Partiel de Géométrie Différentielle, 8 avril 2014

Durée : 2 heures. Calculatrices et documents interdits.

Le sujet est long et il est conseillé de faire un choix entre exercice 3 et exercice 4.

1. OUI/NON

Répondre par OUI/NON aux questions suivantes ET justifier :

1) La réunion de deux hyperplans vectoriels distincts est-elle une sous-variété ?

2) L'image d'une immersion injective est-elle toujours une sous-variété ?

3) L'ensemble des points critiques d'une application C^∞ est-il de mesure nulle ?

4) Toute forme différentielle de degré 2 est-elle le produit de deux formes de degré un ?

5) Existe-t-il sur toute variété une forme différentielle de degré maximal ne s'annulant pas ?

6) Une forme différentielle de degré maximal et ne s'annulant pas peut-elle être exacte ?

2. Existence de fonctions de Morse

Soit M une variété différentielle de dimension n, $f : M \to \mathbb{R}$ une fonction lisse. On rappelle qu'un *point critique* de f est un point x de M tel que $d_x f = 0$.

1– On dit que f est une *fonction de Morse* si elle vérifie la condition suivante : pour tout point critique x, il existe une carte $\varphi : U \to V \subset \mathbb{R}^n$, avec $x \in U$, telle que la forme bilinéaire symétrique $d^2_{\varphi(x)}(f \circ \varphi^{-1})$ est non dégénérée.

Montrer que cette condition est indépendante de la carte choisie.

2– Soit $E \to M$ un fibré vectoriel sur M. Montrer que si $s : M \to E$ est une section lisse de E, alors l'image de s est une sous-variété de E.

3– On considére df comme la section $x \mapsto (x, d_x f)$ du fibré cotangent $T^*M \to M$. Montrer que f est une fonction de Morse si, et seulement si, l'image de df est transverse dans T^*M à l'image de la section nulle $x \mapsto (x, 0)$. (On rappelle que deux sous-variétés X et Y d'une variété Z sont *transverses* si en tout point x de $X \cap Y$, $T_x X + T_x Y = T_x Z$).

4– **Cas d'un ouvert.** Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et f une fonction lisse de U dans $\mathbb{R}$. Montrer que pour presque tout point $a = (a_1, \ldots, a_n)$ de $\mathbb{R}^n$, la fonction $f_a : x \mapsto f(x) - \sum_{i=1}^n a_i x_i$ est une fonction de Morse.

5– **Cas général.** On suppose, sans perte de généralité, que M est une sous-variété de dimension n de $\mathbb{R}^N$. On montre que la fonction $f_p : x \mapsto \|x - p\|^2$ est une fonction de Morse sur M, pour presque tout p. On considére un paramétrage local $U \ni (t_1, \ldots, t_n) \mapsto x(t_1, \ldots, t_n)$ de M et on utilise ces coordonnées pour les calculs locaux. Montrer que x est un point critique de f_p si, et seulement si, $x - p$ est orthogonal à $T_x X$ pour le produit scalaire canonique.

6– Montrer que dans les coordonnées $t_1, \dots, t_n$, on a

$$\frac{\partial^2 f_p}{\partial t_i \partial t_j} = 2\Big(\Big\langle \frac{\partial x}{\partial t_i}, \frac{\partial x}{\partial t_j} \Big\rangle + \Big\langle (x-p), \frac{\partial^2 x}{\partial t_i \partial t_j} \Big\rangle \Big).$$

7– On admet l'existence de fonctions $v_k = v_k(t_1, \dots, t_n)$, avec $k = 1, \dots, N-n$ et $v_k \in \mathbb{R}^N$ tels que, pour tous $t_1, \dots, t_n$, les $v_k(t_1, \dots, t_n)$ forment une base orthonormée de l'orthogonal de $T_{x(t_1,\dots,t_n)}$ dans $\mathbb{R}^N$. On note E l'application de $U \times \mathbb{R}^{N-n}$ dans $\mathbb{R}^N$ définie par $E(t_1, \dots, t_n, u_1, \dots, u_{N-n}) = x(t_1, \dots, t_n) + \sum_{i=1}^{N-n} u_i v_i(t_1, \dots, t_n))$. Calculer $\frac{\partial E}{\partial t_i}$ et $\frac{\partial E}{\partial u_k}$.

8– Montrer que (t,u) est un point critique de E si, et seulement si, $x(t)$ est un point critique dégénéré de $f_{E(t,u)}$.

9– Conclure.

3. Transitivité de $Diff_0(M)$

Soit M une variété différentielle connexe. On dit qu'un difféomorphisme (resp. un difféomorphisme à support compact, i.e. valant l'identité hors d'un compact) ψ est isotope à l'identité et on note $\psi \in Diff_0(M)$ (resp. $\psi \in Diff_0^c(M)$) si et seulement s'il existe $(t,x) \to \psi_t(x)$ de classe C^∞ telle que $\psi_0 = \mathrm{Id}, \psi_1 = \psi$ et, pour chaque t, ψ_t est un difféomorphisme (resp. à support compact).

Ce sont des groupes et on souhaite montrer que $Diff_0(M)$ opère transitivement sur M, i.e. $\forall x, y \in N$ il existe $\psi \in Diff_0(M)$ tel que $\psi(x) = y$.

1– Montrer que $Diff_0^c(]0,1[)$ agit transitivement sur $]0,1[$.

2– On note $(u_1, \bar{u})$ les coordonnées dans $]0,1[^n$. Soit ρ_{x_1,y_1} dans $\mathrm{Diff}_0^c(]0,1[$ tel que $\rho_{x_1,y_1}(x_1) = y_1$. Soit $(x_2, \dots, x_{n-1})$ dans $]0,1[^{n-1}$.

Montrer que, si α est bien choisi dans $C^\infty(]0,1[^{n-1}, [0,1])$, alors

$$(u_1, \bar{u}) \mapsto (\alpha(\bar{u})\rho_{x_1,y_1}(u_1) + (1-\alpha(\bar{u}))u_1, \bar{u})$$

est dans $\mathrm{Diff}_0^c(]0,1[^n)$ et envoie $(x_1, x_2, ..., x_n)$ sur $(y_1, x_2, ..., x_n)$.

3– Montrer que $\mathrm{Diff}_0^c(]0,1[^n)$ agit transitivement sur $]0,1[^n$.

4– En déduire que, pour tout x, il existe un voisinage V_x de x tel que pour tout point y de V_x, il existe un élément ψ de $\mathrm{Diff}_0^c(V_x)$ envoyant x sur y.

5– Conclure.

4. Plongement de Plücker

Le but de cet exercice est de construire un plongement de la Grassmannienne des k-plans d'un espace vectoriel réel E de dimension n, notée $\mathrm{Gr}(k,E)$ dans un certain espace projectif.

On rappelle les faits suivants : $Gr(k, E)$ est l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension k de E. Cet ensemble est muni d'une structure de variété différentielle compacte définie ainsi : soit V un k-plan de E et W un supplémentaire quelconque de V dans E et soit $\varphi_{V,W} : L(V, W) \to U_W, f \mapsto (Id + f)(V)$, où l'on a noté $L(V, W)$ l'espace vectoriel des applications linéaires de V dans W. Alors $\varphi_{V,W}$ est une paramétrisation de $\mathrm{Gr}(k, E)$ au voisinage de V, l'ouvert U_W consiste en les k-plans supplémentaires à W et $\varphi_{V,W}(f)$ est le graphe de f, vu comme sous-espace vectoriel de dimension k de E.

On note $\Lambda^k E$ le degré k de l'algèbre extérieure de E. On pourra au besoin écrire $E = F^*$ et penser à $\Lambda^k E$ comme l'espace des formes k-linéaires alternées sur F.

1– Soit V un k-plan et $(e_1, \dots, e_k)$ une base de V. On considére le multi-vecteur $\varphi(V) = e_1 \wedge \cdots \wedge e_k$ dans $\Lambda^k E$. Montrer que $\varphi(V)$ est indépendant de la base de V choisie, à un scalaire non nul près.

   On note $\psi(V)$ l'image de $\varphi(V)$ dans l'espace projectif $\mathbb{P}(\Lambda^k E)$; $\psi(V)$ dépend donc uniquement de V.

2– Montrer que $\psi : \mathrm{Gr}(k, E) \to \mathbb{P}(\Lambda^k E)$ est un plongement, c'est-à-dire une immersion injective propre.

3– **Cas particulier** On prend $n = 4$ et $k = 2$. Montrer qu'un multivecteur $w \in \Lambda^2 E$ se décompose sous la forme $w = u_1 \wedge u_2$, avec $u_1, u_2 \in E$ si, et seulement si, $w \wedge w = 0$. On pourra voir w comme forme bilinéaire alternée sur le dual de E et appliquer le théorème de réduction de telles formes.

4– En déduire une équation de $\psi(\mathrm{Gr}(2, E))$ dans $\mathbb{P}(\Lambda^2 E)$. On fixera une base (e_1, e_2, e_3, e_4) de E et la base induite $(e_i \wedge e_j)_{1 \leqslant i < j \leqslant 4}$ de $\Lambda^2 E$, on écrira a_{ij} pour la coordonnée devant $e_i \wedge e_j$ dans $\Lambda^2 E$, de sorte qu'un point de $\mathbb{P}(\Lambda^2 E)$ s'écrira avec des coordonnées homogènes $[a_{12} : a_{13} : a_{14} : a_{23} : a_{24} : a_{34}]$.

5– Montrer que $\mathrm{Gr}(2, E)$ est difféomorphe au quotient de $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ par l'action de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ donnée par $(x, y) \mapsto (-x, -y)$. On pourra faire le changement de variables : $x_1 = a_{12} + a_{34}$, $x_2 = a_{23} + a_{14}$, $x_3 = a_{31} + a_{24}$, $y_1 = a_{12} - a_{34}$, $y_2 = a_{23} - a_{14}$, $y_3 = a_{31} - x_{24}$

6– En déduire que $\mathrm{Gr}(2, E)$ est orientable.