Partiel du cours de logique, 12 novembre 2013. Durée : 2 heures.
Vous n'avez pas le droit d'utiliser de documents.
Vous avez le droit d'utiliser les résultats montrés dans une question précédente.

Dans tous les exercices nous supposerons l'axiome du choix.

Exercice 1. Soit F une fonction strictement croissante définie sur la classe On des ordinaux (munie de l'ordre naturel) et à valeurs dans On. On dit que F est continue en un ordinal limite α si $F(\alpha) = \bigcup_{\beta<\alpha} F(\beta)$. Nous avons montré en cours qu'une telle fonction satisfait $F(\alpha) \geq \alpha$ pour tout ordinal α.

(a) Montrez que si F est continue en tout ordinal de cofinalité $\aleph_0$, alors pour tout ordinal α, il existe $\beta \geq \alpha$ tel que $F(\beta) = \beta$. (N'oubliez pas de traiter le cas "trivial".)

(b) Montrez que si F et G sont des fonctions strictement croissantes définies sur la classe des ordinaux, et qui sont continues en tout ordinal de cofinalité $\aleph_0$, alors pour tout α, il existe $\beta \geq \alpha$ tel que $F(\beta) = G(\beta) = \beta$.

Exercice 2. Soit μ un cardinal infini. On définit par induction sur $n \in \omega$ une suite (λ_n) de cardinaux, par

$$\lambda_0 = \mu, \quad \lambda_{n+1} = 2^{\lambda_n}.$$

On pose $\lambda = \sum_{n\in\omega} \lambda_n$.

(a) Montrez que $\mu^\lambda = \lambda^\lambda = 2^\lambda$.

(b) Montrez que $2^\lambda \leq \lambda^{\aleph_0}$.

(c) Montrez que pour tout cardinal κ,
- si $\aleph_0 \leq \kappa \leq \lambda$, alors $\lambda^{\aleph_0} = \lambda^\kappa = \lambda^\lambda$.
- si $\kappa \geq \lambda$, alors $\lambda^\kappa = 2^\kappa$.

(d) Montrez qu'il existe des cardinaux $\alpha < \beta$ et $\gamma < \delta$ tels que $\alpha^\gamma = \beta^\delta$.

Exercice 3. (Bonus) Si κ est un cardinal limite (i.e., qui n'est pas de la forme μ^+ pour un cardinal $\mu < \kappa$), et $\lambda \geq \mathrm{cof}(\kappa)$, alors

$$\kappa^\lambda = (\bigcup_{\mu<\kappa} \mu^\lambda)^{\mathrm{cof}(\kappa)}.$$

Exercice 4. Soient $\mathcal{L}$ un langage, et φ une formule. Donnez une preuve de

$$\forall v_1 \forall v_2 \varphi \vdash \forall v_2 \forall v_1 \varphi.$$

Exercice 5. Soient $\mathcal{L}$ un langage, et A une $\mathcal{L}$-structure.

(a) Soit $\mathcal{F}$ un ultrafiltre non-principal sur un ensemble infini I. Nous avons un plongement naturel de A dans $A^{\mathcal{F}}$, induit par l'application diagonale $A \to A^I$, qui à a associe l'élément de A^I qui est la fonction constante égale à a. Montrez que ce plongement est un plongement élémentaire.

(b) (a) nous permet de considérer A comme une sous-structure élémentaire de $A^{\mathcal{F}}$ quel que soit l'ultrafiltre $\mathcal{F}$. Soit $\Sigma = \Sigma(v)$ un ensemble de $\mathcal{L}(A)$-formules ayant pour seule variable libre v, et supposons qu'il soit finiment satisfaisable dans A, c'est à dire, si $C \subset \Sigma$ est fini, alors $A \models \exists v \bigwedge_{\varphi \in C} \varphi(v)$. Montrez qu'il existe un ensemble I, un ultrafiltre $\mathcal{F}$ sur I, et un élément $b \in A^{\mathcal{F}}$ tel que $A^{\mathcal{F}} \models \varphi(b)$ pour tout $\varphi \in \Sigma$.

Faites l'un des deux exercices suivants.

Exercice 6. Soient $\mathcal{F}$ un ultrafiltre non-principal sur $I = \mathbb{N}$, $\mathcal{L}$ un langage **dénombrable** et $(M_i)_{i \in I}$ une famille de $\mathcal{L}$-structures. Nous considérons

$$M^* = \prod_{i \in I} M_i / \mathcal{F}.$$

Nous allons montrer que si $B \subset M^*$ est dénombrable, et si $\Sigma = \Sigma(v)$ est un ensemble de $\mathcal{L}(B)$-formules (ayant pour seule variable libre v) qui est finiment réalisable (dans M^* – voir la définition dans l'exercice précédent), alors il existe $b \in M^*$ tel que $M^* \models \varphi(b)$ pour tout $\varphi \in \Sigma$. Pour cela, nous fixons d'abord une énumération des éléments de Σ en mentionnant explicitement les nouvelles constantes, de la façon suivante : nous prenons une suite $(\varphi_n(v, \bar{y}_n), \bar{a}^n)$ $(n \in \mathbb{N})$ où chaque φ_n est une $\mathcal{L}$-formule avec seules variables libres $v, \bar{y}_n$, $\bar{a}^n$ est un uplet de B de même longueur que $\bar{y}_n$, et les formules $\varphi_n(v, \bar{a}^n)$ énumèrent les formules de Σ. Nous fixons des représentants $(\bar{a}^n_i)_i$ (dans $\prod_{i \in I} M_i$) pour chaque uplet $\bar{a}^n$.

(a) Expliquez brièvement pourquoi on peut trouver une telle énumération – i.e., pourquoi $\mathrm{Card}(\Sigma) \leq \aleph_0$.

(b) Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $S(n) = \{i \in \mathbb{N} \mid M_i \models \exists v \bigwedge_{j=1}^{n} \varphi_j(v, \bar{a}^j_i)\}$. Montrez que les $S(n)$ sont dans $\mathcal{F}$ et forment une suite décroissante.

(c) Soit $(b_i)_{i \in I}$ la suite définie de la façon suivante :
– si $i \notin S(0)$, on prend n'importe quoi pour b_i ;
– si $i \in S(0)$, soit m maximal tel que $m \leq i$ et $i \in S(m)$; prenons $b_i \in M_i$ satisfaisant toutes les formules $\varphi_j(v, \bar{a}^j_i)$ pour $j \leq m$.

Montrez que $(b_i)_{\mathcal{F}}$ satisfait (dans M^*) toutes les formules de Σ.

Exercice 7. Soit $\mathcal{L} = \{+, -, 0\}$ le langage des groupes. Nous allons étudier les groupes commutatifs divisibles. Pour $n \in \mathbb{Z}$, nous utiliserons l'abbréviation "nx" pour dénoter le terme $x + x + \cdots + x$ (n fois) si $n > 0$, le terme 0 si $n = 0$, et le terme $+(-x) + \cdots + (-x)$ (n fois) si $n < 0$.

Un groupe (commutatif) G est *divisible* si pour tout entier $n > 0$, tout élément de G est divisible par n.

Un élément $x \in G$ est dit *de torsion* s'il existe un entier $n > 0$ tel que $nx = 0$, et nous dirons alors que x est de n-torsion. Un groupe est *de torsion* si tous ses éléments sont de torsion. Un groupe est *sans torsion* si aucun de ses éléments (autre que 0) n'est de torsion. Nous admettrons les résultats suivants :

(1) - Soit G_i, $i \in I$, une famille de groupes commutatifs. On définit la somme directe des G_i, notée $\bigoplus_{i\in I} G_i$, comme étant le sous-groupe de $\prod_{i\in I} G_i$ consistant des suites $(a_i)_{i\in I}$ dont le support, $\{i \mid a_i \neq 0\}$, est fini. Si tous les G_i sont égaux à un groupe G, on notera alors la somme directe par $G^{(I)}$.

(2) - Soit G un groupe commutatif engendré par un nombre fini d'éléments. Alors G se décompose en somme directe de groupes cycliques ($\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$).

$(\mathbb{Q},+)$ est bien sûr divisible. Voici un exemple de groupe divisible de torsion, noté $C(p^\infty)$, et appellé *groupe de Prüfer* : on prend le groupe additif de $\mathbb{Z}[1/p]$, et on le quotiente par son sous-groupe $\mathbb{Z}$. Tout élément de $C(p^\infty)$ peut donc être représenté ("modulo 1") par un rationnel de la forme m/p^n, avec $0 \leq m < p^n$.

(3) - Tout groupe commutatif divisible G s'écrit alors comme une somme directe

$$(*) \qquad G = \mathbb{Q}^{(\kappa_0)} \oplus \bigoplus_{p\in P} C(p^\infty)^{(\kappa_p)},$$

où P dénote l'ensemble des nombres premiers, et les κ_0 et κ_p sont des cardinaux (finis ou infinis).

(a) Donner une axiomatisation de la théorie T_{div} des groupes commutatifs divisibles.

(b) Donnez un énoncé φ, tel que si $G \models T_{\text{div}} \cup \varphi$, alors dans la décomposition $(*)$ on aura $\kappa_3 = 0$.

(c) Même question avec $\kappa_3 = 1$.

(d) Montrez que $C(3^\infty)$ a une extension élémentaire ayant une décomposition dans laquelle $\kappa_0 \neq 0$.

(e) Montrez qu'il n'existe pas de théorie dont tous les modèles sont de la forme $C(3^\infty)^{(\kappa)}$ (avec $\kappa > 0$).

(f) Montrez que si $G \equiv C(3^\infty)$, alors dans la décomposition de G donnée par $(*)$, on a $\kappa_3 = 1$, $\kappa_p = 0$ pour $p \neq 3$, et κ_0 quelconque.

(g) Montrez que $\mathrm{Th}(C(3^\infty))$ élimine les quantificateurs.