Partiel de Géométrie Différentielle, 8 avril 2014

Durée : 2 heures. Calculatrices et documents interdits.

Le sujet est long et il est conseillé de faire un choix entre exercice 3 et exercice 4.

1. OUI/NON

Répondre par OUI/NON aux questions suivantes ET justifier :

1) La réunion de deux hyperplans vectoriels distincts est-elle une sous-variété ?

2) L'image d'une immersion injective est-elle toujours une sous-variété ?

3) L'ensemble des points critiques d'une application C^∞ est-il de mesure nulle ?

4) Toute forme différentielle de degré 2 est-elle le produit de deux formes de degré un ?

5) Existe-t-il sur toute variété une forme différentielle de degré maximal ne s'annulant pas ?

6) Une forme différentielle de degré maximal et ne s'annulant pas peut-elle être exacte ?

Solution :

1) NON, en un point de $H_1 \cap H_2$, l'espace tangent devrait contenir $H_1 \cup H_2$ donc l'espace tout entier. Mais la réunion de deux hyperplans est connexe et l'ensemble des vecteurs vitesses de courbes tracées sur H_1 en un point de $H_1 \setminus H_2$ coincide avec H_1 qui est de codimension 1.

2) NON, il y a l'exemple bien connu du serpent qui se mord le ventre, cf. p. 68 du livre de Jacques Lafontaine, par exemple. Si la source est compacte, ou plus généralement si l'application est propre, c'est bon.

3) NON, par exemple si f est constante. Ne pas confondre valeurs et points critiques.

4) NON, car une telle forme serait de carré nul (car $\alpha \wedge \beta \wedge \alpha \wedge \beta = 0$) et $(dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4)^2 = dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 \neq 0$ n'est donc pas de ce type.

5) NON, c'est une caractérisation courante de l'orientabilité.

6) NON, si la variété est compacte et orientée (par la formule de Stokes, son intégrale serait nulle, ce qui est absurde) ; OUI, pour une variété générale, par exemple $e^x dx$ sur $\mathbb{R}$.

2. Existence de fonctions de Morse

Soit M une variété différentielle de dimension n, $f : M \to \mathbb{R}$ une fonction lisse. On rappelle qu'un *point critique* de f est un point x de M tel que $d_x f = 0$.

1– On dit que f est une *fonction de Morse* si elle vérifie la condition suivante : pour tout point critique x, il existe une carte $\varphi : U \to V \subset \mathbb{R}^n$, avec $x \in U$, telle que la forme bilinéaire symétrique $d^2_{\varphi(x)}(f \circ \varphi^{-1})$ est non dégénérée.

Montrer que cette condition est indépendante de la carte choisie.

2– Soit $E \to M$ un fibré vectoriel sur M. Montrer que si $s : M \to E$ est une section lisse de E, alors l'image de s est une sous-variété de E.

3– On considére df comme la section $x \mapsto (x, d_x f)$ du fibré cotangent $T^*M \to M$. Montrer que f est une fonction de Morse si, et seulement si, l'image de df est transverse dans T^*M à l'image de la section nulle $x \mapsto (x, 0)$. (On rappelle que deux sous-variétés X et Y d'une variété Z sont *transverses* si en tout point x de $X \cap Y$, $T_xX + T_xY = T_xZ$).

4– **Cas d'un ouvert.** Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et f une fonction lisse de U dans $\mathbb{R}$. Montrer que pour presque tout point $a = (a_1, \ldots, a_n)$ de $\mathbb{R}^n$, la fonction $f_a : x \mapsto f(x) - \sum_{i=1}^n a_i x_i$ est une fonction de Morse.

5– **Cas général.** On suppose, sans perte de généralité, que M est une sous-variété de dimension n de $\mathbb{R}^N$. On montre que la fonction $f_p : x \mapsto \|x - p\|^2$ est une fonction de Morse sur M, pour presque tout p. On considére un paramétrage local $U \ni (t_1, \ldots, t_n) \mapsto x(t_1, \ldots, t_n)$ de M et on utilise ces coordonnées pour les calculs locaux. Montrer que x est un point critique de f_p si, et seulement si, $x - p$ est orthogonal à T_xX pour le produit scalaire canonique.

6– Montrer que dans les coordonnées $t_1, \ldots, t_n$, on a

$$\frac{\partial^2 f_p}{\partial t_i \partial t_j} = 2\Big(\Big\langle \frac{\partial x}{\partial t_i}, \frac{\partial x}{\partial t_j} \Big\rangle + \Big\langle (x-p), \frac{\partial^2 x}{\partial t_i \partial t_j} \Big\rangle \Big).$$

7– On admet l'existence de fonctions $v_k = v_k(t_1, \ldots, t_n)$, avec $k = 1, \ldots, N - n$ et $v_k \in \mathbb{R}^N$ tels que, pour tous $t_1, \ldots, t_n$, les $v_k(t_1, \ldots, t_n)$ forment une base orthonormée de l'orthogonal de $T_{x(t_1,\ldots,t_n)}$ dans $\mathbb{R}^N$. On note E l'application de $U \times \mathbb{R}^{N-n}$ dans $\mathbb{R}^N$ définie par $E(t_1, \ldots, t_n, u_1, \ldots, u_{N-n}) = x(t_1, \ldots, t_n) + \sum_{i=1}^{N-n} u_i v_i(t_1, \ldots, t_n))$. Calculer $\frac{\partial E}{\partial t_i}$ et $\frac{\partial E}{\partial u_k}$.

8– Montrer que (t, u) est un point critique de E si, et seulement si, $x(t)$ est un point critique dégénéré de $f_{E(t,u)}$.

9– Conclure.

Solution :

1– Il est clair que x est un point critique de f si, et seulement si, pour toute carte (U, φ) de M contenant x, $\varphi(x)$ est un point critique de $f \circ \varphi^{-1}$. Soient (U_1, φ_1) et (U_2, φ_2) deux cartes contenant x. Notant $y_i = \varphi_i(x)$, $g_i = f \circ \varphi_i^{-1}$, on a $g_1 = g_2 \circ \psi$ où ψ est le difféomorphisme $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ défini sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant y_1 et à valeurs dans un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant y_2 et vérifiant $\psi(y_1) = y_2$. Il s'agit donc de montrer que $d^2_{y_2} g_2$ est non-dégénérée si, et seulement si, $d^2_{y_1} g_1 = d^2_{\psi^{-1}(y_2)}(g_2 \circ \psi)$ est non-dégénérée.

On fait le calcul avec des dérivées seconde, plutôt que des différentielles :

$$\begin{aligned}\partial^2_{ij}(g_2 \circ \psi) &= \partial_i(\sum_k \partial_k g_2 \circ \psi \times \partial_j \psi^k) \\ &= \sum_k(\sum_l \partial_{lk} g_2 \circ \psi \times \partial_i \psi^l \times \partial_j \psi^k + \partial_k g_2 \circ \psi \times \partial_{ij} \psi^k)\end{aligned}$$

En évaluant en $y_1 = \psi^{-1}(y_2)$, le second terme s'annule car y_2 est un point critique de g_2. D'où la formule :

$$\partial^2_{ij} g_1(y_1) = \sum_{k,l} \partial^2_{lk} g_2(y_2) \times \partial_l \psi^i(y_1) \times \partial_k \psi^j(y_1).$$

Comme ψ est un difféomorphisme en y_1, on obtient le résultat.

Variante : On suppose sans perte de généralité que $y_1 = y_2 = 0$. On fera attention à ce que D^2 n'est pas le carré de la différentielle extérieure. On écrit $D(g \circ \psi)(x)\xi = Dg(\psi(x))D\psi(x)\xi$ et

$$D^2(g \circ \psi)(x)(\xi, \eta) = D(D(g(\psi(x))D\psi(x)\xi)\eta =$$
$$D^2 g(\psi(x))(D\psi(x)\xi, D\psi(x)\eta) + Dg(\psi(x))D^2\psi(x)(\xi, \eta)$$

Comme $Dg(0) = 0$ le second terme s'annule, et comme $D\psi(0)$ est inversible, $D^2(g \circ \psi)(0)$ est conjuguée à $D^2(g)(0)$.

2– Si $U \subset M$ est un ouvert de trivialisation du fibré E, on a $p^{-1}(U) \cong U \times \mathbb{R}^k$. De plus, s s'identifie alors à une fonction $U \ni x \mapsto (x, f(x)) \in U \times \mathbb{R}^k$, où f est une fonction lisse sur U à valeurs dans $\mathbb{R}^k$. Donc, l'image de s intersectée avec $\pi^{-1}(U)$ s'identifie dans cette trivialisation au graphe de f au-dessus de U, donc à une sous-variété de $\pi^{-1}(U)$, ce qui conclut.

3– Ceci est une question locale et on suppose donc que M est un ouvert U de $\mathbb{R}^n$. Alors l'image de df s'identifie au graphe de $U \to \mathbb{R}^n, x \mapsto (\partial_1 f(x), \ldots, \partial_n f(x))$ et l'image de la section nulle s'identifie au graphe de $U \to \mathbb{R}^n, x \mapsto 0$. Comme ces deux sous-variétés de $U \times \mathbb{R}^n$ sont de dimension n, il est équivalent de montrer que leurs espaces tangents s'intersectent trivialement pour montrer la transversalité.

Soit donc $x \in U$ un point critique de f. Le tangent à l'image de la section nulle en x s'identifie à T_xU tandis que le tangent à l'image de df en x est l'ensemble des vecteurs $(X, d_x(\partial_1 f)(X), \ldots, d_x(\partial_n f)(X))$, avec X dans T_xX. Ces deux espaces tangents s'intersectent non trivialement si, et seulement si, il existe $X \in T_xU$ non nul, tel que pour $j = 1, \ldots, n$, $d_x(\partial_j f)(X) = 0$. Mais on a $d^2 f(X, Y) = \sum_{i,j} \partial_i(\partial_j f)(x) X^i Y^j = \sum_j d_x(\partial_j f)(X) Y^j$, de sorte que l'équivalence est établie.

4– On considére le gradient $g_a = \nabla f_a$ de f_a, vu comme fonction lisse de U dans $\mathbb{R}^n$. Il est immédiat que f_a est une fonction de Morse si, et seulement si, les points x pour lesquels $g_a(x) = 0$ ne sont pas critiques pour g_a. Autrement dit, f_a est une fonction de Morse si, et seulement si, 0 n'est pas valeur critique de g_a. Mais $g_a = g - a$; donc f_a est une fonction de Morse si, et seulement si, a n'est pas valeur critique de g. Par le lemme de Sard, l'ensemble des valeurs critiques de g est de mesure nulle, ce qui conclut.

5– On a $d_x f_p(v) = 2\langle (x-p), v\rangle$.

6– En coordonnées $t_1, \ldots, t_n$, la formule précédente donne :

$$\frac{\partial f_p}{\partial t_i} = 2\left\langle (x-p), \frac{\partial x}{\partial t_i}\right\rangle.$$

D'où, en dérivant à nouveau,

$$\frac{\partial^2 f_p}{\partial t_j \partial t_i} = 2\left\langle \frac{\partial x}{\partial t_j}, \frac{\partial x}{\partial t_i}\right\rangle + 2\left\langle (x-p), \frac{\partial^2 x}{\partial t_j \partial t_i}\right\rangle.$$

7– On a

$$\frac{\partial E}{\partial t_i} = \frac{\partial x}{\partial t_i} + \sum_{k=1}^{N-n} u_k \frac{\partial v_k}{\partial t_i}$$

et

$$\frac{\partial E}{\partial u_k} = v_k.$$

8– On veut savoir quand les dérivées partielles de E engendrent $\mathbb{R}^N$. Comme les $v_k(t_1, \ldots, t_n)$ forment une base orthonormale, il est nécessaire et suffisant que les $\frac{\partial E}{\partial t_i}$ engendrent un supplémentaire du sous-espace engendré par les v_k (qui est l'orthogonal de $T_x X$). Comme $T_x X$ est lui-même un supplémentaire de l'espace engendré par les v_k, la condition est équivalente à : la matrice des produits scalaires $(\frac{\partial E}{\partial t_i} \cdot \frac{\partial x}{\partial t_j})_{i,j=1,\ldots,n}$ est inversible.

Au vu de la formule précédente, le terme (i,j) de cette matrices est

$$\frac{\partial x}{\partial t_i}\frac{\partial x}{\partial t_j} + \sum_{k=1}^{N-n} u_k \frac{\partial v_k}{\partial t_i}\frac{\partial x}{\partial t_j}.$$

Comme v_k est orthogonal à $\frac{\partial x}{\partial t_j}$, on a $\frac{\partial}{\partial t_i}(v_k \cdot \frac{\partial x}{\partial t_j}) = 0 = \frac{\partial v_k}{\partial t_i}\frac{\partial x}{\partial t_j} + v_k \frac{\partial^2 x}{\partial t_i \partial t_j}$.

Donc le terme (i,j) s'écrit

$$\frac{\partial x}{\partial t_i}\frac{\partial x}{\partial t_j} - \sum_{k=1}^{N-n} u_k v_k \frac{\partial^2 x}{\partial t_i \partial t_j}.$$

Par définition de la fonction E, $x(t)$ est toujours point critique de $f_{E(t,u)}$. De plus, le terme (i,j) de la matrice ci-dessus est égal à celui de la matrice des $\frac{\partial^2 f_p}{\partial t_j \partial t_i}$, pour $p = E(t,u)$. D'où le résultat.

9– Soit p une valeur non critique de E, dont l'existence est garantie par le théorème de Sard. Alors f_p est une fonction de Morse sur l'ouvert paramétré par $(t_1, \ldots, t_n)$. En effet, si $x(t)$ est un point critique de f_p, on a $x(t) - p$ orthogonal à $T_{x(t)}M$, ce qui est équivalent à $p = E(t,u)$ pour un certaion u dans $\mathbb{R}^{N-n}$. La question précédente prouve alors que $x(t)$ est un point critique non dégénéré de $f_{E(t,u)}$. Ainsi, f_p est une fonction de Morse sur l'ouvert paramétré par $(t_1, \ldots, t_n)$. En prenant un recouvrement dénombrable de M par des ouverts de paramétrisation, on élimine ainsi une union dénombrable d'ensembles de mesure nulle ; leur union est encore de mesure nulle.

3. Transitivité de $Diff_0(M)$

Soit M une variété différentielle connexe. On dit qu'un difféomorphisme (resp. un difféomorphisme à support compact, i.e. valant l'identité hors d'un compact) ψ est isotope à l'identité et on note $\psi \in Diff_0(M)$ (resp. $\psi \in Diff_0^c(M)$) si et seulement s'il existe $(t, x) \to \psi_t(x)$ de classe C^∞ telle que $\psi_0 = \mathrm{Id}, \psi_1 = \psi$ et, pour chaque t, ψ_t est un difféomorphisme (resp. à support compact).

Ce sont des groupes et on souhaite montrer que $Diff_0(M)$ opère transitivement sur M, i.e. $\forall x, y \in N$ il existe $\psi \in Diff_0(M)$ tel que $\psi(x) = y$.

1– Montrer que $Diff_0^c(]0, 1[)$ agit transitivement sur $]0, 1[$.

2– On note $(u_1, \bar{u})$ les coordonnées dans $]0, 1[^n$. Soit ρ_{x_1,y_1} dans $\mathrm{Diff}_0^c(]0, 1[$ tel que $\rho_{x_1,y_1}(x_1) = y_1$. Soit $(x_2, \ldots, x_{n-1})$ dans $]0, 1[^{n-1}$.

Montrer que, si α est bien choisi dans $C^\infty(]0, 1[^{n-1}, [0, 1])$, alors

$$(u_1, \bar{u}) \mapsto (\alpha(\bar{u})\rho_{x_1,y_1}(u_1) + (1 - \alpha(\bar{u}))u_1, \bar{u})$$

est dans $\mathrm{Diff}_0^c(]0, 1[^n)$ et envoie $(x_1, x_2, ..., x_n)$ sur $(y_1, x_2, ..., x_n)$.

3– Montrer que $\mathrm{Diff}_0^c(]0, 1[^n)$ agit transitivement sur $]0, 1[^n$.

4– En déduire que, pour tout x, il existe un voisinage V_x de x tel que pour tout point y de V_x, il existe un élément ψ de $\mathrm{Diff}_0^c(V_x)$ envoyant x sur y.

5– Conclure.

Solution :

1– Soient $a, b \in]0, 1[$, f une fonction lisse strictement croissante sur $]0, 1[$ telle que f vaut l'identité sur un voisinage de 0 et de 1 et telle que $f(a) = b$. Alors $\psi : (t, x) \mapsto (1 - t)x + tf(x)$ donne une famille lisse de difféomorphisme à support compact, telle que $\psi_0 = id$ et $\psi_1 = f$.

2– Soit α une fonction lisse sur $]0, 1[^{n-1}$, à support compact et à valeurs dans $[0, 1]$, et telle que $\alpha(x_2, \ldots, x_n) = 1$. On considère

$$\psi : (u_1, \bar{u}) \mapsto (\alpha(\bar{u})\rho_{x_1,y_1}(u_1) + (1 - \alpha(\bar{u})u_1, \bar{u}).$$

Alors, ψ est un difféomorphisme à support compact. En effet, hors d'un certain compact de $]0, 1[^n$, soit α est nulle et donc $\psi(u_1, \bar{u}) = (u_1, \bar{u})$, soit ρ_{x_1,y_1} vaut l'identité et on a la même conclusion. De plus, ψ est un difféomorphisme ; il suffit de montrer que, à $\bar{u}$ fixé, $\beta_{\bar{u}} : u_1 \mapsto \alpha(\bar{u})\rho_{x_1,y_1}(u_1) + (1 - \alpha(\bar{u}))u_1$ est un difféomorphisme de $]0, 1[$

et ceci est vrai car ρ_{x_1,y_1} est un difféomorphisme nécessairement croissant et que $\beta_{\bar{u}}$ vaut l'identité au voisinage de 0 et 1.

Enfin, ψ est isotope à l'identité : il suffit de définir ψ_t par la même formule que ψ, en remplaçant α par $t\alpha$.

3– Par la question précédente, il existe un élément de $\mathrm{Diff}_0^c(]0,1[^n)$ modifiant une unique coordonnée. En opérant de même sur les autres coordonnées et en composant, on obtient le résultat.

4– On prend un voisinage V_x de x difféomorphe à $]0,1[^n$. Les difféomorphismes construits sur $]0,1[^n$ donnent des difféomorphismes sur $\mathrm{Diff}_0^c(V_x)$.

5– En prolongeant les éléments de $\mathrm{Diff}_0^c(V_x)$ par l'identité en dehors de V_x, on obtient des difféomorphismes de M, isotopes à l'identité. Ceci prouve que les orbites de M sous l'action de $\mathrm{Diff}_0(M)$ sont ouvertes. Mais elles sont donc aussi fermées puisque le complémentaire d'une orbite est une union d'orbites. On conclut par connexité de M.

4. Plongement de Plücker

Le but de cet exercice est de construire un plongement de la Grassmannienne des k-plans d'un espace vectoriel réel E de dimension n, notée $\mathrm{Gr}(k,E)$ dans un certain espace projectif.

On rappelle les faits suivants : $Gr(k,E)$ est l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension k de E. Cet ensemble est muni d'une structure de variété différentielle compacte définie ainsi : soit V un k-plan de E et W un supplémentaire quelconque de V dans E et soit $\varphi_{V,W} : L(V,W) \to U_W, f \mapsto (Id+f)(V)$, où l'on a noté $L(V,W)$ l'espace vectoriel des applications linéaires de V dans W. Alors $\varphi_{V,W}$ est une paramétrisation de $\mathrm{Gr}(k,E)$ au voisinage de V, l'ouvert U_W consiste en les k-plans supplémentaires à W et $\varphi_{V,W}(f)$ est le graphe de f, vu comme sous-espace vectoriel de dimension k de E.

On note $\Lambda^k E$ le degré k de l'algèbre extérieure de E. On pourra au besoin écrire $E = F^*$ et penser à $\Lambda^k E$ comme l'espace des formes k-linéaires alternées sur F.

1– Soit V un k-plan et $(e_1,\dots,e_k)$ une base de V. On considére le multi-vecteur $\varphi(V) = e_1 \wedge \cdots \wedge e_k$ dans $\Lambda^k E$. Montrer que $\varphi(V)$ est indépendant de la base de V choisie, à un scalaire non nul près.

On note $\psi(V)$ l'image de $\varphi(V)$ dans l'espace projectif $\mathbb{P}(\Lambda^k E)$; $\psi(V)$ dépend donc uniquement de V.

2– Montrer que $\psi : \mathrm{Gr}(k,E) \to \mathbb{P}(\Lambda^k E)$ est un plongement, c'est-à-dire une immersion injective propre.

3– **Cas particulier** On prend $n = 4$ et $k = 2$. Montrer qu'un multivecteur $w \in \Lambda^2 E$ se décompose sous la forme $w = u_1 \wedge u_2$, avec $u_1, u_2 \in E$ si, et seulement si, $w \wedge w = 0$.

On pourra voir w comme forme bilinéaire alternée sur le dual de E et appliquer le théorème de réduction de telles formes.

4– En déduire une équation de $\psi(\mathrm{Gr}(2,E))$ dans $\mathbb{P}(\Lambda^2 E)$. On fixera une base (e_1, e_2, e_3, e_4) de E et la base induite $(e_i \wedge e_j)_{1 \leqslant i<j \leqslant 4}$ de $\Lambda^2 E$, on écrira a_{ij} pour la coordonnée devant $e_i \wedge e_j$ dans $\Lambda^2 E$, de sorte qu'un point de $\mathbb{P}(\Lambda^2 E)$ s'écrira avec des coordonnées homogènes $[a_{12} : a_{13} : a_{14} : a_{23} : a_{24} : a_{34}]$.

5– Montrer que $\mathrm{Gr}(2,E)$ est difféomorphe au quotient de $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ par l'action de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ donnée par $(x,y) \mapsto (-x,-y)$. On pourra faire le changement de variables : $x_1 = a_{12} + a_{34}$, $x_2 = a_{23} + a_{14}$, $x_3 = a_{31} + a_{24}$, $y_1 = a_{12} - a_{34}$, $y_2 = a_{23} - a_{14}$, $y_3 = a_{31} - x_{24}$

6– En déduire que $\mathrm{Gr}(2,E)$ est orientable.

Solution :

1– Si la base $(f_1, \ldots, f_k)$ vérifie $f_i = \sum_j A_i^j e_j$, alors $f_1 \wedge \cdots \wedge f_k = \det(A) e_1 \wedge \cdots \wedge e_k$.

2– Montrons d'abord l'injectivité : soit V un espace vectoriel et $(e_1, \ldots, e_k)$ une base de V. On note $\omega = e_1 \wedge \cdots \wedge e_k$ et on affirme que $V = \{v \in E : \omega \wedge v = 0\} =: V'$. Clairement, $V \subset V'$. Pour l'inclusion réciproque, complétons la base de V en une base de E : $(e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n)$. Alors soit $v \in V'$. On écrit $v = \sum_{i=1}^n v_i e_i$ et on a $\omega \wedge v = \sum_{i=k+1}^n v_i e_1 \wedge \cdots \wedge e_k \wedge e_i$, d'où $v_i = 0$ pour $i \geqslant k+1$, i.e. $v \in V$. Ceci prouve l'injectivité.

Montrons maintenant que ψ est lisse et une immersion. Soit donc $(e_1, \ldots, e_k)$ une base de V et $(e_{k+1}, \ldots, e_n)$ une base de W, un supplémentaire de V. Si A est une application linéaire de V vers W, une base de $\varphi_{V,W}(A)$ est $(e_1 + Ae_1, \ldots, e_k + Ae_k)$. Donc, restreint à $U_V \cong L(V,W)$, ψ est donné par $L(V,W) \ni A \mapsto \pi((e_1 + Ae_1) \wedge \cdots \wedge (e_k + Ae_k)) \in \mathbb{P}(\Lambda^k E)$, π désignant la projection de $\Lambda^k E$ dans $\mathbb{P}(\Lambda^k E)$. Comme $\theta : L(V,W) \ni A \mapsto (e_1 + Ae_1) \wedge \cdots \wedge (e_k + Ae_k) \in \Lambda^k(E)$ est lisse, ψ aussi. Pour montrer que c'est une immersion, considérons d'abord θ. On a $d_A\theta(M) = \sum_{i=1}^k e_1 \wedge \ldots Me_i \wedge \ldots e_k$. De plus, $Me_i = \sum_{l \geqslant k+1} M_i^l e_l$, d'où $d_A\theta(M) = \sum_{i=1}^k \sum_{l \geqslant k+1} \pm M_i^l e_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{e_i} \wedge \cdots \wedge e_k \wedge e_l$ et ceci prouve que $d_A\theta(M)$ est injectif. Plus précisément, $d_A\theta(M)$ est dans le noyau de $d_{\theta(A)}\pi$ si, et seulement si, $d_A\theta(M)$ est proportionnel à $\theta(A)$, i.e. $\sum e_1 \wedge \cdots \wedge Me_i \wedge \cdots \wedge e_k = \lambda(e_1 + Ae_1) \wedge \cdots \wedge (e_k + Ae_k)$. Mais le second terme a l'unique terme λ devant $e_1 \wedge \cdots \wedge e_k$ alors que le premier terme n'a pas de composantes en $e_1 \wedge \cdots \wedge e_k$. Ceci prouve $\lambda = 0$ et finalement l'immersivité de ψ.

Pour la propreté, il n'y a rien à faire puisque la Grassmannienne est compacte.

3– Clairement, si $w = u_1 \wedge u_2$, alors $w \wedge w = 0$. Réciproquement, on considère w comme une forme bilinéaire alternée sur E^*. Par le théorème de réduction de telles formes, on sait que, dans une certaine base, la matrice de w est diagonale par blocs 2×2, les blocs étant soit nuls, soit la matrice 2×2 avec des 0 sur la diagonale et 1 et -1 sur l'anti-diagonale. De façon plus intrinsèque, cela signifie qu'il existe une base

$(e_1, \dots, e_4)$ de E telle que $w = 0$ ou $w = e_1 \wedge e_2$ ou $w = e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4$. Si $w \wedge w = 0$, le troisième cas est exclu, d'où le résultat.

4– Il s'agit d'écrire l'équation $w \wedge w = 0$ dans $\Lambda^2 E$. On considère $(e_1, \dots, e_4)$ une base de E et on écrit $w = \sum_{i<j} a_{ij} e_i \wedge e_j$. Alors $w \wedge w = (a_{12}a_{34} - a_{13}a_{24} + a_{14}a_{23}) e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4$. C'est l'équation de $\psi(\mathrm{Gr}(2, E))$ dans les coordonnées homogènes $[a_{12} : a_{13} : a_{14} : a_{23} : a_{24} : a_{34}]$ de $\mathbb{P}(\Lambda^2(E))$.

5– En faisant le changement de variables indiquées, l'équation devient $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$ en coordonnées homogènes $[x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3]$ dans $\mathbb{P}(\Lambda^2(E))$. On peut bien sûr identifier E à $\mathbb{R}^4$. Considérons alors l'application θ de $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ dans $\mathbb{P}(\mathbb{R}^6)$ donnée par inclusion dans $\mathbb{R}^6$ puis projection canonique. L'image de θ satisfait l'équation précédente et de plus, θ passe au quotient par l'action de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ donnée dans l'énoncé. On note $\bar{\theta}$ l'application lisse ainsi définie de $(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2)/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ dans $\mathrm{Gr}^2(\mathbb{R}^4)$. Cette application est bijective : à un point $[x_1 : x_2 : x_3 : y_1 : y_2 : y_3]$ vérifiant l'équation, on associe le point $(\frac{x_1}{\|x\|}, \frac{x_2}{\|x\|}, \frac{x_3}{\|x\|}, \frac{y_1}{\|y\|}, \frac{y_2}{\|y\|}, \frac{y_3}{\|y\|})$ dans $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$. Ceci est bien défini, après passage au quotient dans $(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2)/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ et on vérifie que cette application est lisse.

6– Le produit $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ est orientable et l'action de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ respecte cette orientation. Donc le quotient est encore orientable.