, où $q = p^r$ pour un nombre premier p. Vérifier que les ordres de $\mathrm{PSL}(3, \mathbb{F}_4)$ et $\mathrm{PSL}(4, \mathbb{F}_2)$ sont égaux.

2. Montrer que $\mathrm{PSL}(4, \mathbb{F}_2) = \mathrm{SL}(4, \mathbb{F}_2)$ admet deux classes de conjugaison distinctes formées d'éléments d'ordre 2 : les transvections et une autre classe dont on donnera un représentant sous forme de Jordan.

3. Montrer que tout élément d'ordre 2 de $\mathrm{PSL}(3, \mathbb{F}_4)$ est image d'un élément d'ordre 2 de $\mathrm{SL}(3, \mathbb{F}_4)$.

4. Montrer que tout élément d'ordre 2 de $\mathrm{SL}(3, \mathbb{F}_4)$ est une transvection.

5. En déduire que $\mathrm{PSL}(3, \mathbb{F}_4)$ et $\mathrm{PSL}(4, \mathbb{F}_2)$ ne sont pas isomorphes.

III. Exercice. Soit G un groupe. On pose $\mathrm{Z}^0(\mathrm{G}) = \{1\}$ et on définit, pour $i \geqslant 1$, $\mathrm{Z}^i(\mathrm{G})$ comme l'ensemble des g de G vérifiant $gxg^{-1}x^{-1} \in \mathrm{Z}^{i-1}(\mathrm{G})$ pour tout x dans G. (En particulier $\mathrm{Z}^1(\mathrm{G}) = \mathrm{Z}(\mathrm{G})$ est le centre de G). Si H est un sous-groupe de G on note $\mathrm{N}_\mathrm{G}(\mathrm{H})$ le normalisateur de H dans G, c'est-à-dire le sous-groupe de G formé des $g \in \mathrm{G}$ vérifiant $g\mathrm{H}g^{-1} \subset \mathrm{H}$.

1. Montrer que $\mathrm{Z}^i(\mathrm{G})$ est un sous-groupe normal de G.

On dit que G est nilpotent s'il existe i tel que $\mathrm{Z}^i(\mathrm{G}) = \mathrm{G}$.

2. Montrer qu'un sous-groupe d'un groupe nilpotent est nilpotent, qu'un quotient d'un groupe nilpotent est nilpotent, qu'un p-groupe fini (c'est-à-dire un groupe d'ordre p^r, où p est premier) est nilpotent.

3. Soit S un p-Sylow d'un groupe fini G. Montrer que pour tout sous-groupe H de G contenant $\mathrm{N}_\mathrm{G}(\mathrm{S})$ on a $\mathrm{N}_\mathrm{G}(\mathrm{H}) = \mathrm{H}$. (On pourra raisonner sur les sous-groupes de Sylow de H.)

4. Soit H un sous-groupe d'un groupe fini nilpotent G, tel que $\mathrm{H} \neq \mathrm{G}$, montrer que $\mathrm{H} \neq \mathrm{N}_\mathrm{G}(\mathrm{H})$.

5. Soit G un groupe fini. Montrer que si, pour tout nombre premier p divisant l'ordre de G, G admet un unique p-Sylow, alors G est isomorphe à un produit de p-groupes.

6. À l'aide des questions précédentes, montrer qu'un groupe fini est nilpotent si et seulement s'il est isomorphe à un produit de p-groupes.