Partiel du Cours de logique

2 heures, 13 novembre 2012

Les documents ne sont pas autorisés.

Exercice 1 (Ordinaux et cardinaux)
Soit $\langle I; < \rangle$ un ordre total. Voici quelques notions qu'on utilisera dans cet exercice.

- Soient $\Gamma, \Delta \subseteq I$ des parties de I. La paire (Γ, Δ) est une *coupure* dans I si $\Gamma \cup \Delta = I$, $\Gamma \cap \Delta = \emptyset$ et $\gamma < \delta$ pour tout $\gamma \in \Gamma$ et tout $\delta \in \Delta$.
- Si $A \subseteq I$ et $i \in I \setminus A$, la *coupure induite par i dans* $\langle A; < \rangle$ est donnée par (Γ_i, Δ_i), où $\Gamma_i := \{a \in A \mid a < i\}$ et $\Delta_i = \{a \in A \mid i < a\}$.
- La *cofinalité* d'une coupure (Γ, Δ), notée $\mathrm{cof}(\Gamma, \Delta)$, est la paire de cardinaux (κ, λ) telle que

  $$\kappa = \min\{\mathrm{card}(G) \mid G \subseteq \Gamma \text{ est cofinal dans } \Gamma\} \text{ et } \lambda = \min\{\mathrm{card}(D) \mid D \subseteq \Delta \text{ est coinitial dans } \Delta\}.$$

  (Ici, $D \subseteq \Delta$ est dit *coinitial dans* Δ si pour tout $\delta \in \Delta$ il existe $d \in D$ tel que $d \leq \delta$.)
- Une partie $A \subseteq I$ est *dense* dans I si elle est cofinale et coinitale dans I, et si pour tout $i < j < k$ dans I il existe $a \in A$ tel que $i < a < k$.

1. (a) Soit $\langle I; < \rangle$ un bon ordre. Décrire toutes les coupures dans I, et montrer que $\mathrm{card}(C(I)) = 1 + \mathrm{card}(I)$, où $C(I)$ dénote l'ensemble des coupures dans I.
   (b) Construire un ordre total $\langle I; < \rangle$ et des coupures (Γ_1, Δ_1) et (Γ_2, Δ_2) dans I tels que $\mathrm{card}(I) = \aleph_\omega$, $\mathrm{cof}(\Gamma_1, \Delta_1) = (1, \aleph_2)$ et $\mathrm{cof}(\Gamma_2, \Delta_2) = (\aleph_1, \aleph_0)$.
   (c) Déterminer les triplets de cardinaux (κ, λ, μ) pour lesquels il existe un ordre total $\langle I; < \rangle$ et une coupure (Γ, Δ) dans I tels que $\mathrm{card}(I) = \mu$ et $\mathrm{cof}(\Gamma, \Delta) = (\kappa, \lambda)$.
2. Soient κ et λ deux cardinaux infinis. Sur κ^λ on considère l'ordre défini ainsi : $a = (a_i)_{i<\lambda} < b = (b_i)_{i<\lambda}$ si $a \neq b$ et si $a_{i_0} < b_{i_0}$, où $i_0 = \min\{i \in \lambda \mid a_i \neq b_i\}$. On observe qu'il s'agit d'un ordre total. Soit $\kappa^{<\lambda} := \{(a_i)_{i<\lambda} \in \kappa^\lambda \mid \text{il existe } \delta < \lambda \text{ tel que } a_i = 0 \text{ pour tout } i \geq \delta\}$.
   (a) Montrer que $\kappa^{<\lambda}$ est dense dans κ^λ.
   (b) Déterminer les cofinalités possibles d'une coupure induite par un élément $a \in \kappa^\lambda \setminus \kappa^{<\lambda}$ dans $\kappa^{<\lambda}$.
3. Pour κ un cardinal infini, on définit le *nombre de Dedekind de κ*, noté $\mathrm{Ded}(\kappa)$, comme

   $$\mathrm{Ded}(\kappa) = \sup\{\mathrm{card}(I) \mid \langle I; < \rangle \text{ est un ordre total contenant une partie dense de cardinal } \kappa\}.$$

   (a) Déduire de la partie (2) que pour tout κ infini on a $\mathrm{Ded}(\kappa) \geq \kappa^+$.
   (b) Soit $A \subseteq I$ une partie dense. Montrer l'inégalité suivante :

   $$\mathrm{card}(I) \leq \mathrm{card}(\{(\Gamma, \Delta) \mid (\Gamma, \Delta) \text{ est une coupure dans } \langle A; < \rangle\}).$$

   (c) En déduire que $\mathrm{Ded}(\kappa) \leq 2^\kappa$ pour tout κ. En particulier, $\mathrm{Ded}(\kappa)$ existe.
   (d) Montrer que $\mathrm{Ded}(\aleph_0) = 2^{\aleph_0}$.
   (e) Montrer qu'il existe un ordinal α limite tel que $\mathrm{Ded}(\aleph_\alpha) > \sup_{\beta<\alpha} \mathrm{Ded}(\aleph_\beta)$.

Exercice 2
Soient $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux $\mathcal{L}$-structures. Un *isomorphisme partiel* de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{N}$ est un plongement d'une sous-structure $A \subseteq M$ (son domaine) dans $\mathcal{N}$.

Soit K un ensemble d'isomorphismes partiels de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{N}$. On dit que K a la *propriété du va et vient* si :
- K est non vide.
- Pour tout $f \in K$ et tout $a \in M$ il existe $g \in K$ qui étend f et dont le domaine contient a.
- Pour tout $f \in K$ et tout $b \in N$ il existe $g \in K$ qui étend f et dont l'image contient b.

On appelle *graphe (non orienté)* un ensemble de points appelés *sommets* munis d'une relation binaire R qui est antiréflexive, c'est-à-dire pour tout sommet s, on n'a pas sRs et symétrique, c'est-à-dire pour tous sommets s et t on a sRt si et seulement si tRs. Quand deux sommets sont en relation par R, on dit qu'ils sont reliés par une *arête*.

Un graphe $\mathcal{G} = \langle G; R^{\mathcal{G}} \rangle$ est dit *aléatoire* si pour tous ensembles finis de sommets S_1 et S_2 disjoints, il existe $s \in G$ qui soit relié à tous les points de S_1 et à aucun point de S_2.

1. Montrer que les graphes aléatoires sont axiomatisables au premier ordre dans le langage $\{R\}$ (on notera T leur théorie).
2. Montrer que si $\mathcal{G}$ est un graphe au plus dénombrable il existe un graphe au plus dénombrable $\mathcal{G}' \supseteq \mathcal{G}$ tel que pour toutes parties finies S_1 et S_2 disjointes de G, il existe $s \in G'$ qui soit relié à tous les points de S_1 et à aucun point de S_2. En déduire que T est consistante et admet des modèles dénombrables.
3. Soient $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ deux graphes aléatoires, montrer que l'ensemble des isomorphismes partiels de domaine fini de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{H}$ a la propriété du va et vient.
4. En déduire que T a l'élimination des quanteurs.
5. En déduire aussi que T est $\aleph_0$-catégorique : si $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ sont deux modèles dénombrables de T, alors $\mathcal{M} \cong \mathcal{N}$.
6. Montrer que T est complète.
7. Soit $\mathcal{G} \models T$. Montrer qu'il existe une extension élémentaire $\mathcal{H} \succcurlyeq \mathcal{G}$ satisfaisant aux propriétés suivantes :
   (a) pour toute partie $P \subseteq G$ il existe $h_P \in H$ tel que $\{g \in G \mid \mathcal{H} \models h_P R g\} = P$;
   (b) $\mathrm{card}(H) = 2^{\mathrm{card}(G)}$.
8. Soit $\mathcal{G} \models T$, montrer que tout graphe fini se plonge dans $\mathcal{G}$.