Partiel du Cours de logique

2,5 heures, 21 novembre 2011

Les documents ne sont pas autorisés.

Exercice 1 (Graphes non-orientés)
Rappelons qu'un *graphe* est une structure $\Gamma = (G; R^\Gamma)$, avec $\emptyset \neq G$ l'ensemble des *sommets* et $R^\Gamma \subseteq G^2$ l'ensemble des *arêtes*. Dans cet exercice, nous considérons des graphes *non-orientés*, c.-à-d. nous supposons que R^Γ est symétrique et irréflexive.

Un uplet $(g_0, \ldots, g_n)$ est un *chemin* dans Γ si $(g_i, g_{i+1}) \in R^\Gamma$ pour $i = 0, \ldots, n-1$. L'entier n est appelé la *longueur* du chemin. On dit qu'une partie $H \subseteq G$ est *connexe* si pour tout $h, h' \in H$ il existe un chemin $(h_0, \ldots, h_n)$ tel que $h_i \in H$ pour tout i et $h_0 = h$, $h_n = h'$. Une partie $C \subseteq G$ est une *composante connexe* de Γ si C est une partie connexe maximale de G. On voit que G est réunion disjointe de ses composantes connexes. On dit que Γ est connexe si G l'est.

Nous considérons les graphes comme structures dans $\mathcal{L} = \{R\}$, avec R un symbole de relation binaire.

1. Donner une formule $\psi_n(x, y)$ telle que pour tout graphe Γ et tout $g, h \in G$ on ait $\Gamma \models \psi_n[g, h]$ si et seulement s'il existe, dans Γ, un chemin de longueur n entre g et h.
2. Montrer qu'il existe une $\mathcal{L}$-formule $\varphi_n(x_1, \ldots, x_n)$ telle que pour tout graphe Γ et tout uplet $\overline{g} \in G^n$ on ait $\Gamma \models \varphi_n[\overline{g}]$ si et seulement si $(g_1, \ldots, g_n)$ énumère une composante connexe de Γ de cardinal n.
3. Montrer : Si Γ et Δ sont deux graphes élémentairement équivalents et si Γ contient au moins (respectivement, au plus) k composantes connexes de cardinal n, où k et n sont des entiers fixés, alors Δ contient au moins (respectivement, au plus) k composantes connexes de cardinal n.
4. Donner un exemple de graphe Γ dont toute composante connexe est finie et qui admet une extension élémentaire Γ' ayant une composante connexe infinie. Justifier votre réponse.
5. Soit $\Gamma_\mathbb{Z} = (\mathbb{Z}; R^\mathbb{Z})$, où $R^\mathbb{Z} = \{(i, i+1) \mid i \in \mathbb{Z}\} \cup \{(i+1, i) \mid i \in \mathbb{Z}\}$, et soit $C_\mathbb{Z} \preccurlyeq \Gamma'$ une extension élémentaire propre. Montrer que Γ' n'est pas connexe.
6. Soit $\Gamma = (G, R^\Gamma)$ un graphe et $g \in G$ un sommet. On définit $v(g) := \mathrm{card}(\{h \in G \mid (g, h) \in R^\Gamma\})$, appelée la *valence* de g. En généralisant la partie précédente, montrer que si Γ est un graphe dont tout sommet est de valence finie, alors aucune extension élémentaire propre de Γ n'est connexe.
7. En déduire que ni la connexité ni la non-connexité ne sont des propriétés axiomatisables pour les graphes.
8. Pour κ un cardinal non nul, on note $\Gamma_{\mathbb{Z},\kappa}$ la réunion de κ copies disjointes de $\Gamma_\mathbb{Z}$.
   Soit maintenant κ un cardinal non-dénombrable. Montrer que toute extension élémentaire de $\Gamma_\mathbb{Z}$ de cardinal κ est isomorphe à $\Gamma_{\mathbb{Z},\kappa}$.
9. Montrer que $\Gamma_\mathbb{Z} \equiv \Gamma_{\mathbb{Z},2}$.
10. Plus généralement, déterminer tous les modèles de $\mathrm{Th}(\Gamma_\mathbb{Z})$ à isomorphisme près.

($*$) Montrer que $\mathrm{Th}(\Gamma_\mathbb{Z})$ n'est pas finiment axiomatisable.
[Indication : On pourra d'abord donner une axiomatisation infinie.]

Exercice 2 (Ordinaux et cardinaux)
On rappelle que tout ordinal $\delta \neq 0$ peut s'écrire sous la forme

$$\delta = \omega^{\alpha_1} k_1 + \cdots + \omega^{\alpha_n} k_n,$$

avec $n \in \mathbb{N}$, $k_1, \ldots, k_n \in \omega$ et $\alpha_1 > \cdots > \alpha_n$. Si on impose de plus les k_i non nuls, alors l'écriture est unique.

Pour deux ordinaux

$$\alpha = \omega^{\gamma_1} k_1 + \cdots + \omega^{\gamma_n} k_n \quad \text{ et } \quad \beta = \omega^{\gamma_1} l_1 + \cdots + \omega^{\gamma_n} l_n,$$

on définit la somme naturelle $\alpha \oplus \beta$ comme étant

$$\alpha \oplus \beta = \omega^{\gamma_1}(k_1 + l_1) + \cdots + \omega^{\gamma_n}(k_n + l_n).$$

On dit qu'un ordinal δ est *indécomposable* s'il n'existe pas de $\alpha, \beta < \delta$ tels que $\alpha + \beta = \delta$.

1. Montrer que $\beta \mapsto \alpha \oplus \beta$ est une fonction strictement croissante en β. En déduire que $\alpha + \beta \leq \alpha \oplus \beta$ pour tout α, β.

2. Soit δ un ordinal non nul. Montrer que les trois conditions suivantes sont équivalentes.
   (i) δ est indécomposable ;
   (ii) pour tout $\alpha < \delta$, on a $\alpha + \delta = \delta$;
   (iii) il existe un ordinal α tel que $\delta = \omega^\alpha$.

3. Soit δ un ordinal non nul tel que $2^\delta = \delta$ (il s'agit de l'exponention ordinale).
   (a) Montrer que δ est un ordinal limite.
   ($*$) Montrer que δ est indécomposable. (**Cette question est indépendante de la suite de l'exercice et plus difficile que les autres.**)

Soit β un ordinal limite non nul et $(\alpha_\xi : \xi < \beta)$ une suite strictement croissante d'ordinaux. On note $\alpha = \sup\{\alpha_\xi : \xi < \beta\}$. Pour $\xi < \beta$, on pose $\kappa_\xi = \aleph_{\alpha_\xi}$.

4. Justifier que $\sum_{\xi<\beta} \kappa_\xi = \aleph_\alpha$.
5. Montrer les inégalités suivantes :

$$\sum_{\xi<\beta} \kappa_\xi < \prod_{\xi<\beta} \kappa_\xi \leq \left(\sum_{\xi<\beta} \kappa_\xi \right)^{|\beta|}.$$

On suppose pour les questions 6. à 9. que β est indécomposable.
Pour $\eta, \xi < \beta$, on pose $\tau_{\xi,\eta} = \xi$.

6. Justifier que $\{(\xi, \eta) \mid \xi, \eta < \beta\} = \{(\xi, \eta) \mid \xi \oplus \eta < \beta\}$.

7. Soit $\zeta < \beta$. Montrer

$$\prod_{\xi \oplus \eta = \zeta} \kappa_{\tau_{\xi,\eta}} = \kappa_\zeta.$$

[Indication : combien le produit a-t-il de facteurs ?]

8. En déduire que
$$\left(\prod_{\xi<\beta}\kappa_\xi\right)^{|\beta|}=\prod_{\xi<\beta}\kappa_\xi.$$
[Indication : on pourra écrire $\left(\prod_{\xi<\beta}\kappa_\xi\right)^{|\beta|}=\prod_{\xi<\beta}\prod_{\eta<\beta}\kappa_{\tau_{\xi,\eta}}$ et regrouper les termes autrement.]

9. Conclure que
$$\prod_{\xi<\beta}\kappa_\xi=\aleph_\alpha^{|\beta|}.$$

10. Dans cette question, on suppose l'hypothèse du continu généralisée (c'est-à-dire $2^\kappa=\kappa^+$ pour tout cardinal κ). On abandonne l'hypothèse que β est indécomposable est on suppose que c'est un ordinal limite *quelconque*.
a) Montrer que $\aleph_\alpha^{|\beta|}\leq 2^{\aleph_\alpha}$.
b) Conclure que
$$\prod_{\xi<\beta}\kappa_\xi=\aleph_\alpha^{|\beta|}=\aleph_{\alpha+1}.$$