Analyse Fonctionnelle

Partiel du 26 mars 2018
Corrigé

Vrai ou Faux ? (Justifier la réponse)

1. Si (x_n) est une suite bornée d'un espace de Banach réflexif alors il existe une suite extraite qui converge faiblement.
2. Une limite inductive d'une suite strictement croissante d'espaces de Fréchet est métrisable.
3. Si F est un sous-espace vectoriel non dense d'un espace de Banach E, alors il existe une forme linéaire f continue sur E non identiquement nulle, telle que pour tout $x \in F$, $\langle f, x \rangle = 0$.

Solution.

1. Oui - Corollaire A.3.25.
2. Non - Proposition B.2.8.
3. Oui - Corollaire A.2.14.

Exercice 1. *Fonctions de L^1 génériques*

On munit $[0,1]$ de la mesure de Lebesgue λ, et l'on considère l'espace de Banach $X := L^1([0,1])$.

1. Montrer que pour tout $p > 1$, $L^p([0,1])$ est un sous-espace vectoriel de X.

2. Pour $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on pose

$$E_N := \left\{ f \in L^1 \,/\, \forall I \subset [0,1] \text{ borélien}, \int_I |f| \leq N \lambda(I)^{\frac{1}{N}} \right\}.$$

Montrer que E_N est fermé dans X, et que $\displaystyle\bigcup_{p>1} L^p([0,1]) \subset \bigcup_{N \geq 1} E_N$.

3. Pour $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ donné, on considère $f \in E_N$, et $\varepsilon > 0$. On pose

$$g_N : x \in [0,1] \mapsto \frac{1}{x^{1-\frac{1}{2N}}} \cdot$$

Montrer que $f + \varepsilon g_N$ appartient à X, mais n'appartient pas à E_N. En déduire que l'ensemble des fonctions de L^1 qui n'appartiennent à aucun L^p (quelque soit $p > 1$) est dense dans X.

⋆

Solution 1.

1. Si $f \in L^p([0,1])$, alors l'inégalité de Hölder assure que

$$\int_0^1 |f| \leq \left(\int_0^1 |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 1 \right)^{1-\frac{1}{p}} < +\infty\,.$$

Cela prouve que L^p est inclus dans $X = L^1$.

2. Montrons que E_N est fermé. Cela provient du fait que, si $I \subset [0,1]$ est un borélien, alors l'application $f \mapsto \displaystyle\int_I |f|$ est continue sur X, et donc l'image réciproque du segment $[0, N\lambda(I)^{1/N}]$ par cette application est un fermé. On voit que E_N est l'intersection de ces fermés quand I parcourt l'ensemble des boréliens de $[0,1]$, donc est fermé.

Soit à présent $f \in L^p([0,1])$ pour un certain $1 < p \leq \infty$, et montrons qu'il existe un certain E_N qui le contienne. Soit $I \subset [0,1]$ un borélien. On a, toujours par Hölder,

$$\int_I |f| \leq \left(\int_I |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_I 1\right)^{1-\frac{1}{p}} \leq \|f\|_{L^p} \lambda(I)^{1-\frac{1}{p}}.$$

Soit à présent $N \in \mathbb{N}$ tel que $\|f\|_{L^p} \leq N$ et $1 - \frac{1}{p} \geq \frac{1}{N}$ on a donc

$$\lambda(I)^{1-\frac{1}{p}} \leq \lambda(I)^{\frac{1}{N}}$$

pour tout borélien $I \subset [0,1]$. Cela prouve que $f \in E_N$.

3. Observons que pour tout $x \in]0,1]$,

$$\int_0^x |g_N(t)| dt = \int_0^x t^{\frac{1}{2N}-1} dt = 2N x^{\frac{1}{2N}} \,.$$

En particulier, $g_N \in X$, donc $f + \varepsilon g_N$ aussi. Supposons maintenant que $f + \varepsilon g_N \in E_N$. On aurait alors, en écrivant $g_N = \varepsilon^{-1}((f + \varepsilon g_N) - f)$,

$$\int_0^x |g_N(t)| dt \leq \frac{1}{\varepsilon} \left(\int_0^x |f(t)| dt + \int_0^x |f(t) + \varepsilon g_N(t)| dt\right) \leq \frac{2N x^{\frac{1}{N}}}{\varepsilon} \cdot$$

Par conséquent, on aboutit à

$$x^{\frac{1}{2N}} \geq \varepsilon, \quad \forall x \in]0,1] \,,$$

ce qui est absurde, lorsque $x \to 0$.

On peut donc appliquer le théorème de Baire : $\bigcup_{N \geq 1} E_N$ est une union de fermés d'intérieur vide de X, elle est donc d'intérieur vide. Donc l'union des L^p, $p > 1$ est contenu dans un ensemble résiduel de L^1, ce qu'il fallait démontrer.

⋆

Exercice 2. *Distributions homogènes*

– Les questions 2 à 6 sont indépendantes. –

Dans tout cet exercice on considère un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ stable par homothétie, c'est-à-dire tel que $M_\lambda(\Omega) \subset \Omega$ où pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$M_\lambda(x) := \lambda x \,.$$

On dit qu'une fonction f sur $\mathbb{R}^d$ est homogène de degré β sur Ω si

$$\forall x \in \Omega \,, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \,, \quad f(\lambda x) = \lambda^\beta f(x) \,.$$

On rappelle que si $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est une distribution et $\phi \in C^\infty(\Omega', \Omega)$ un difféomorphisme, alors on a $T \circ \phi \in \mathcal{D}'(\Omega')$ avec

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\,, \quad \langle T \circ \phi, \varphi \rangle = \big\langle T, |\det D\phi^{-1}|\ \varphi \circ \phi^{-1} \big\rangle\,.$$

On dit qu'une distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est homogène de degré β si

$$\forall \lambda > 0\,, \quad T \circ M_\lambda = \lambda^\beta T \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}(\Omega)\,.$$

1. Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Montrer que

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\,, \quad \langle T \circ M_\lambda, \varphi \rangle = \frac{1}{\lambda^d} \big\langle T, \varphi\big(\frac{\cdot}{\lambda}\big) \big\rangle\,.$$

2. Soit f une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}^d$, homogène de degré β sur Ω.
   (a) Montrer que
   $$x \cdot \nabla f(x) = \beta f(x) \quad \text{pour tout} \quad x \in \Omega\,.$$
   (b) En déduire que
   $$\sum_{j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_j} \big(x^j f(x)\big) = (d + \beta) f(x)\,.$$
   (c) Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ homogène de degré β. Montrer que
   $$\sum_{j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_j} \big(x^j T\big) = (d + \beta) T \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\Omega)\,.$$
   (On pourra trouver utile de calculer $\Big(\frac{\partial}{\partial \lambda} \varphi\Big(\frac{x}{\lambda}\Big)\Big)_{|\lambda=1}$ *pour* $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$*).*
3. Soit $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$, continue sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, homogène de degré β.
   (a) Montrer que
   $$f(x) = |x|^\beta f\Big(\frac{x}{|x|}\Big)\,,$$
   et que si
   $$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} |f(y)|\, d\sigma(y) = 0$$
   où $d\sigma$ désigne l'élement de surface sur la sphère unité $\mathbb{S}^{d-1}$, alors $f = 0$ sur $\mathbb{R}^d$.
   (b) En déduire qu'une fonction continue, non identiquement nulle, homogène de degré β est localement intégrable sur $\mathbb{R}^d$ si et seulement si $\beta > -d$.
4. Montrer que δ_0 est homogène sur $\mathbb{R}^d$ de degré $-d$.
5. Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ homogène de degré β. Montrer que pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^d$, la distribution $\partial^\alpha T$ est homogène de degré $\beta - |\alpha|$.
6. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ homogène de degré $\beta > -d$. On veut montrer qu'il existe une distribution $\dot{T} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ homogène de degré β qui prolonge T à $\mathbb{R}^d$, c'est-à-dire telle que
   $$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})\,, \quad \langle \dot{T}, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle\,.$$
   On définit, pour toute fonction $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, la fonction $R_\beta \phi$ par
   $$\forall x \in \mathbb{R}^d\,, \quad R_\beta \phi(x) := \int_0^\infty \phi(rx) r^{\beta + d - 1}\, dr\,.$$

Soit $\zeta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^+ \setminus \{0\})$ positive non identiquement nulle et soit la fonction χ définie par

$$\chi(x) := c\,\zeta(|x|) \quad \text{avec} \quad c := \Big(\int \zeta(t)\frac{dt}{t}\Big)^{-1}.$$

(a) Vérifier que l'application

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)\,, \quad \langle \dot{T}, \phi\rangle = \langle T, \chi R_\beta \phi\rangle$$

définit une distribution $\dot{T}$ sur $\mathbb{R}^d$.

(b) Montrer que pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$,

$$\langle \dot{T}, \phi\rangle = \langle T, \phi\rangle\,.$$

(c) Montrer que $\dot{T}$ homogène de degré β et conclure.

⋆

Solution 2.

1. Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. On a

$$|\det DM_\lambda^{-1}| = |\det DM_{\lambda^{-1}}| = \lambda^{-d}$$

et donc

$$\langle T \circ M_\lambda, \varphi\rangle = \lambda^{-d}\big\langle T, \varphi \circ M_{\lambda^{-1}}\big\rangle\,.$$

2. (a) Il suffit de dériver par rapport à λ la relation

$$f(\lambda x) = \lambda^\beta f(x)$$

puis choisir $\lambda = 1$.

(b) On a

$$\sum_{j=1}^d \partial_j\big(x^j f(x)\big) = x \cdot \nabla f(x) + d\, f(x)$$

et le résultat suit.

(c) On a pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et tout $\lambda > 0$

$$\Big\langle T, \varphi\big(\frac{\cdot}{\lambda}\big)\Big\rangle = \lambda^{d+\beta}\langle T, \varphi\rangle\,.$$

Pour pouvoir appliquer le théorème de dérivation sous le crochet on considère une fonction $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^+ \setminus \{0\})$ à valeurs dans $[0, 1]$, égale à 1 au voisinage de 1. Soit alors la fonction

$$\psi(x, \lambda) := \varphi\big(\frac{x}{\lambda}\big)\theta(\lambda)\,.$$

Le théorème de dérivation sous le crochet implique que

$$\begin{aligned}
\langle\sum_{j=1}^d \partial_j(x^j T), \varphi\rangle &= \langle T, -x \cdot \nabla\varphi\rangle \\
&= \langle T, \partial_\lambda \varphi(\cdot/\lambda)_{|\lambda=1}\rangle \\
&= \langle T, \partial_\lambda\big(\varphi(\cdot/\lambda)\theta(\lambda)\big)_{|\lambda=1}\rangle \\
&= \partial_\lambda \langle T, \psi(\cdot, \lambda)\rangle_{|\lambda=1} \\
&= \partial_\lambda\big(\lambda^{d+\beta}\theta(\lambda)\big)_{|\lambda=1}\langle T, \varphi\rangle \\
&= (d + \beta)\langle T, \varphi\rangle\,.
\end{aligned}$$

3. (a) On écrit

$$f(x) = f\Big(|x|\frac{x}{|x|}\Big) = |x|^\beta f\Big(\frac{x}{|x|}\Big)\cdot$$

En particulier pour tout R on a

$$\int_{B(0,R)} |f(x)|\,dx = \int_0^R r^{\beta+d-1} dr \int_{\mathbb{S}^{d-1}} |f(y)|\,d\sigma(y)$$

donc si $\displaystyle\int_{\mathbb{S}^{d-1}} |f(y)|\,d\sigma(y) = 0$ alors $f = 0$ sur $\mathbb{R}^d$.

(b) La restriction de la fonction continue f à la sphère unité (qui est un compact de $\mathbb{R}^d$) est bornée donc

$$|f(x)| \leq \max_{|y|=1} |f(y)|\,|x|^\beta\,.$$

Par ailleurs

$$\int_{B(0,R)} |f(x)|\,dx = \int_0^R r^{\beta+d-1} dr \int_{\mathbb{S}^{d-1}} |f(y)|\,d\sigma(y)\,.$$

Si

$$\int_{B(0,R)} |f(x)|\,dx < \infty$$

on a donc

$$\int_0^R r^{\beta+d-1} dr < \infty$$

ce qui équivaut à $\beta > -d$ (sinon $\displaystyle\int_{\mathbb{S}^{d-1}} |f(y)|\,d\sigma(y) = 0$ et donc $f = 0$ sur $\mathbb{R}^d$).

4. On a

$$\begin{aligned}\langle \delta_0 \circ M_\lambda, \varphi\rangle &= \lambda^{-d}\big\langle \delta_0, \varphi \circ M_{\lambda^{-1}}\big\rangle\\ &= \lambda^{-d}\varphi(0)\\ &= \lambda^{-d}\langle \delta_0, \varphi\rangle\end{aligned}$$

donc δ_0 est homogène sur $\mathbb{R}^d$ de degré $-d$.

5. Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ homogène de degré β. Montrons que $\partial_j T$ est homogène de degré $\beta-1$. Le cas général s'obtiendra par récurrence immédiate. On a

$$\begin{aligned}\langle (\partial_j T) \circ M_\lambda, \varphi\rangle &= -\lambda^{-d}\langle T, \partial_j(\varphi \circ M_{\lambda^{-1}})\rangle\\ &= -\lambda^{-d-1}\langle T, (\partial_j\varphi) \circ M_{\lambda^{-1}}\rangle\\ &= -\lambda^{-1}\langle T \circ M_\lambda, \partial_j\varphi\rangle\\ &= -\lambda^{-1}\langle \lambda^\beta T, \partial_j\varphi\rangle\\ &= \lambda^{\beta-1}\langle \partial_j(T), \varphi\rangle\end{aligned}$$

et le résultat suit.

6. (a) On vérifie sans difficulté que

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)\,, \quad \langle \dot{T}, \phi\rangle = \langle T, \chi R_\beta \phi\rangle$$

définit une distribution sur $\mathbb{R}^d$ puisque T est une distribution sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, et par la formule de Leibniz pour tout multi-indice α il existe une constante C dépendant de α et β telle que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d} |\partial^\alpha(\chi R_\beta \phi)| \leq C \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \sup_{\gamma\leq\alpha} |\partial^\gamma \phi(x)|\,.$$

(b) On a pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$

$$
\begin{aligned}
\langle T, \chi R_\beta \phi \rangle &= \Big\langle T, \chi \int_0^\infty \phi(r\cdot) r^{\beta+d-1}\, dr \Big\rangle \\
&= \int_0^\infty \big\langle r^\beta T, \chi \phi(r\cdot) r^{d-1} \big\rangle\, dr \\
&= \int_0^\infty \big\langle T \circ M_r, \chi \phi(r\cdot) r^{d-1} \big\rangle\, dr \\
&= \int_0^\infty \big\langle T, \chi(\cdot/r) \phi \big\rangle \frac{dr}{r} \\
&= \Big\langle T, \phi \int_0^\infty \chi(\cdot/r) \frac{dr}{r} \Big\rangle \\
&= \langle T, \phi \rangle \,.
\end{aligned}
$$

On a donc bien $\dot{T}_{\mathbb{R}^d \setminus \{0\}} = T$.

(c) Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ et soit $\lambda > 0$ on a

$$
\begin{aligned}
\langle \dot{T} \circ M_\lambda, \varphi \rangle &= \lambda^{-d} \langle \dot{T}, \varphi(\cdot/\lambda) \rangle \\
&= \lambda^{-d} \langle T, \chi R_\beta \varphi(\cdot/\lambda) \rangle \,.
\end{aligned}
$$

Mais

$$
R_\beta \varphi(x/\lambda) = \int_0^\infty \varphi(rx/\lambda) r^{\beta+d} \frac{dr}{r}
$$

et en posant $sx = rx/\lambda$ on voit que

$$
R_\beta \varphi(x/\lambda) = \lambda^{\beta+d} R_\beta \varphi(x)
$$

donc

$$
\langle \dot{T} \circ M_\lambda, \varphi \rangle = \langle T, \lambda^\beta \chi R_\beta \varphi \rangle = \lambda^\beta \langle \dot{T}, \varphi \rangle
$$

et donc $\dot{T}$ est homogène de degré β. On a donc construit une distribution homogène de degré β qui prolonge T à $\mathbb{R}^d$.