Topologie algébrique

Vendredi 25 mars 2016

Durée 2 heures

L'usage des notes du cours et des feuilles d'exercices est autorisé.

Exercice 1

(a) Soit X un espace topologique séparé, et soit $A \subset X$ un rétracte de X. Montrer que le sous-ensemble $A \subset X$ est fermé.

(b) Soit Y un espace topologique, et soit $B \subset Y$ un sous-espace topologique. Montrer que B est un rétracte de Y si et seulement si, pour tout espace topologique Z et toute application continue $f : B \to Z$, il existe une application continue $g : Y \to Z$ telle que la restriction de g sur B coïncide avec f.

Exercice 2

Dans cet exercice, on note M le *ruban de Möbius*, c'est-à-dire, l'espace topologique M obtenu comme quotient de $[0;1] \times [0;1]$ par la relation d'équivalence $\sim$ engendrée par $(x, 0) \sim (1 - x, 1)$ pour tout $x \in [0;1]$. On note C le *cercle central* de M, c'est-à-dire, l'image par l'application quotient $\mathrm{pr} : [0;1] \times [0;1] \to M$ du segment $\{1/2\} \times [0;1]$, et on note ∂M le *bord* de M, c'est-à-dire, l'image par l'application quotient pr de $(\{0\} \times [0;1]) \cup (\{1\} \times [0;1])$.

(a) Montrer que le cercle central C de M est un rétracte par déformation de M.

(b) Montrer que le bord ∂M de M n'est pas un rétracte de M.

(c) Les revêtements $p : E \to M$ de M tels que E soit connexe par arcs sont-ils tous galoisiens ?

(d) Soit $p : M \to M$ un revêtement. Montrer que le nombre de feuillets de p est fini. Quelles sont les valeurs possibles du nombre de feuillets de ce revêtement ?

Exercice 3

(a) Existe-t-il un revêtement de la sphère S^2 par le tore $S^1 \times S^1$?

(b) Existe-t-il un revêtement du tore $S^1 \times S^1$ par la sphère S^2 ?

(c) La *bouteille de Klein* est l'espace topologique obtenu comme quotient de $[0;1] \times [0;1]$ par la relation d'équivalence $\sim$ engendrée par $(x, 0) \sim (1-x, 1)$ et $(0, y) \sim (1, y)$ pour tout $x \in [0;1]$ et tout $y \in [0;1]$. Existe-t-il un revêtement non trivial de la bouteille de Klein K par elle-même ?

(d) Construire un revêtement de la bouteille de Klein K par le tore $S^1 \times S^1$.

(e) Soient S_1 et S_2 deux surfaces topologiques connexes compactes (sans bord). La *somme connexe* $S_1 \sharp S_2$ est définie de la façon suivante. Soient $D_1 \subset S_1$ et $D_2 \subset S_2$ deux boules fermées de dimension 2, et soient $h_1 : D_1 \to D^2$ et $h_2 : D_2 \to D^2$ des homéomorphismes de D_1 et D_2, respectivement, avec la boule

$$D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

On pose $\mathrm{Int}(D_1) = h_1^{-1}(\mathrm{Int}(D^2))$ et $\mathrm{Int}(D_2) = h_2^{-1}(\mathrm{Int}(D^2))$, où

$$\mathrm{Int}(D^2) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}.$$

On considère la somme disjointe $(S_1 \setminus \mathrm{Int}(D_1)) \coprod (S_2 \setminus \mathrm{Int}(D_2))$, et on identifie $S_1 \setminus \mathrm{Int}(D_1)$ et $S_2 \setminus \mathrm{Int}(D_2)$ avec leurs images par les inclusions

$$S_1 \setminus \mathrm{Int}(D_1) \hookrightarrow (S_1 \setminus \mathrm{Int}(D_1)) \coprod (S_2 \setminus \mathrm{Int}(D_2))$$

$$S_2 \setminus \mathrm{Int}(D_2) \hookrightarrow (S_1 \setminus \mathrm{Int}(D_1)) \coprod (S_2 \setminus \mathrm{Int}(D_2)).$$

L'espace topologique $S_1 \sharp S_2$ est obtenu comme quotient de

$$(S_1 \setminus \mathrm{Int}(D_1)) \coprod (S_2 \setminus \mathrm{Int}(D_2))$$

par la relation d'équivalence $\sim_{h_1,h_2}$ engendrée par $z \sim_{h_1,h_2} (h_2^{-1} \circ h_1)(z)$ pour tout $z \in D_1 \setminus \mathrm{Int}(D_1)$. On admet que le type topologique du résultat de la construction décrite ci-dessus ne dépend pas du choix de D_1, D_2, h_1 et h_2.

Soit $k \geq 2$ un nombre entier. Construire un revêtement de la somme connexe de k copies du plan projectif réel $\mathbb{R}P^2$ par une somme connexe d'un nombre approprié de copies de $S^1 \times S^1$.

(f) Soient n et d des nombres entiers strictement positifs. Construire un revêtement à d feuillets de la somme connexe de n copies de $S^1 \times S^1$ par une somme connexe d'un nombre approprié de copies de $S^1 \times S^1$.

Exercice 4

Soit $n \geq 3$ un nombre entier. Trouver un revêtement à n feuillets qui n'admet pas d'automorphisme non trivial.

Exercice 5

(a) Soit X un espace topologique séparé muni d'une opération continue et libre d'un groupe topologique fini G. Montrer que l'application quotient

$$\mathrm{pr} : X \to X/G$$

est un revêtement.

(b) Considérons un revêtement $p : E \to B$ tel que le nombre de feuillets de p soit fini, E soit connexe par arcs et B soit localement connexe par arcs et séparé. Montrer que le revêtement p est galoisien si et seulement s'il existe un groupe topologique fini G, une opération continue libre de G sur E et un homéomorphisme $f : E/G \to B$ tels que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[dl, "\mathrm{pr}"'] \arrow[dr, "p"] & \\ E/G \arrow[rr, "f"] & & B \end{tikzcd}$$

(ici $\mathrm{pr} : E \to E/G$ est l'application quotient).