Année 2017–2018

FIMFA – Partiel Intégration (2 heures)

Sans document et sans calculatrice.

Questions de cours:
1) Enoncez le théorème de convergence monotone.
2) Définissez la tribu borélienne de $\mathbb{R}$, ainsi que la tribu de Lebesgue.
3) Donnez une caractérisation de la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}$.

Exercice: Soit d un entier non nul. Calculer le volume de la boule unité de $\mathbb{R}^d$.

Problème: Ce problème comporte 5 parties, les parties I et II sont indépendantes.
Partie I: L'ensemble de Vitali. Nous définissons une relation sur $\mathbb{R}$ par:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}\,, \qquad x \sim y \qquad \Longleftrightarrow \qquad x - y \in \mathbb{Q}\,.$$

1) Montrez que la relation $\sim$ est une relation d'équivalence.
2) Montrez qu'il existe un ensemble E inclus dans l'intervalle $[0,1]$ qui contient exactement un représentant de chaque classe d'équivalence.

Dans la suite, nous considérons un tel ensemble E, appelé ensemble de Vitali.

3) Montrez que E vérifie

$$[0,1] \subset \bigcup_{r \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} (r + E) \subset [-1,2]\,.$$

4) Montrez que E est en bijection avec $[0,1]$ (on supposera que l'hypothèse du continu est valide, i.e., qu'il n'existe aucun ensemble dont le cardinal est strictement compris entre le cardinal de $\mathbb{N}$ et le cardinal de $\mathbb{R}$).
5) Montrez qu'un tel ensemble E n'est pas Lebesgue mesurable.
6) Soit F un ensemble Lebesgue mesurable inclus dans E. Montrez que F est de mesure de Lebesgue nulle.
7) Soit A une partie de $\mathbb{R}$.
i) Montrez que, pour tout $r \in \mathbb{Q}$,

$$A \cap (r+E) \text{ est Lebesgue mesurable} \quad \Longleftrightarrow \quad (-r+A) \cap E \text{ est Lebesgue mesurable}\,.$$

ii) Montrez que, lorsqu'ils sont mesurables, les deux ensembles ci–dessus ont même mesure de Lebesgue.
iii) Montrez que

$$A = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \big(A \cap (r+E) \big)\,.$$

8) Soit A une partie Lebesgue mesurable de $\mathbb{R}$ de mesure de Lebesgue non nulle. Montrez que A contient un ensemble qui n'est pas Lebesgue mesurable.

Borel's interest in set theory began with what he at first called a "romantic attraction", although like many such attractions, it would later cool.
Borel subsequently excused this early fascination with set theory by observing,
"Like many of the young mathematicians, I had been immediately captivated by the Cantorian theory; I don't regret it in the least, for that is one mental exercise that truly opens up the mind."

Partie II: L'ensemble de Cantor. Nous définissons une suite d'ensembles $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de manière itérative en posant $A_0 = [0,1]$ et

$$\forall n \geq 0 \qquad A_{n+1} \;=\; \Big(\frac{1}{3}A_n\Big) \;\cup\; \Big(\frac{1}{3}(2+A_n)\Big)\,.$$

1) Explicitez les ensembles A_1, A_2, A_3.
2) Calculez la mesure de Lebesgue de A_n pour $n \geq 0$.
Nous définissons l'ensemble de Cantor C par

$$C \;=\; \bigcap_{n\geq 0} A_n\,.$$

3) Quelle est la mesure de Lebesgue de C?
4) Que savez-vous de l'ensemble de Cantor?
Partie III: La fonction de Cantor. Notons λ la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}$. Nous définissons une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $[0,1]$ dans $[0,1]$ en posant

$$\forall n \geq 0 \quad \forall x \in [0,1] \qquad f_n(x) \;=\; \Big(\frac{3}{2}\Big)^n \lambda\big(A_n \cap [0,x]\big)\,.$$

1) Dessinez les fonctions f_1, f_2, f_3.
2) Montrez que

$$\forall n \geq 0 \quad \forall x \in [0,1] \qquad \big|f_{n+1}(x) - f_n(x)\big| \;\leq\; \frac{1}{2^{n-1}}\,.$$

3) En déduire que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une fonction f.
4) Montrez que la fonction f est continue croissante et qu'elle envoie $[0,1]$ sur $[0,1]$.
5) Montrer que, Lebesgue presque partout, f est dérivable et de dérivée nulle.
Partie IV: Une fonction continue non Lebesgue mesurable. Soit f la fonction de Cantor construite dans la partie III et soit g la fonction définie par

$$\forall x \in [0,1] \qquad g(x) = f(x) + x\,.$$

1) Montrer que g est inversible, et que son inverse g^{-1} est une fonction continue de $[0,2]$ dans $[0,1]$.
2) Montrer que l'image de l'ensemble de Cantor C par g est un ensemble de mesure de Lebesgue non nulle.
3) Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, nous notons $\mathcal{L}(I)$ la tribu de Lebesgue sur I. Montrer que g^{-1} n'est pas mesurable de $([0,2],\mathcal{L}([0,2]))$ dans $([0,1],\mathcal{L}([0,1]))$.
4) Commentez l'affirmation: "Une fonction continue est mesurable".
Partie V: Une fonction horrible. Nous considérons l'ensemble de Vitali E et une bijection ϕ de E sur $[0,1]$ (cf question I.4). Nous définissons une fonction $\psi\colon [0,1] \to [0,1]$ de la manière suivante. Soit x dans $[0,1]$. Il existe un unique y dans E tel que $x \sim y$. Nous posons alors $\psi(x) = \phi(y)$.
1) Montrez que ψ possède la propriété des valeurs intermédiaires, i.e., pour tout intervalle $I \subset [0,1]$, son image $\psi(I)$ par ψ est encore un intervalle.
2) Construire une fonction qui est Lebesque presque partout nulle, qui possède la propriété des valeurs intermédiaires et dont l'image est $[0,1]$.

Measure what is measurable, and make measurable what is not so.
Galileo Galilei