Analyse des EDP

Partiel Novembre 2015

Consignes : i) Essayer de rédiger raisonnablement bien. ii) Indiquer au début de votre copie si vous avez suivi le cours d'Analyse fonctionnelle l'an dernier.

Exercice 1 : espace L^2 uniformément local

1. Soit $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et qui vaut 1 sur le cube $[-1/2, 1/2]^n$. En utilisant la fonction
$$h(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \psi(x-k),$$
montrer qu'il existe une fonction $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que,
$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \chi(x-k) = 1.$$
Etant donné $k \in \mathbb{Z}^n$ on notera χ_k la fonction $\chi_k(x) = \chi(x-k)$.

2. On note $L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions localement L^2. Par définition, l'espace L^2 uniformément local, noté $L^2_{ul}(\mathbb{R}^n)$, est l'espace des fonctions $u \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$ telles que
$$\|u\|_{L^2_{ul}} := \sup_{k\in\mathbb{Z}^n} \|\chi_k u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} < +\infty,$$
où χ_k est définie à la question précédente.

   a) Montrer que $L^2_{ul}(\mathbb{R}^n)$ (muni de cette norme) est un espace de Banach.

   b) Donner des exemples de fonctions qui appartiennent à $L^2_{ul}(\mathbb{R}^n)$ et qui n'appartiennent pas à $L^2(\mathbb{R}^n)$.

   c) Donner un exemple d'espace de fonctions régulières qui est dense dans $L^2_{ul}(\mathbb{R}^n)$. Donner un exemple d'espace de fonctions régulières qui n'est pas dense dans $L^2_{ul}(\mathbb{R}^n)$.

Exercice 2 : continuité sur l'espace L^2 uniformément local

Considérons un symbole $p \in S^0$, c'est-à-dire une fonction $p \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ telle que
$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta p(x,\xi)| \le C_{\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{-|\beta|} \quad \forall \alpha,\beta \in \mathbb{N}^n,\ \forall (x,\xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n.$$
On souhaite montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $u \in L^2_{ul}(\mathbb{R}^n)$,
$$\|\operatorname{Op}(p)u\|_{L^2_{ul}} \le C\|u\|_{L^2_{ul}}. \tag{0.1}$$
Par soucis de simplicité, afin de pouvoir justifier facilement les calculs faits sur des intégrales, nous supposerons que $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et que $p \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. En particulier, dans ce cas on sait que $\operatorname{Op}(u)$ appartient à la classe de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Le but est de démontrer l'estimation (0.1),

où la constante C ne dépend que des semi-normes $M_N(p)$ de p dans S^0, où rappelons que $M_N(p)$ est définie par

$$M_N(p) = \sum_{|\alpha|+|\beta|\leq N} \sup_{(x,\xi)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} (1+|\xi|)^{|\beta|} |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta p(x,\xi)|.$$

Pour cela on fixe $k \in \mathbb{N}$ et on cherche à estimer $\chi_k \operatorname{Op}(u)$. Nous utiliserons la notation $|x|_\infty = \max_{1\leq j\leq n} |x_j|$. L'idée est de d'utiliser la décomposition

$$\chi_k \operatorname{Op}(p)u = A + \sum_{|k-q|_\infty \geq 3} B_{k,q}$$

où

$$A = \sum_{|k-q|_\infty\leq 2} \chi_k \operatorname{Op}(p)\chi_q u, \qquad B_{k,q} = \chi_k \operatorname{Op}(p)\chi_q u.$$

On notera C_ℓ, $\ell = 1, \ldots, 6$, des constantes qui ne dépendent que des semi-normes de p dans S^0 et qui ne dépendent pas de k .

1. Montrer que $\|A\|_{L^2} \leq C_1 \|u\|_{L^2_{ul}}$.
2. Rappelons la notation $\langle\zeta\rangle = (1+|\zeta|^2)^{1/2}$. On souhaite montrer que

(0.2) $$\|B_{k,q}\|_{L^2} \leq \frac{C_2}{\langle k-q\rangle^{n+1}} \|u\|_{L^2_{ul}}.$$

a) Montrer que $\|B_{k,q}\|_{L^2} \leq C_3 \|B_{k,q}\|_{L^\infty}$ et que

$$B_{k,q}(x) = \int K(x,y)\chi_q(y)u(y)\,dy$$

où

$$K(x,y) = \frac{\chi_k(x)\widetilde{\chi}_q(y)}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x-y)\cdot\xi} p(x,\xi) d\xi$$

pour une certaine fonction $\widetilde{\chi} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ vérifiant $\widetilde{\chi} = 1$ sur le support de χ.

b) Montrer que l'on peut faire une hypothèse supplémentaire sur χ et que l'on peut choisir $\widetilde{\chi}$ de sorte que sur le support de $\chi_k(x)\widetilde{\chi}_q(y)$ on a

$$|x-y|_\infty \geq \delta |k-q|_\infty \quad \text{avec} \quad \delta > 0.$$

c) En déduire que

$$|K(x,y)| \leq \frac{C_4}{\langle k-q\rangle^{n+1}} |\widetilde{\chi}_q(y)|, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,$$

puis montrer que

$$|B_{k,q}(x)| \leq \frac{C_5}{\langle k-q\rangle^{n+1}} \|\chi_q u\|_{L^2}.$$

d) En déduire l'inégalité (0.2).

3. Démontrer le résultat souhaité : il existe une constante $C_6 > 0$ telle que

$$\| \operatorname{Op}(p)u\|_{L^2_{ul}} \leq C_6\|u\|_{L^2_{ul}},$$

pour tout $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Exercice 3 : un opérateur non borné sur L^2

Soit $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ telle que

$$\operatorname{supp}\chi \subset \{\xi \in \mathbb{R}\,,\, 2^{-1/2} \leq |\xi| \leq 2^{1/2}\}, \quad \chi(\xi) = 1 \quad \text{si } 2^{-1/4} \leq |\xi| \leq 2^{1/4}.$$

Posons

$$a(x,\xi) = \sum_{j=1}^{+\infty} \exp(-i2^j x)\chi(2^{-j}\xi).$$

1. Montrer que $a \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ vérifie

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x,\xi)| \leq C_{\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{|\alpha|-|\beta|} \quad \forall \alpha,\beta \in \mathbb{N}^2,\ \forall (x,\xi) \in \mathbb{R}^2.$$

   Est-ce que a appartient à S^0 ou à $C_b^\infty(\mathbb{R}^2)$?

2. Soit f_0 une fonction de la classe de Schwartz dont la transformée de Fourier $\widehat{f_0}$ est à support dans l'intervalle $[-1/2, 1/2]$. Pour $N \in \mathbb{N}$ on pose

$$f_N(x) = \sum_{j=2}^{N} \frac{1}{j} \exp(i2^j x) f_0(x).$$

   En utilisant la formule de Plancherel, montrer que

$$\|f_N\|_{L^2}^2 = \Big(\sum_{j=2}^{N} j^{-2}\Big) \|f_0\|_{L^2}^2 \leq c.$$

3. Montrer que

$$\operatorname{Op}(a) f_N = \Big(\sum_{j=2}^{N} j^{-1}\Big) f_0.$$

4. Conclure.

Complément : généralisation de l'exercice 2 aux espaces de Sobolev uniformément locaux

Soit $s \in \mathbb{R}$. Par définition l'espace de Sobolev uniformément local d'ordre s, noté $H^s_{ul}(\mathbb{R}^d)$, est l'espace des distributions $u \in H^s_{loc}(\mathbb{R}^n)$ telles que

$$\|u\|_{H^s_{ul}} := \sup_{k\in\mathbb{Z}^n} \|\chi_k u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} < +\infty,$$

où χ_k est comme définie précédemment. Ces espaces ont été introduits par Kato.

Considérons un symbole $p \in S^m$, c'est-à-dire une fonction $p \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ telle que

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta p(x,\xi)| \leq C_{\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{m-|\alpha|} \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n,\ \forall (x,\xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n.$$

On souhaite montrer que, pour tout $s \in \mathbb{R}$, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|\operatorname{Op}(p)u\|_{H^s_{ul}} \leq C\|u\|_{H^{s+m}_{ul}},$$

pour tout $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, où C ne dépend que de semi-normes de p dans S^m.

Pour cela on procède comme à l'exercice précédent : on introduit la décomposition $\chi_k \operatorname{Op}(u) = A + B$ et on commence par estimer A. Pour estimer B, on montrera ici la propriété suivante : pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}$,

$$\|\partial_x^\alpha B_{k,q}\|_{L^2} \leq \frac{C_d}{\langle k-q\rangle^{n+1}}\|u\|_{H^{s+m}_{ul}}.$$

Complément :
- Soit $m \in \mathbb{N}$. Montrer que $W^{m,\infty}(\mathbb{R}^n) \subset H^m_{ul}(\mathbb{R}^n)$.
- Soit s tel que $n/2 < s < n/2+1$. Montrer que $H^s_{ul}(\mathbb{R}^n) \subset C^{0,s-n/2}(\mathbb{R}^n)$.
- Soit $0 < \alpha < \alpha' < 1$. Montrer que $C^{0,\alpha'}(\mathbb{R}^n) \subset H^\alpha_{ul}(\mathbb{R}^n)$.