École Normale Supérieure — Département de Mathématiques et Applications

Partiel d'Algèbre 1

Durée : 2 heures. Aucun document n'est autorisé. L'examen est constitué d'un problème unique, les parties I, II et III sont indépendantes. On accordera une grande importance à la qualité de la rédaction.

Le but du problème est de montrer le théorème suivant (Schur-Zassenhaus) : si G est un groupe fini et $N \triangleleft G$ est un sous-groupe normal tel que $|N|$ et $n = [G:N]$ soient premiers entre eux, alors il existe un sous-groupe $H \subset G$, d'ordre n, tel que $G = N \rtimes H$. (On rappelle que cela est le cas si et seulement si $N \triangleleft G$, $N \cap H = 1$ et $NH = G$).

I. Un exemple. Soit G le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures dans $GL(k, \mathbb{F}_q)$, où $k \geqslant 2$ et $q = p^r$ avec p premier. Soit $U \subset G$ le sous-groupe des matrices avec des coefficients égaux à 1 sur la diagonale.

1. Montrer que $U \triangleleft G$ et que $|U|$ et $[G:U]$ sont premiers entre eux.

2. Trouver un sous-groupe $H \subset G$ tel que $G = U \rtimes H$.

3. A-t-on $G = U \times H$?

II. Réduction au cas abélien. Dans toute cette partie, le groupe G est fixé, et on suppose que le théorème est vrai dans tous les groupes d'ordre strictement inférieur à $|G|$. On va montrer qu'alors le théorème est vrai pour G si N est non abélien.

1. Montrer que s'il existe dans G un sous-groupe H d'ordre n, alors $G = N \rtimes H$.

2. Soit P un sous-groupe de Sylow de N. On rappelle que le normalisateur de P dans G est le sous-groupe $N_G(P) = \{g \in G, gPg^{-1} = P\}$.

2a. Montrer que $G = N_G(P)N$.

2b. Montrer que $G/N \simeq N_G(P)/N_N(P)$.

2c. Déduire que le théorème est vrai si $|N_G(P)| < |G|$.

3a. On suppose qu'il existe un sous-groupe $K \subsetneq N$, $K \neq 1$, tel que $K \triangleleft G$. Montrer que $(G/K)/(N/K) \simeq G/N$. Montrer alors que le théorème est vrai pour G.

3b. En déduire que si N n'est pas un p-groupe pour un nombre premier p, alors le théorème est vrai.

4a. (Question de cours) Montrer qu'un p-groupe admet un centre non réduit à 1.

4b. Déduire que si N est non abélien, alors le théorème est vrai.

III. Cohomologie. Soient H un groupe fini et A un groupe abélien. On suppose donnée une action de H sur A par automorphismes, c'est-à-dire un morphisme $\varphi : H \to \mathrm{Aut}(A)$. Soit $n = |H|$.

On appelle 2-cocycle une application $f : H \times H \to A$ telle que pour tous $h_1, h_2, h_3 \in H$ on a

$$-f(h_1, h_2) = f(h_1 h_2, h_3) - f(h_1, h_2 h_3) - \varphi(h_1) f(h_2, h_3).$$

On dit que f est le cobord d'une application $c : H \to A$ si pour tous $h_1, h_2 \in H$ on a

$$f(h_1, h_2) = c(h_1 h_2) - c(h_1) - \varphi(h_1) c(h_2).$$

On dit que f est un 2-cobord s'il existe $c : H \to A$ telle que f soit le cobord de c.

1. Montrer que si f est un 2-cocycle, alors nf est un 2-cobord.

2. Si A est fini et n est premier avec $|A|$, en déduire que si f est un 2-cocycle, alors f est un 2-cobord.

IV. Conclusion. On revient à la démonstration du théorème de Schur-Zassenhaus. On se place dans le cas restant à traiter : N est un sous-groupe abélien de G tel que $N \triangleleft G$, et $|N|$ et $n = [G:N]$ soient premiers entre eux. On pose $H = G/N$.

1. Montrer qu'il existe une action de $H = G/N$ sur N par automorphismes intérieurs, $\varphi : H \to \mathrm{Aut}(N)$.

2. Pour chaque élément $h \in H$ on choisit un représentant $\tilde{h} \in G$ de h dans G. Montrer qu'on définit une application $f : H \times H \to N$ en posant

$$\widetilde{h_1}\widetilde{h_2} = f(h_1, h_2)\widetilde{h_1 h_2}.$$

3. Trouver une condition sur une application $c : H \to N$, de sorte que l'application $\Phi : H \to G$ définie par $\Phi(h) = c(h)\tilde{h}$ soit un morphisme de groupes.

4. Conclure la démonstration du théorème.