Corrigé du partiel

Exercice 1

1. Posons $h(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \psi(x-k)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.
Au voisinage de tout point x, seul un nombre fini de termes de la somme ne sont pas identiquement nuls (puisque ψ est à support compact). La fonction h est donc bien définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$, puisqu'au voisinage de tout point, il s'agit d'une somme finie de fonctions $\mathcal{C}^\infty$.
Pour tout x, $h(x) > 0$. En effet, il existe $k \in \mathbb{Z}^n$ tel que $||x-k||_\infty \leq 1/2$. Puisque ψ vaut 1 sur $[-1/2; 1/2]^n$, cela entraîne que

$$\psi(x-k) = 1$$

et donc, comme ψ est à valeurs positives, $h(x) \geq \psi(x-k) \geq 1$.
Pour tout $K \in \mathbb{Z}^n$ et tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a $h(x+K) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \psi(x-(k-K)) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \psi(x-k) = h(x)$.
Posons $\chi(x) = \psi(x)/h(x)$. Il s'agit d'une fonction $\mathcal{C}^\infty$ à support compact. Pour la même raison que précédemment, $\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \chi(x-k)$ est bien définie. De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \qquad \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \chi(x-k) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \frac{\psi(x-k)}{h(x-k)} = \frac{1}{h(x)} \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \psi(x-k) = 1.$$

2. a) La fonction $u \to ||u||_{L^2_{ul}}$ est bien une norme.
Elle est homogène car $||.||_{L^2}$ l'est. Elle vérifie l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned}
\forall u, v \in L^2_{ul}(\mathbb{R}^n) \qquad ||u+v||_{L^2_{ul}} &= \sup_{k\in\mathbb{Z}^n} ||\chi_k u + \chi_k v||_{L^2} \\
&\leq \sup_{k\in\mathbb{Z}^n} (||\chi_k u||_{L^2} + ||\chi_k v||_{L^2}) \\
&\leq \sup_{k\in\mathbb{Z}^n} ||\chi_k u||_{L^2} + \sup_{k\in\mathbb{Z}^n} ||\chi_k v||_{L^2} \\
&= ||u||_{L^2_{ul}} + ||v||_{L^2_{ul}}.
\end{aligned}$$

Elle est de plus séparante. En effet, si $||u||_{L^2_{ul}} = 0$, alors $||\chi_k u||_{L^2} = 0$ pour tout k, donc $\chi_k u = 0$ pour tout k.
D'après la définition de χ, $u = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \chi_k u$. Donc si $||u||_{L^2_{ul}} = 0$, $u = 0$.
L'homogénéité et l'inégalité triangulaire entraînent que $L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$ est stable par multiplication par un scalaire et addition. C'est donc un espace vectoriel. Montrons qu'il est complet.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy d'éléments de $L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Pour tous k, n, m,

$$||\chi_k(u_n - u_m)||_{L^2} \leq ||u_n - u_m||_{L^2_{ul}}.$$

Pour tout k, la suite $(\chi_k u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc de Cauchy dans $L^2(\mathbb{R}^n)$. Elle converge vers une fonction de $L^2(\mathbb{R}^n)$, qu'on note v_k.
La fonction v_k possède les propriétés suivantes :

- elle est nulle en-dehors du support de χ_k,
- $||v_k||_{L^2} = \lim_{n\to+\infty} ||\chi_k u_n||_{L^2} \leq \lim_{n\to+\infty} ||u_n||_{L^2_{ul}}$,
- pour tout n, $||v_k - \chi_k u_n||_{L^2} = \lim_{m\to+\infty} ||\chi_k(u_m - u_n)||_{L^2} \leq \sup_{m\geq n} ||u_m - u_n||_{L^2_{ul}}$.

Posons

$$u = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} v_k.$$

Nous allons d'abord montrer que u appartient à $L^2_{ul}(\mathbb{R}^n)$. Nous montrerons ensuite que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers u.
Soit $k \in \mathbb{Z}^n$ quelconque. Alors

$$\begin{aligned}
||\chi_k u||_{L^2} &= \left|\left| \sum_{l\in\mathbb{Z}^n, \mathrm{Supp}(v_l)\cap\mathrm{Supp}(\chi_k)\neq\emptyset} v_l \chi_k \right|\right|_{L^2} \\
&\leq \sum_{l\in\mathbb{Z}^n, \mathrm{Supp}(v_l)\cap\mathrm{Supp}(\chi_k)\neq\emptyset} ||v_l \chi_k||_{L^2} \\
&\leq \sum_{l\in\mathbb{Z}^n, \mathrm{Supp}(\chi_l)\cap\mathrm{Supp}(\chi_k)\neq\emptyset} ||v_l \chi_k||_{L^2} \\
&\leq ||\chi||_{L^\infty} \sum_{l\in\mathbb{Z}^n, \mathrm{Supp}(\chi_l)\cap\mathrm{Supp}(\chi_k)\neq\emptyset} ||v_l||_{L^2} \\
&\leq ||\chi||_{L^\infty} \,\mathrm{Card}\{l \text{ tq } \mathrm{Supp}(\chi_l)\cap\mathrm{Supp}(\chi_k)\neq\emptyset\} \lim_n ||u_n||_{L^2_{ul}}.
\end{aligned}$$

Comme $\mathrm{Card}\{l \text{ tq } \mathrm{Supp}(\chi_l)\cap\mathrm{Supp}(\chi_k)\neq\emptyset\}$ est un nombre fini indépendant de k, ce raisonnement démontre que $||\chi_k u||_{L^2}$ est borné par un réel fini indépendant de k. Donc $u \in L^2_{ul}$.
Nous montrons maintenant la convergence $u_n \to u$ dans $L^2_{ul}(\mathbb{R}^n)$. Pour tout k,

$$\begin{aligned}
||\chi_k(u-u_n)||_{L^2} &= \left|\left| \chi_k\left(\sum_{l\in\mathbb{Z}^n} v_l\right) - \chi_k\left(\sum_{l\in\mathbb{Z}^n} \chi_l u_n\right) \right|\right|_{L^2} \\
&\leq \sum_{l\in\mathbb{Z}^n} ||\chi_k(v_l - \chi_l u_n)||_{L^2} \\
&\leq \sum_{\mathrm{Supp}(\chi_k)\cap\mathrm{Supp}(\chi_l)\neq\emptyset} ||\chi_k(v_l - \chi_l u_n)||_{L^2} \\
&\leq ||\chi_k||_\infty \sum_{\mathrm{Supp}(\chi_k)\cap\mathrm{Supp}(\chi_l)\neq\emptyset} ||v_l - \chi_l u_n||_{L^2} \\
&\leq ||\chi_k||_\infty \sum_{\mathrm{Supp}(\chi_k)\cap\mathrm{Supp}(\chi_l)\neq\emptyset} \sup_{m\geq n} ||u_m - u_n||_{L^2_{ul}} \\
&\leq ||\chi||_\infty \,\mathrm{Card}\{l \text{ tq} \,\mathrm{Supp}(\chi_k)\cap\mathrm{Supp}(\chi_l)\neq\emptyset\} \sup_{m\geq n} ||u_m - u_n||_{L^2_{ul}}.
\end{aligned}$$

La borne supérieure est indépendante de k et tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Donc

$$||u - u_n||_{L^2_{ul}} \to 0 \qquad \text{quand } n \to +\infty.$$

b) Les fonctions constantes (non-nulles) appartiennent à $L^2_{ul}(\mathbb{R}^n)$ mais pas à $L^2(\mathbb{R}^n)$. C'est aussi le cas, pour tout $\alpha \in]0; n/2[$, de la fonction $x \to ||x||^{-\alpha}$.
c) L'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ est dense dans $L^2_{ul}(\mathbb{R}^n)$. Démontrons-le.
Soit $u \in L^2_{ul}(\mathbb{R}^n)$. Soit $\epsilon > 0$ quelconque.
Pour tout $k \in \mathbb{Z}^n$, soit $v_k \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que $||u_{|\operatorname{Supp}(\chi_k)} - v_{k|\operatorname{Supp}(\chi_k)}||_{L^2} < \epsilon$. Une telle fonction existe : $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $L^2(\mathbb{R}^n)$. Si on considère la fonction $\tilde{u}$ qui vaut u sur $\operatorname{Supp}(\chi_k)$ et 0 ailleurs, elle est donc à distance au plus ϵ, en norme L^2, d'une certaine fonction $\mathcal{C}^\infty$. Cette dernière fonction $\mathcal{C}^\infty$ est un choix possible pour v_k.
Posons $v = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \chi_k v_k$. C'est une fonction bien définie (la somme est localement finie) et de classe $\mathcal{C}^\infty$.
Pour tout k,

$$\begin{aligned}
||\chi_k(u-v)||_{L^2} &= \left|\left| \sum_{l\in\mathbb{Z}^n} \chi_k\chi_l(u-v_l) \right|\right|_{L^2} \\
&\leq \epsilon \operatorname{Card}\{l \text{ tq } \operatorname{Supp}(\chi_l) \cap \operatorname{Supp}(\chi_k) \neq \emptyset\} ||\chi||_\infty.
\end{aligned}$$

Donc $||u-v||_{L^2_{ul}}$ est majoré par $C\epsilon$, où C est une constante indépendante de ϵ. Donc $||u-v||_{L^2_{ul}}$ peut être arbitrairement petit, si on choisit ϵ petit. Cela démontre la densité.
L'ensemble $\mathcal{C}^\infty_0(\mathbb{R}^n)$ n'est pas dense dans $L^2_{ul}(\mathbb{R}^n)$. En effet, la fonction $u : x \to 1$ ne peut pas s'approximer par une fonction à support compact : quelle que soit v à support compact, $||\chi_k(u-v)||_{L^2} = ||\chi||_{L^2}$ pour une infinité de valeurs de k, ce qui entraîne :

$$\forall v \in \mathcal{C}^\infty_0(\mathbb{R}^n) \qquad ||u-v||_{L^2_{ul}} \geq ||\chi||_{L^2}$$

Exercice 2

1. Soit $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.
Le nombre d'éléments $q \in \mathbb{Z}^n$ tels que $|k-q| \leq 2$ est égal à 5^n. Donc, en utilisant le fait que $\operatorname{Op}(p)$ est continu de L^2 vers L^2,

$$\begin{aligned}
||A||_{L^2} &\leq \sum_{|k-q|\leq 2} ||\chi_k \operatorname{Op}(p)\chi_q u||_{L^2} \\
&\leq ||\chi_k||_{L^\infty} \sum_{|k-q|\leq 2} ||\operatorname{Op}(p)\chi_q u||_{L^2} \\
&\leq ||\chi||_{L^\infty} \sum_{|k-q|\leq 2} ||\operatorname{Op}(p)||_{L^2\to L^2} \, ||\chi_q u||_{L^2} \\
&\leq 5^n ||\chi||_{L^\infty} ||\operatorname{Op}(p)||_{L^2\to L^2} \, ||u||_{L^2_{ul}}.
\end{aligned}$$

2. a) La fonction $B_{k,q}$ est à support compact inclus dans $\operatorname{Supp}(\chi_k)$. Donc, par Hölder,

$$||B_{k,q}||_{L^2} \leq ||1_{\operatorname{Supp}\chi_k}||_{L^2} ||B_{k,q}||_{L^\infty} = ||1_{\operatorname{Supp}\chi}||_{L^2} ||B_{k,q}||_{L^\infty}.$$

Soit $\tilde{\chi} \in \mathcal{C}^\infty_0(\mathbb{R}^n)$ une fonction telle que $\tilde{\chi} = 1$ sur le support de χ. Cette fonction vérifie $\tilde{\chi}_q\chi_q = \chi_q$ pour tout q.

Pour tout x,

$$\begin{aligned}
B_{k,q}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^n}\chi_k(x)\int p(x,\xi)e^{ix.\xi}\widehat{\chi_q u}(\xi)d\xi \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n}\chi_k(x)\int p(x,\xi)e^{ix.\xi}\left(\int \chi_q(y)u(y)e^{-iy.\xi}dy\right)d\xi \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n}\chi_k(x)\int p(x,\xi)e^{ix.\xi}\left(\int \tilde{\chi}_q(y)\chi_q(y)u(y)e^{-iy.\xi}dy\right)d\xi \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n}\chi_k(x)\int p(x,\xi)e^{i(x-y).\xi}\tilde{\chi}_q(y)\chi_q(y)u(y)dyd\xi \\
&= \int K(x,y)\chi_q(y)u(y)dy
\end{aligned}$$

si on pose

$$K(x,y) = \frac{\chi_k(x)\tilde{\chi}_q(y)}{(2\pi)^n}\int e^{i(x-y).\xi}p(x,\xi)d\xi.$$

Toutes les fonctions sont à support compact, sauf u qui est à décroissance rapide ; il n'y a donc pas de problème de définition.
b) On peut faire l'hypothèse que $\operatorname{Supp}\chi$ est inclus dans $B(0,3/4)$ (où la boule est à comprendre au sens de la norme L^∞). On peut alors choisir $\tilde{\chi}$ de sorte que $\operatorname{Supp}\tilde{\chi}\subset B(0,1)$.
Si $\chi_k(x)\tilde{\chi}_q(y)\neq 0$, on a $|x-k|\leq 3/4$ et $|y-q|\leq 1$. Donc

$$|x-y|\geq |k-q|-7/4.$$

Puisque $|k-q|\geq 3$, $7/4\leq \frac{7}{12}|k-q|$ et

$$|x-y|\geq \frac{5}{12}|k-q|.$$

c) Soit α un multi-indice quelconque. On intègre par parties :

$$\begin{aligned}
K(x,y) &= \frac{\chi_k(x)\tilde{\chi}_q(y)}{(2\pi)^n}\frac{1}{i^\alpha(x-y)^\alpha}\int \partial_\xi^\alpha[e^{i(x-y).\xi}]p(x,\xi)d\xi \\
&= \frac{\chi_k(x)\tilde{\chi}_q(y)}{(2\pi)^n}\frac{(-1)^\alpha}{i^\alpha(x-y)^\alpha}\int e^{i(x-y).\xi}\partial_\xi^\alpha p(x,\xi)d\xi.
\end{aligned}$$

Si $|\alpha|>n$, $\partial_\xi^\alpha p(x,\xi)\leq c(1+||\xi||)^{-(n+1)}$ donc l'intégrale est convergente et majorée en module par une semi-norme de p, qu'on note $C(p)$.
Donc, pour tous x,y,

$$|K(x,y)|\leq \frac{C(p)}{(2\pi)^n}\frac{|\chi_k(x)||\tilde{\chi}_q(y)|}{||x-y||^{|\alpha|}}.$$

On a vu que, si ceci était non-nul, on avait $|||x-y|||\geq \delta|k-q|$. Ainsi,

$$|K(x,y)|\leq \frac{C(p)}{\delta^{|\alpha|}(2\pi)^n}\frac{||\chi||_{L^\infty}|\tilde{\chi}_q(y)|}{|k-q|^{|\alpha|}}.$$

Sur $\{k, q \text{ tq } |k-q| \geq 2\}$, il existe $c > 0$ tel que $|k-q| \geq c\langle k-q\rangle$. En choisiant α tel que $|\alpha| = n+1$ et en posant

$$C_4 = \frac{C(p)}{(c\delta)^{n+1}(2\pi)^n}||\chi||_{L^\infty},$$

on a l'inégalité demandée.
Pour tout x,

$$\begin{aligned} |B_{k,q}(x)| &= \left|\int K(x,y)\chi_q(y)u(y)dy\right| \\ &\leq \frac{C_4}{\langle k-q\rangle^{n+1}}\int |\tilde{\chi}_q(y)\chi_q(y)u(y)|\,dy \\ &\leq \frac{C_4}{\langle k-q\rangle^{n+1}}||\tilde{\chi}_q||_{L^2}||\chi_q u||_{L^2} \end{aligned}$$

ce qui donne le résultat voulu avec $C_5 = C_4||\tilde{\chi}_q||_{L^2}$.
d)

$$||B_{k,q}||_{L^2} \leq C_3||B_{k,q}||_{L^\infty} \leq \frac{C_3C_5}{\langle k-q\rangle^{n+1}}||\chi_q u||_{L^2} \leq \frac{C_3C_5}{\langle k-q\rangle^{n+1}}||u||_{L^2_{ul}}.$$

3. On combine les résultats des questions 1. et 2. Pour tout k,

$$\begin{aligned} ||\chi_k \operatorname{Op}(p)u||_{L^2} &= \left|\left|A + \sum_{|k-q|\geq 3} B_{k,q}\right|\right|_{L^2} \\ &\leq ||A||_{L^2} + \sum_{|k-q|\geq 3}||B_{k,q}||_{L^2} \\ &\leq \left(C_1 + \sum_{|k-q|\geq 3}\frac{C_2}{\langle k-q\rangle^{n+1}}\right)||u||_{L^2_{ul}}. \end{aligned}$$

En prenant la borne supérieure sur k et en posant $C_6 = C_1 + \sum_{|k-q|\geq 3}\frac{C_2}{\langle k-q\rangle^{n+1}} < +\infty$, on obtient, pour toute u,

$$||\operatorname{Op}(p)u||_{L^2_{ul}} \leq C_6||u||_{L^2_{ul}}.$$

Donc $\operatorname{Op}(p) : L^2_{ul} \to L^2_{ul}$ est bien un opérateur continu. De plus, en reprenant les définitions des C_j, on voit que C_6 est majorée par une fonction ne dépendant que de semi-normes de p dans S^0h.

Exercice 3

1. Pour tout $j \in \mathbb{N}$, le support de $\xi \to \chi(2^{-j}\xi)$ est inclus dans

$$\{\xi \in \mathbb{R} \text{ tq } 2^{j-1/2} \leq |\xi| \leq 2^{j+1/2}\}.$$

Tout compact de $\mathbb{R}^n$ n'intersecte qu'un nombre fini de ces ensembles. La somme qui définit a ne contient donc, au voisinage de chaque (x,ξ), qu'un nombre fini de termes non-identiquement nuls. Elle est donc bien définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ (puisque chaque terme est $\mathcal{C}^\infty$).

On peut de plus dériver sous le signe somme, ce qui donne, pour tous α, β

$$\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x,\xi) = (-i)^{|\alpha|} \sum_{j=1}^{+\infty} 2^{(|\alpha|-|\beta|)j} \exp(-i2^j x) \partial^\beta \chi(2^{-j}\xi)$$

Pour tout ξ, si $|\xi| < 2^{1/2}$, alors, pour tout $j \geq 1$, $\xi \notin \mathrm{Supp}(\chi(2^{-j}.))$, ce qui implique $\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x,\xi) = 0$. En revanche, si $|\xi| \geq 2^{1/2}$, il existe un unique $j_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$2^{j_0-1/2} \leq |\xi| < 2^{j_0+1/2}$$

Pour tout $j \neq j_0$, $\xi \notin \mathrm{Supp}(\chi(2^{-j}.))$ donc

$$\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x,\xi) = (-i)^{|\alpha|} 2^{(|\alpha|-|\beta|)j_0} \exp(i2^{j_0} x) \partial^\beta \chi(2^{-j_0}\xi).$$

Comme $2^{j_0} \leq 2^{1/2}|\xi| \leq 2^{1/2}(1+|\xi|)$, si $|\alpha| \geq |\beta|$,

$$\begin{aligned} \left|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x,\xi)\right| &\leq 2^{(|\alpha|-|\beta|)j_0} ||\partial^\beta \chi||_{L^\infty} \\ &\leq 2^{(|\alpha|-|\beta|)/2} ||\partial^\beta \chi||_{L^\infty} (1+|\xi|)^{|\alpha|-|\beta|}. \end{aligned}$$

Si $|\alpha| < |\beta|$, en utilisant le fait que $|\xi| \geq 2^{1/2}$, on a que $2^{j_0} \geq 2^{-1/2}|\xi| \geq (1+|\xi|)/(2^{1/2}+1)$. Donc

$$\begin{aligned} \left|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x,\xi)\right| &\leq 2^{(|\alpha|-|\beta|)j_0} ||\partial^\beta \chi||_{L^\infty} \\ &\leq (2^{1/2}+1)^{-|\alpha|+|\beta|} ||\partial^\beta \chi||_{L^\infty} (1+|\xi|)^{|\alpha|-|\beta|}. \end{aligned}$$

Dans chaque cas, on a bien une inégalité de la forme voulue.
La fonction $\partial_x a(x,\xi)$ n'est pas bornée sur $\mathbb{R}^2$. En effet, on a vu que, pour tout $j_0 \geq 1$, tout x et tout ξ tel que $2^{j_0-1/2} \leq |\xi| < 2^{j_0+1/2}$,

$$|\partial_x a(x,\xi)| = 2^{j_0} \chi(2^{-j_0}\xi).$$

En particulier, si $|\xi| = 2^{j_0}$, $|\partial_x a(x,\xi)| = 2^{j_0}$. Donc $\partial_x a$ n'est pas bornée. Ainsi, $a \notin S^0$ et $a \notin \mathcal{C}_b^\infty(\mathbb{R}^2)$.
2. On utilise la formule de Plancherel :

$$\begin{aligned} ||f_N||_{L^2}^2 &= \frac{1}{(2\pi)^n} ||\hat{f}_N||_{L^2}^2 \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \left|\left| \sum_{j=2}^N \frac{1}{j} \hat{f}_0(.-2^j) \right|\right|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

Pour tout $j \geq 2$, $\hat{f}_0(.-2^j)$ est à support inclus dans $B(2^j, 1/2)$. Ces ensembles sont disjoints deux à deux. Ainsi,

$$||f_N||_{L^2}^2 = \frac{1}{(2\pi)^n} \sum_{j=2}^N \left|\left| \frac{1}{j} \hat{f}_0(.-2^j) \right|\right|_{L^2}^2$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n} \sum_{j=2}^{N} \frac{1}{j^2} \left|\left|\hat{f}_0\right|\right|_{L^2}^2$$
$$= ||f_0||_{L^2}^2 \sum_{j=2}^{N} \frac{1}{j^2}.$$

La série $\sum_{j\geq 2} \frac{1}{j^2}$ converge, donc la valeur qu'on vient d'obtenir est uniformément bornée en N par une certaine constante $c > 0$.
3. Calculons, pour tout j, $\mathrm{Op}(a)\,[\exp(i2^j.)f_0]$:

$$\mathrm{Op}(a)\left[\exp(i2^j.)f_0\right](x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int a(x,\xi) e^{ix.\xi} \hat{f}_0(\xi - 2^j) d\xi.$$

Le support de $\hat{f}_0(. - 2^j)$ est inclus dans $B(2^j, 1/2)$ donc, si $\hat{f}_0(\xi - 2^j) \neq 0$, cela entraîne

$$2^{j-1/4} \leq 2^j - 1/2 \leq |\xi| \leq 2^j + 1/2 \leq 2^{j+1/4}$$

donc, si $l = j$, on a $\chi(2^{-l}\xi) = 1$ et, si $l \neq j$, $\chi(2^{-l}\xi) = 0$.
Ainsi, $a(x,\xi)\hat{f}_0(\xi - 2^j) = \exp(-i2^j x)\hat{f}_0(\xi - 2^j)$. Donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{Op}(a)\left[\exp(i2^j.)f_0\right](x) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{ix.(\xi - 2^j)} \hat{f}_0(\xi - 2^j) d\xi \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{ix.\xi} \hat{f}_0(\xi) d\xi \\
&= \mathcal{F}^{-1}(f_0)(x) \\
&= f_0(x).
\end{aligned}$$

Donc, pour tout j, $\mathrm{Op}(a)\,[\exp(i2^j.)f_0] = f_0$. En appliquant ce résultat à f_N, on a donc :

$$\mathrm{Op}(a)[f_N] = \left(\sum_{j=2}^{N} j^{-1}\right) f_0$$

4. Comme $\sum_{j\geq 2} j^{-1}$ diverge, la norme dans L^2 de $\mathrm{Op}(a)f_N$ tend vers $+\infty$ lorsque $N \to +\infty$, alors que la norme de f_N reste bornée (par la question 2.). C'est donc que $\mathrm{Op}(a)$ n'est pas borné sur L^2.

Exercice 4

1. L'ensemble H^s_{ul} est un espace de Banach. La démonstration est exactement identique à celle faite dans la question 2. de l'exercice 1. Il suffit de remplacer L^2 par H^s (qui est aussi un espace complet).
On reprend les notations de l'exercice 2. La même démonstration qu'à la question 1. de cet exercice montre que $||A||_{H^s} \leq C_1 ||u||_{H^{s+m}_{ul}}$. Il suffit d'utiliser le fait que $\mathrm{Op}(p)$ est continu de H^{s+m} vers H^s, au lieu d'utiliser la continuité de L^2 vers L^2.

On fixe maintenant α un multi-indice quelconque et on estime $||\partial^\alpha B_{k,q}||_{L^2}$.
On a, toujours avec les notations de l'exercice 2 :

$$B_{k,q}(x) = \int \partial_x^\alpha K(x,y)\chi_q(y)u(y)dy.$$

Le noyau $\partial_x^\alpha K(x,y)$ s'écrit comme une combinaison linéaire de fonctions de la forme

$$\frac{\partial^\beta \chi_k(x)\tilde{\chi}_q(y)}{(2\pi)^n} \int \xi^\gamma e^{i(x-y).\xi} \partial_x^{\alpha-\beta-\gamma} p(x,\xi)d\xi,$$

pour β, γ tels que $\beta + \gamma \leq \alpha$.
On peut appliquer à chacune de ces fonctions le même raisonnement qu'à l'exercice 2. et on en déduit que, pour tout M assez grand, il existe C_4 tel que

$$|\partial_x^\alpha K(x,y)| \leq \frac{C_4}{\langle k-q\rangle^M} |\tilde{\chi}_q(y)|, \quad \forall x,y \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n.$$

Cela entraîne

$$\begin{aligned} |\partial_x^\alpha B_{k,q}(x)| &\leq \frac{C_4}{\langle k-q\rangle^M} \int \tilde{\chi}_q(y)\chi_q(y)u(y)dy \\ &\leq \frac{C_4}{\langle k-q\rangle^M} ||\tilde{\chi}_q||_{H^{-(s+m)}} ||\chi_q u||_{H^{s+m}}. \end{aligned}$$

On en conclut, de même que dans l'exercice 2., qu'il existe C_2 telle que

$$||\partial_x^\alpha B_{k,q}||_{L^2} \leq \frac{C_2}{\langle k-q\rangle^M} ||u||_{H_{ul}^{s+m}},$$

où M est toujours n'importe quel entier assez grand.
Ce résultat démontre que $\sum_{|k-q|\geq 3} B_{k,q}$ appartient à $H^\infty(\mathbb{R}^n)$ et que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, la norme de cette fonction dans $H^t(\mathbb{R}^n)$ est majorée par $D_t||u||_{H_{ul}^{s+m}}$ pour une certaine constante D_t indépendante de k.
En combinant ce résultat avec $||A||_{H^s} \leq C_1||u||_{H_{ul}^{s+m}}$, on obtient, pour tout k :

$$||\chi_k \operatorname{Op}(p)u||_{H^s} \leq (C_1 + D_s)||u||_{H_{ul}^{s+m}}$$

donc

$$||\operatorname{Op}(p)u||_{H_{ul}^s} \leq (C_1 + D_s)||u||_{H_{ul}^{s+m}}.$$

2. Soit $u \in W^{m,\infty}(\mathbb{R}^n)$. Montrons qu'on a $u \in H_{ul}^m(\mathbb{R}^n)$.
On suppose que la norme de $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ est définie par $||v||_{W^{m,p}} = \sup_{|\alpha|\leq m} ||\partial^\alpha v||_{L^p}$. Toutes les autres définitions possibles sont équivalentes.
Pour tout $k \in \mathbb{Z}^n$, pour des constantes $c_{\alpha,\beta}$ indépendantes de k :

$$||\chi_k u||_{H^m} = \sup_{|\alpha|\leq m} ||\partial^\alpha(\chi_k u)||_{L^p}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sup_{|\alpha|\le m} \left|\left| \sum_{\beta\le\alpha} c_{\alpha,\beta}\partial^\beta\chi_k\partial^{\alpha-\beta}u \right|\right|_{L^p} \\
&\le \sup_{|\alpha|\le m} \sum_{\beta\le\alpha} |c_{\alpha,\beta}| \left|\left|\partial^\beta\chi_k\partial^{\alpha-\beta}u\right|\right|_{L^p} \\
&\le \sup_{|\alpha|\le m} \sum_{\beta\le\alpha} |c_{\alpha,\beta}| \, ||\partial^\beta\chi_k||_{L^p} \left|\left|\partial^{\alpha-\beta}u\right|\right|_{L^\infty} \\
&\le \left(\sup_{|\alpha|\le m} \sum_{\beta\le\alpha} |c_{\alpha,\beta}| \, ||\partial^\beta\chi||_{L^p} \right) ||u||_{W^{m,\infty}}.
\end{aligned}
$$

La majoration trouvée ne dépend pas de k donc $\sup_k ||\chi_k u||_{H^m} < +\infty$ et $u \in H^s_{ul}$.
3. On admet que $H^s(\mathbb{R}^n)$ s'injecte continûment dans $\mathcal{C}^{0,s-n/2}(\mathbb{R}^n)$.
Si $u \in H^s_{ul}(\mathbb{R}^n)$, alors $\chi_k u \in H^s(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{C}^{0,s-n/2}(\mathbb{R}^n)$. Puisque $u = \sum_k \chi_k u$ et puisque cette somme est localement finie, u a la même régularité que les termes de la somme : $u \in \mathcal{C}^{0,s-n/2}(\mathbb{R}^n)$.
4. Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ quelconque. On admet que tout fonction de $\mathcal{C}^{0,\alpha'}(\mathbb{R}^n)$ à support compact inclus dans Ω appartient à $H^\alpha(\mathbb{R}^n)$ et vérifie de plus

$$||u||_{H^\alpha} \le C_\Omega ||u||_{C^{0,\alpha'}}.$$

On vérifie que l'application $u \in \mathcal{C}^{0,\alpha'} \to \chi_k u \in \mathcal{C}^{0,\alpha'}$ est continue. Sa norme, qu'on note M, est indépendante de k.
Ainsi, pour toute $u \in \mathcal{C}^{0,\alpha'}$,

$$
\forall k \in \mathbb{Z}^n \qquad
\begin{aligned}
||\chi_k u||_{H^\alpha} &\le C_{\operatorname{Supp}\chi} ||\chi_k u||_{C^{0,\alpha'}} \\
&\le C_{\operatorname{Supp}\chi} M ||u||_{C^{0,\alpha'}}.
\end{aligned}
$$

La majoration obtenue ne dépendant pas de k, on doit avoir $u \in H^\alpha_{ul}(\mathbb{R}^n)$.