FIMFA 2ème année **Premier semestre, 2013-2014**
Cours de Laure Saint-Raymond – Analyse des équations aux dérivées partielles

Examen partiel
vendredi 15 novembre

A. Exercice: topologies faibles

1) *En dimension infinie, la topologie faible est toujours strictement plus faible que la topologie forte.* Soit $(E, |\cdot|)$ un espace vectoriel normé de dimension infinie. On note S la sphère unité de E et B la boule unité fermée de E :

$$S := \{x \in E,\ |x| = 1\}, \qquad B := \{x \in E,\ |x| \leq 1\}.$$

On note E' le dual topologique de E (l'ensemble des formes linéaires continues $E \to \mathbb{C}$).

a) Soit V_0 un voisinage de l'origine pour la topologie faible. Exhiber un espace vectoriel non trivial contenu dans V_0.

b) Soit $x \in E$, tel que $|x| < 1$. En utilisant la question a), prouver que B est incluse dans l'adhérence de S pour la topologie faible.

c) Soit $x \in E$. Prouver par la forme analytique du théorème de Hahn-Banach l'existence de $f \in E'$ tel que $|f|_{E'} = |x|$ et $\langle f, x\rangle = |x|^2$.

d) Déduire de la question c) l'égalité, pour tout $x \in E$,

$$|x| = \sup_{\substack{f \in E' \\ |f|_{E'} \leq 1}} \langle f, x\rangle.$$

e) En utilisant la question d), montrer que la boule unité fermée B est fermée pour la topologie faible.

f) Conclure en décrivant l'adhérence faible de S, et justifier le titre de cette partie 1.

2) *La topologie faible et la topologie forte peuvent coincider.* Etant donné (X, τ) un espace vectoriel topologique, on note (X, τ_w) l'espace X muni de sa topologie faible. Montrer l'égalité $(X, \tau_w) = (X, (\tau_w)_w)$, c'est-à-dire: prouver que la topologie faible de la topologie faible est simplement la topologie faible.

3) Expliquer pourquoi il n'y a pas de contradiction entre les questions 1 et 2.

B. Navier-Stokes stationnaire et convergence vers l'équilibre en $2d$

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$. On considère le système d'équations dit de Navier-Stokes stationnaire :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(u \otimes u) - \Delta u + \nabla p = f, \\ \operatorname{div} u = 0, \end{cases} \tag{1}$$

où $f \in \mathcal{V}'_\sigma$ est un champ de forces extérieures donné. On note (λ_j^2) les valeurs propres de l'opérateur de Stokes associé à Ω, avec la convention du cours: $-\Delta e_j - \lambda_j^2 e_j \in \mathcal{V}_\sigma^\perp$.

1) Expliquer pourquoi la suite (λ_j) a un minimum, qu'on note λ_0. Montrer l'inégalité

$$\lambda_0 \|u\|_{L^2} \leq \|u\|_{\mathcal{V}_\sigma}, \quad \text{pour tout} \quad u \in \mathcal{V}_\sigma.$$

2) On définit par récurrence une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{V}_\sigma$ par son premier terme $u_0 = 0$, et la relation de récurrence : "u_{n+1} est l'unique solution dans $\mathcal{V}_\sigma$ du problème de Stokes $-\Delta u_{n+1} + \operatorname{div}(u_n \otimes u_n) - f \in \mathcal{V}_\sigma^\perp$".

   Montrer que la suite (u_n) est bien définie. Prouver qu'il existe une constante c_0 ne dépendant que du domaine Ω telle que si $\|f\|_{\mathcal{V}'_\sigma} \leq c_0$, alors (u_n) est bornée dans $\mathcal{V}_\sigma$ par $2\|f\|_{\mathcal{V}'_\sigma}$.

3) Sous la condition portant sur $\|f\|_{\mathcal{V}'_\sigma}$ de la question 2), montrer que (u_n) converge à extraction près vers une solution $\bar{u} \in \mathcal{V}_\sigma$ de (1).

4) Sous quelle condition, portant sur $\|f\|_{\mathcal{V}'_\sigma}$, a-t-on unicité de la solution de (1) dans $\mathcal{V}_\sigma$?

   On note dans la suite u la solution de Leray issue de la donnée initiale $u_0 \in \mathcal{H}$ avec terme de force f. On note $w = u - \bar{u}$, où $\bar{u}$ est la solution stationnaire des questions 1 à 4.

5) Prouver l'inégalité, pour $t \in \mathbb{R}_+$,

$$\frac{1}{2}\|w(t)\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|w(s)\|_{\mathcal{V}_\sigma}^2 \, ds \leq \frac{1}{2}\|w(0)\|_{L^2}^2 + \int_0^t \langle \operatorname{div}\big(w(s) \otimes \bar{u}\big), \, w(s) \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}} \, ds.$$

6) En déduire une condition sur f qui implique l'inégalité, pour $t \in \mathbb{R}_+$,

$$\|w(t)\|_{L^2}^2 \leq e^{-\lambda_0^2 t} \|w(0)\|_{L^2}^2.$$

7) Dans les questions 1 à 6 ci-dessus, que peut-on généraliser à la dimension 3 ?