Topologie algébrique

Mardi 21 mars 2017

Durée 2 heures

L'usage des notes du cours et des feuilles d'exercices est autorisé.

Exercice 1

Soit n un entier strictement positif, et soit $K \subset \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble non vide et convexe.

(a) Soit X un espace topologique non vide. Montrer que toute application continue $f : X \to K$ est homotope à une application constante.

(b) Soit Y un espace topologique non vide. Montrer que toute application continue $g : K \to Y$ est homotope à une application constante.

(c) Soit Z un espace topologique non vide et contractile. Est-il vrai que, pour tout espace topologique non vide Z', deux applications continues quelconques $f_1, f_2 : Z' \to Z$ sont homotopes ? Est-il vrai que, pour tout espace topologique non vide Z'', deux applications continues quelconques $g_1, g_2 : Z \to Z''$ sont homotopes ?

(d) Trouver un exemple d'une application continue entre deux espaces topologiques connexes par arcs telle que cette application ne soit pas homotope à une application constante.

Exercice 2

Soit $x \in S^1$ un point du cercle S^1.

(a) Montrer que le sous-ensemble $\{x\} \times S^1 \subset S^1 \times S^1$ est un rétracte de $S^1 \times S^1$.

(b) Montrer que le sous-ensemble $\{x\} \times S^1 \subset S^1 \times S^1$ n'est pas un rétracte par déformation de $S^1 \times S^1$.

(c) On identifie la sphère S^3 avec la sphère unité

$$\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1\}$$

dans $\mathbb{R}^4$, et on pose

$$A = S^3 \cap \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x_1 = x_2 = 0\},$$
$$B = S^3 \cap \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x_3 = x_4 = 0\}.$$

Montrer que A est un rétracte par déformation de $S^3 \setminus B$.

Exercice 3

On identifie S^1 avec le cercle unité $\{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| = 1\}$ dans $\mathbb{C}$. Soit n un entier strictement positif. Considérons l'application $p : S^1 \to S^1$ définie par $p : z \mapsto z^n$.

(a) Montrer que p est un revêtement galosien.

(b) Déterminer le groupe des automorphismes $\mathrm{Aut}(p)$ de p.

TSVP

Exercice 4

Soit n un entier positif ou nul. On rappelle que l'*espace projectif réel* $\mathbb{R}P^n$ de dimension n est l'espace quotient de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ par la relation d'équivalence suivante : $(x_0, \ldots, x_n) \sim (x'_0, \ldots, x'_n)$ s'il existe un nombre réel $\lambda \neq 0$ tel que $x'_i = \lambda x_i$ pour tout $i = 0, \ldots, n$.

(a) Soit ℓ un entier strictement positif. Montrer que l'inclusion $\mathbb{R}^\ell \times \{0\} \hookrightarrow \mathbb{R}^{\ell+1}$ induit une inclusion $i : \mathbb{R}P^{\ell-1} \hookrightarrow \mathbb{R}P^\ell$.

(b) On suppose que $\ell \geq 2$. Soit x un point de $\mathbb{R}P^{\ell-1}$. Montrer que le morphisme

$$i_* : \pi_1(\mathbb{R}P^{\ell-1}, x) \to \pi_1(\mathbb{R}P^\ell, x)$$

induit par l'inclusion i est surjectif et expliciter ce morphisme.

(c) Trouver tous les entiers strictement positifs m tels qu'il existe un revêtement

$$p_m : (S^1)^m \to \mathbb{R}P^m.$$

(d) Trouver tous les entiers strictement positifs k tels qu'il existe un revêtement

$$q_k : \mathbb{R}P^k \to (S^1)^k.$$

(e) Décrire tous les revêtements (à isomorphisme modéré de revêtements près) de $\mathbb{R}P^n$ et de $\mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}P^n$ tels que les espaces totaux de ces revêtements soient connexes par arcs.

Exercice 5

(a) Soit $k \geq 2$ un entier. Trouver un espace topologique compact et connexe par arcs dont le groupe fondamental soit isomorphe au groupe cyclique $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$.

(b) Soit G un groupe abélien de type fini. Trouver un espace topologique compact et connexe par arcs dont le groupe fondamental soit isomorphe à G.