Partiel

Exercice 1.

Soit $\ell^\infty \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites réelles bornées. On munit ℓ^∞ de la norme définie pour $x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ par $\|x\| := \sup_n |x_n|$. Montrer que ℓ^∞ n'est pas séparable.
Indication: on pourra construire une famille non dénombrable d'ouverts non vides disjoints deux à deux (rappelons à ce propos que l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$ n'est pas dénombrable).

Exercice 2.

Soient X un espace métrique complet, et Y un espace métrique. On propose dans cet exercice de démontrer la proposition suivante:

Si $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'applications continues de X dans Y qui converge simplement vers une application $f : X \to Y$, alors l'ensemble des points de continuité de f est dense dans X.

1) Soit $\{F_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ une suite de parties fermées de X qui recouvrent X. Montrer que $\cup_j \operatorname{int}(F_j)$ est dense dans X (on pourra considérer l'ensemble $X \setminus (\cup_j \partial F_j)$).

2) Pour $i \in \mathbb{N}$ et $j \in \mathbb{N}$, on pose

$$G_{i,j} := \left\{ x \in X : d_Y\big(f_n(x), f_i(x)\big) \leq \frac{2^{-j}}{3} \text{ pour tout } n \geq i \right\},$$

et

$$\Omega_j := \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \operatorname{int}(G_{i,j}).$$

Etant donné $j \in \mathbb{N}$, montrer que pour tout $a \in \Omega_j$ il existe un rayon $\rho > 0$ tel que

$$d_Y\big(f(x), f(a)\big) \leq 2^{-j} \text{ pour tout } x \in B_X(a,\rho).$$

3) Conclure.

Exercice 3.

Dans cet exercice, on munit $\mathscr{C}([0,1];\mathbb{R})$ de la distance de la convergence uniforme, et on considère sur $\mathscr{C}([0,1];\mathbb{R})$ l'ordre partiel suivant: nous dirons que $v \leq w$ si $v(x) \leq w(x)$ pour tout $x \in [0,1]$. Pour $v \in \mathscr{C}([0,1];\mathbb{R})$, nous noterons

$$\boldsymbol{\alpha}(v) := \int_0^1 |v(x)|\, dx.$$

Soit $\mathscr{H}$ le sous-espace de $\mathscr{C}([0,1];\mathbb{R})$ donné par

$$\mathscr{H} := \big\{ v \in \mathscr{C}([0,1];\mathbb{R}) : v \text{ est 1-lipschitzienne et } \boldsymbol{\alpha}(v) \leq 1 \big\}.$$

On considère la famille $\mathscr{F}$ des applications croissantes de $[0,1]$ dans $\mathscr{H}$, et on propose de démontrer la propriété suivante:

Toute suite de points de $\mathscr{F}$ admet une sous-suite qui converge simplement vers un point de $\mathscr{F}$.

1) Montrer que $\mathscr{H}$ est une partie compacte de $\mathscr{C}([0,1];\mathbb{R})$.

2) Soit $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de $\mathscr{F}$. Montrer qu'il existe une sous-suite $\{u_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ telle que $\{u_{n_j}(t)\}_{j\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathscr{C}([0,1];\mathbb{R})$ vers un point $u_*(t) \in \mathscr{H}$ pour tout $t \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$.

3) Soit $t \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$. Montrer qu'il existe $u_*^+(t) \in \mathscr{H}$ et $u_*^-(t) \in \mathscr{H}$ telles que

(i) $\{u_*(t_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathscr{C}([0,1];\mathbb{R})$ vers $u_*^+(t)$ pour toute suite $\{t_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ décroissante de $[0,1] \setminus \mathbb{Q}$ convergeant vers t;

(ii) $\{u_*(t_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathscr{C}([0,1];\mathbb{R})$ vers $u_*^-(t)$ pour toute suite $\{t_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ croissante de $[0,1] \setminus \mathbb{Q}$ convergeant vers t;

4) Montrer qu'il existe une constante $\Lambda > 0$ indépendante de n telle que

$$\sum_{i=1}^{M} \boldsymbol{\alpha}\big(u_n(t_{i+1}) - u_n(t_i)\big) \leq \Lambda$$

pour tout entier $M \geq 1$ et tous $t_1, \ldots, t_M \in [0,1]$ tels que $t_1 < t_2 < \ldots < t_M$.

5) Déduire de la question précédente que l'ensemble $D := \{t \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} : u_*^+ \neq u_*^+(t)\}$ est au plus dénombrable.

6) Conclure.

Partiel du 5 novembre 2014

Corrigé

Exercice 1

Pour tout ensemble $E \subset \mathbb{N}$, on définit :

$$\begin{aligned} x_k^{(E)} &= 1 \text{ si } k \in E \\ &= 0 \text{ si } k \notin E \end{aligned}$$

On pose $U_E = B(x^{(E)}, 1/2)$. C'est un ouvert de l^∞.
De plus, les U_E sont disjoints deux à deux. En effet, si $E \neq E'$, il existe k tel que $k \in E$ et $k \notin E'$ (ou l'inverse mais, par symétrie, on peut supposer qu'on est dans ce cas-là). Alors un élément x de $U_E \cap U_{E'}$ doit vérifier $|x_k - 1| < 1/2$ (car $x \in U_E$) et $|x_k| < 1/2$ (car $x \in U_{E'}$). C'est impossible.
Tout ensemble X dense dans ℓ^∞ doit contenir au moins un élément de chaque ouvert U_E (car il intersecte tout ouvert de ℓ^∞). Il existe donc une application $\phi : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to X$ telle que, pour tout E, $\phi(E) \in U_E \cap X$.
Puisque les U_E sont disjoints deux à deux, ϕ est injective. Comme $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable, X non plus.

Exercice 2

L'ensemble $E = [0;1]^{[0;1]}$ est compact pour la topologie produit (d'après le théorème de Tychonov). Chacun de ses sous-ensembles est donc compact si et seulement si il est fermé.
a) Le sous-ensemble E_1 formé des applications affines est compact.
Pour tous $x, y \in [0;1]$ tels que $x \neq y$, définissons :

$$T_{x,y} : f \in E \to \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$$

Ces applications sont continues.
L'ensemble E_1 est l'ensemble des fonctions $f \in E$ telles que $T_{x,y}(f)$ ne dépend pas du choix de (x, y). On a donc :

$$\begin{aligned} E_1 &= \left\{ f \in E \text{ tq } \forall x_1, y_1, x_2, y_2, \text{ si } x_1 \neq y_1, x_2 \neq y_2, \text{ alors } T_{x_1,y_1}(f) - T_{x_2,y_2}(f) = 0 \right\} \\ &= \bigcap_{x_1 \neq y_1, x_2 \neq y_2} (T_{x_1,y_1} - T_{x_2,y_2})^{-1}(\{0\}) \end{aligned}$$

Puisque E_1 est une intersection de fermés de E, c'est aussi un fermé et c'est donc un compact.
b) Le sous-ensemble E_2 formé des applications constantes par morceaux n'est pas fermé et donc pas compact.

En effet, soit $f \in E$ une fonction continue mais pas constante par morceaux. On sait qu'il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions constantes par morceaux qui converge uniformément vers f.
Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f, elle converge aussi simplement vers f. Elle converge donc vers f au sens de la topologie produit. Pour tout n, $f_n \in E_2$. En revanche, $f \notin E_2$. Il existe donc une suite d'éléments de E_2 qui converge vers une limite n'appartenant pas à E_2. Cela implique que E_2 n'est pas fermé.
c) Notons E_3 ce sous-ensemble. Montrons qu'il est fermé, donc compact.

On remarque que $f \notin E_3$ si et seulement si il existe x_1, x_2, x_3 tels que $x_1 < x_2 < x_3$ et $f(x_1) \neq f(x_2), f(x_2) \neq f(x_3)$.
En effet, si de tels x_1, x_2, x_3 existent, f n'est pas constante sur deux morceaux :

- Pour tout $m \in [0;1]$, soit $x_2 \leq m$ et alors f n'est pas constante sur $[0;m]$, puisqu'elle prend au moins deux valeurs différentes sur ce segment ($f(x_1)$ et $f(x_2)$), soit $x_2 > m$ et alors f n'est pas constante sur $]m;1]$, puisqu'elle prend au moins deux valeurs différentes sur cet intervalle ($f(x_2)$ et $f(x_3)$). Donc, pour tout $m \in [0;1]$, f ne peut pas être constante à la fois sur $[0;m]$ et sur $]m;1]$.
- De même, pour tout $m \in [0;1]$, f ne peut pas être constante à la fois sur $[0;m]$ et sur $]m;1]$.

Réciproquement, supposons que f ne vérifie pas cette propriété. Alors f ne peut prendre qu'au plus deux valeurs : sinon il existe x_1, x_2, x_3 tels que $f(x_1), f(x_2), f(x_3)$ sont distincts deux à deux ; on peut supposer $x_1 < x_2 < x_3$ et on voit alors que la propriété considérée est vérifiée.
Si f ne prend en fait qu'une seule valeur, la fonction f est constante et donc en particulier constante sur deux morceaux. Supposons dans la suite que f prend deux valeurs distinctes.
Notons y_1 et y_2 ces deux valeurs.
Si on pose $I_1 = f^{-1}(\{y_1\})$ et $I_2 = f^{-1}(\{y_2\})$, I_1 et I_2 forment une partition de $[0;1]$. Il suffit de montrer que ce sont des intervalles pour montrer que f est constante sur deux morceaux (les deux morceaux étant I_1 et I_2).
Si I_1 n'est pas un intervalle, il existe x_1, x_2, x_3 tels que $x_1 < x_2 < x_3$ et $x_1, x_3 \in I_1$, $x_2 \notin I_1$. On a alors $f(x_1) = y_1 \neq y_2 = f(x_2)$ et $f(x_2) = y_2 \neq y_1 = f(x_3)$. C'est en contradiction avec le fait que f ne vérifie pas la propriété considérée. Donc I_1 est un intervalle. De même pour I_2.
Donc $E - E_3 = \bigcup\limits_{x_1<x_2<x_3} \{f \in E \text{ tq } f(x_1) - f(x_2) \neq 0\} \cap \{f \in E \text{ tq } f(x_2) - f(x_3) \neq 0\}$.
Pour tous x_1, x_2, x_3, $\{f \in E \text{ tq } f(x_1) - f(x_2) \neq 0\} \cap \{f \in E \text{ tq } f(x_2) - f(x_3) \neq 0\}$ est une intersection d'ouverts de E. C'est donc un ouvert de E. Donc $E - E_3$ est une union d'ouverts ; c'est un ouvert. Donc E_3 est fermé.

Exercice 3

1. Pour tout $j \in \mathbb{N}$, ∂F_j est un fermé d'intérieur vide (il est fermé car il est égal au fermé F_j privé de l'ouvert $\mathring{F}_j$ et il est d'intérieur vide car $\widehat{\partial F_j}^{\circ} \subset \mathring{F}_j \subset X - \partial F_j$ donc $\widehat{\partial F_j}^{\circ}$ est d'intersection vide avec ∂F_j, ce qui signifie que c'est l'ensemble vide puisqu'il est inclus dans ∂F_j).
D'après le théorème de Baire, une union dénombrable de fermés d'intérieur vide est d'intérieur vide. Donc $\bigcup\limits_j \partial F_j$ est d'intérieur vide et $X - \left(\bigcup\limits_j \partial F_j\right)$ est dense dans X.

Pour tout $x \in X - \left(\bigcup_j \partial F_j\right)$, il existe j tel que $x \in F_j$ (puisque les F_j recouvrent X). Comme $x \notin \partial F_j$, $x \in \mathrm{int}(F_j)$. Ceci démontre que :

$$X - \left(\bigcup_j \partial F_j\right) \subset \bigcup_j \mathrm{int}(F_j)$$

Le premier ensemble étant dense, le deuxième l'est aussi.
2. Soient $j \in \mathbb{N}$ et $a \in \Omega_j$ quelconques. Montrons l'existence d'un tel ρ.
D'après la définition de Ω_j, il existe $i \in \mathbb{N}$ tel que $a \in \mathrm{int}(G_{i,j})$. Supposons fixé un tel i.
Il existe $\epsilon > 0$ tel que $B_X(a, \epsilon) \subset G_{i,j}$.
Puisque f_i est continue, il existe $\eta > 0$ tel que :

$$(d_X(a,x) < \eta) \quad \Rightarrow \quad \left(d_Y(f_i(a), f_i(x)) < \frac{2^{-j}}{3}\right)$$

Posons $\rho = \min(\epsilon, \eta)$. Pour tout $x \in B_X(a, \rho)$, on a, puisque $x \in B_X(a, \epsilon) \subset G_{i,j}$:

$$\begin{aligned} d_Y(f(x), f_i(x)) &= \lim_{n \to +\infty} d_Y(f_n(x), f_i(x)) \\ &\leq \sup_{n \geq i} d_Y(f_n(x), f_i(x)) \\ &\leq \frac{2^{-j}}{3} \end{aligned}$$

De même :

$$d_Y(f(a), f_i(a)) \leq \frac{2^{-j}}{3}$$

Par inégalité triangulaire, on a donc :

$$\begin{aligned} d_Y(f(x), f(a)) &\leq d_Y(f(x), f_i(x)) + d_Y(f_i(x), f_i(a)) + d_Y(f_i(a), f(a)) \\ &\leq \frac{2^{-j}}{3} + \frac{2^{-j}}{3} + \frac{2^{-j}}{3} = 2^{-j} \end{aligned}$$

3. D'après la question précédente, f est continue sur $\bigcap_{j \in \mathbb{N}} \Omega_j$. En effet, pour tout a dans cet ensemble et pour tout $\epsilon > 0$, il existe $j \in \mathbb{N}$ tel que $2^{-j} < \epsilon$. Comme $a \in \Omega_j$, la question 2. dit qu'il existe $\rho > 0$ tel que, pour tout $x \in B_X(a, \rho)$:

$$d_Y(f(x), f(a)) \leq 2^{-j} < \epsilon$$

L'ensemble Ω_j est un ouvert dense. Démontrons-le.
C'est une union d'ouverts donc un ouvert.
De plus, $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} G_{i,j} = X$ (car, pour tout x, la suite $(f_k(x))_{k \in \mathbb{N}}$ converge donc ses éléments sont à distance au plus $2^{-j}/3$ à partir d'un certain rang i).
Les $G_{i,j}$ sont fermés : pour tous i, j, $G_{i,j} = \bigcap_{n \geq i} \phi_{n,i}^{-1}([0; 2^{-j}/3])$, si on pose $\phi_{n,i}(x) = d_Y(f_n(x), f_i(x))$.
Comme les fonctions $\phi_{n,i}$ sont continues, $G_{i,j}$ est une intersection de fermés. C'est donc un fermé.

On peut donc appliquer la question 1. à $\{G_{i,j}\}_{i\in\mathbb{N}}$ et elle indique que Ω_j est dense.

D'après le théorème de Baire (qu'on peut appliquer car X est complet), une intersection d'ouverts denses est dense donc $\bigcap_{j\in\mathbb{N}} \Omega_j$ est dense dans X. Il est inclus dans l'ensemble des points de continuité de f donc f est continue en un ensemble dense de points.

Exercice 4

1. Nous allons montrer la compacité à l'aide du théorème d'Ascoli.
L'ensemble $[0;1]$ est compact.
La famille $\mathscr{H}$ est équicontinue car elle est composée de fonctions 1-lipschitziennes.
Pour tout $x_0 \in [0;1]$ et toute $v \in \mathscr{H}$:

$$\begin{aligned}
\alpha(v) &= \int_0^1 |v(x)|dx \\
&\geq \int_0^1 (|v(x_0)| - |x-x_0|)dx \\
&= |v(x_0)| - \int_0^1 |x-x_0|dx \\
&\geq |v(x_0)| - 1
\end{aligned}$$

(On a utilisé le fait que $|v|$ était 1-lipschitzienne.)
Puisque $\alpha(v) \leq 1$, on doit avoir $|v(x_0)| \leq 2$.
Ainsi, pour tout $x_0 \in [0;1]$, l'ensemble $\{v(x_0)\}_{v\in\mathscr{H}}$ est d'adhérence compacte dans $\mathbb{R}$: il est inclus dans $[-2;2]$.
Les hypothèses du théorème d'Ascoli sont donc vérifiées : $\mathscr{H}$ est d'adhérence compacte dans $\mathcal{C}([0;1],\mathbb{R})$.
Pour montrer que $\mathscr{H}$ est compacte, il suffit donc de montrer que cette famille est fermée dans $\mathcal{C}([0;1],\mathbb{R})$.
Soit $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathscr{H}$ convergeant vers une limite $v_\infty \in \mathcal{C}([0;1],\mathbb{R})$ (au sens de la norme uniforme). La limite v_∞ est 1-lipschitzienne (la 1-lipschitziannité est une propriété préservée par la convergence simple donc a fortiori par la convergence uniforme).
De plus, l'application α est continue sur $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ car $|\alpha(v_1-v_2)| \leq ||v_1-v_2||_\infty$ pour toutes fonctions v_1, v_2. Donc, si $\alpha(v_k) \leq 1$ pour tout k, on a aussi $\alpha(v_\infty) \leq 1$.
Donc $v_\infty \in \mathscr{H}$.

2. On va procéder par extraction diagonale.
[Remarque : ce procédé étant décrit dans le cours, il n'était pas nécessaire de refaire la démonstration. On pouvait aussi répondre à la question en utilisant la compacité de $\mathscr{H}^{\mathbb{N}}$, qui est une conséquence de la question précédente et du théorème de Tychonov.]
Soit $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite qui parcourt tous les points de $[0;1]\cap\mathbb{Q}$. Nous allons d'abord montrer qu'il existe une suite d'extractions $(\phi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telles que, pour tout k :

$$u_{\phi_1\circ\ldots\circ\phi_k(n)}(t_k) \text{ converge dans } \mathscr{H} \text{ quand } n \to +\infty$$

La construction se fait par récurrence.

Pour $k = 1$, c'est vrai : la suite $\{u_n(t_k)\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite à valeurs dans un compact métrique, $\mathscr{H}$, donc on peut en extraire une sous-suite qui converge dans $\mathscr{H}$.
Si on suppose qu'on a construit $\phi_1, ..., \phi_k$ vérifiant la propriété voulue, on peut construire ϕ_{k+1} : $(u_{\phi_1\circ...\circ\phi_k(n)}(t_{k+1}))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments à valeurs dans $\mathscr{H}$. On peut donc en extraire une sous-suite qui converge dans $\mathscr{H}$; cette extraction fournit ϕ_{k+1}.

On pose $n_j = \phi_1 \circ ... \circ \phi_j(j)$. C'est une extraction. Pour tout k, la suite $(u_{n_j}(t_k))_{j\in\mathbb{N}}$ est une sous-suite de $(u_{\phi_1\circ...\circ\phi_k(n)}(t_k))_{n\in\mathbb{N}}$ si on ne considère que les indices $j \geq k$. Elle converge donc dans $\mathscr{H}$.
La suite $(u_{n_j}(t))_{j\in\mathbb{N}}$ converge donc bien dans $\mathscr{H}$ pour tout $t \in [0;1] \cap \mathbb{Q}$.

3. Nous allons montrer le premier point. La démonstration du deuxième sera identique.
Posons, pour tout $x \in [0;1]$, $u_*^+(t)(x) = \inf\{u_*(t')(x) \text{ tq } t' > t \text{ et } t' \in [0;1] \cap \mathbb{Q}\}$.
C'est une fonction 1-lipschitzienne. En effet, pour tous x, x', puisque les $u_*(t')$ sont 1-lipschitziennes :

$$\begin{aligned}
u_*^+(t)(x) &= \inf\{u_*(t')(x) \text{ tq } t' > t \text{ et } t' \in [0;1] \cap \mathbb{Q}\} \\
&\leq \inf\{u_*(t')(x') + |x - x'| \text{ tq } t' > t \text{ et } t' \in [0;1] \cap \mathbb{Q}\} \\
&= \inf\{u_*(t')(x') \text{ tq } t' > t \text{ et } t' \in [0;1] \cap \mathbb{Q}\} + |x - x'| \\
&= u_*^+(t)(x') + |x - x'|
\end{aligned}$$

donc $u_*^+(t)(x) - u_*^+(t)(x') \leq |x - x'|$.
La même inégalité est aussi vraie si on inverse x et x' donc :

$$|u_*^+(t)(x) - u_*^+(t)(x')| \leq |x - x'|$$

Pour toute suite $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ décroissante de $[0;1]\cap\mathbb{Q}$ convergeant vers t, la suite $(u_*(t_k))_{k\in\mathbb{N}}$ converge simplement en décroissant vers $u_*^+(t)$: pour tout $x \in [0;1]$, la fonction $t' \in]t;1] \cap \mathbb{Q} \to u_*(t')(x)$ est croissante (si $t' < t''$, $u_{n_j}(t') \leq u_{n_j}(t'')$ et cette inégalité passe à la limite donc $u_*(t') \leq u_*(t'')$).
On peut donc appliquer le théorème de Dini : la suite $(u_*(t_k))_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions continues du compact $[0;1]$ vers $\mathbb{R}$. Elle converge simplement en décroissant vers la fonction $u_*^+(t)$ qui est 1-lipschitzienne donc continue : la convergence est uniforme.
Puisque α est continue pour la norme uniforme, la suite $u_*^+(t) = \lim\limits_{k\to+\infty} u_*(t_k)$ vérifie, par passage à la limite, $\alpha(u_*(t)) \leq 1$. Donc $u_*(t) \in \mathscr{H}$ et, pour toute suite $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ décroissant vers t, on a bien la convergence uniforme voulue.

4. Pour tout n, la fonction $u_n : [0;1] \to \mathscr{H}$ est croissante. On a donc, pour tous $t_i < t_{i+1}$, $u_n(t_{i+1}) - u_n(t_i) \geq 0$. Donc :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{M} \alpha(u_n(t_{i+1}) - u_n(t_i)) &= \sum_{i=1}^{M} \int_0^1 (u_n(t_{i+1})(x) - u_n(t_i)(x))dx \\
&= \int_0^1 u_n(t_M)(x)dx - \int_0^1 u_n(t_1)(x)dx \\
&\leq \alpha(u_n(t_M)) + \alpha(u_n(t_1)) \leq 2
\end{aligned}$$

5. On commence par fixer $\epsilon > 0$ et par montrer que l'ensemble des $t \in [0;1] - \mathbb{Q}$ tels que $\alpha(u_*^+(t) - u_*^-(t)) > \epsilon$ est fini.

Supposons que $t'_1 < ... < t'_N$ sont N points de cet ensemble. Notons $t_1, ..., t_{N+1}$ des éléments de $[0;1] \cap \mathbb{Q}$ tels que :

$$t_1 < t'_1 < t_2 < t'_2 < ... < t'_N < t_{N+1}$$

À cause de la façon dont on a défini $u_*^+(t)$ et $u_*^-(t)$ à la question 3., on a, pour tout i :

$$u_*(t_i) \leq u_*^-(t'_i) \leq u_*^+(t'_i) \leq u_*(t_{i+1})$$

Donc :

$$\begin{aligned} N\epsilon &< \sum_i \alpha(u_*^+(t'_i) - u_*^-(t'_i)) \\ &\leq \sum_i \alpha(u_*(t_{i+1}) - u_*(t_i)) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \sum_i \alpha(u_n(t_{i+1}) - u_n(t_i)) \\ &\leq \Lambda \end{aligned}$$

Donc $N < \Lambda/\epsilon$.

On remarque que $D = \bigcup_{s\in\mathbb{N}^*} \{t \in [0;1] - \mathbb{Q} \text{ tq } \alpha(u_*^+(t) - u_*^-(t)) > 1/s\}$: si $\alpha(u_*^+(t) - u_*^-(t)) = 0$, on doit avoir $u_*^+(t) - u_*^-(t) = 0$ presque partout donc $u_*^+ = u_*^-$ puisque les fonctions en question sont continues.

L'ensemble D est donc une union dénombrable d'ensemble finis : D est dénombrable.

6. En reprenant le procédé diagonal de la question 2., on peut construire une suite extraite de $(u_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$, qu'on note $(u_{m_j}(t))$, telle que $(u_{m_j}(t))$ converge dans $\mathscr{H}$ pour tout $t \in D$.

Pour tout $t \in D$, $(u_{m_j}(t))$ converge donc ; on note $u_*(t)$ la limite. Pour tout $t \in [0;1] \cap \mathbb{Q}$, $(u_{m_j}(t))$ converge vers $u_*(t)$ car $(u_{m_j}(t))$ est une sous-suite de $(u_{n_j}(t))$, qui converge vers $u_*(t)$.

Montrons que la suite $(u_{m_j}(t))_{j\in\mathbb{N}}$ converge aussi dans $\mathscr{H}$ pour $t \notin D \cup ([0;1] \cap \mathbb{Q})$ vers une limite $u_*(t)$. Cela conclura puisque, par passage à la limite, u_* sera nécessairement croissante de $[0;1]$ vers $\mathscr{H}$ et donc appartiendra à $\mathscr{F}$.

Soit t fixé tel que $t \notin \mathbb{Q}$ et $t \notin D$. Notons $u_*(t) = u_*^+(t) = u_*^-(t)$ et montrons que $u_{m_j}(t) \to u_*(t)$ quand $j \to +\infty$.

Pour tout $\epsilon > 0$, à cause des propriétés de la question 3., il existe t_1 et t_2 des éléments de $[0;1] \cap \mathbb{Q}$ avec $t_1 < t < t_2$ tels que :

$$||u_*(t_1) - u_*(t)||_\infty < \epsilon/2 \qquad ||u_*(t_2) - u_*(t)||_\infty < \epsilon/2$$

Pour tout j assez grand, on a :

$$\begin{aligned} ||u_{m_j}(t_1) - u_*(t_1)||_\infty < \epsilon/2 \\ ||u_{m_j}(t_2) - u_*(t_2)||_\infty < \epsilon/2 \end{aligned}$$

Pour tout j, on a :

$$u_{m_j}(t_1) \leq u_{m_j}(t) \leq u_{m_j}(t_2)$$

Donc, pour tout j assez grand :

$$u_*(t) - \epsilon \leq u_*(t_1) - \epsilon/2 \leq u_{m_j}(t_1) \leq u_{m_j}(t) \leq u_{m_j}(t_2) \leq u_*(t_2) + \epsilon/2 \leq u_*(t) + \epsilon$$

ce qui implique :

$$||u_{m_j}(t) - u_*(t)||_\infty \leq \epsilon$$