Analyse complexe
Partiel - 2h

Mercredi 13 Mars 2013

Ni les calculatrices, ni les notes de cours ne sont autorisées.
Notations : $D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r\}$, $\overline{D}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq r\}$.

Exercice 1 Question de cours.

Soit f une fonction holomorphe sur le disque unité, avec $|f| \leq 1$.

1. Montrer que $|f'(0)| \leq 1$.
2. On suppose de plus $f(0) = 0$. Montrer que $|f(z)| \leq |z|$ pour tout $z \in D(0, 1)$.
3. En plus de l'hypothèse $f(0) = 0$, on suppose que $|f'(0)| = 1$ ou qu'il existe $z_0 \in D(0, 1)$ non nul tel que $|f(z_0)| = |z_0|$. Montrer qu'il existe une constante α de module 1 telle que $f(z) = \alpha z$ pour tout $z \in D(0, 1)$.

Exercice 2

1. Montrer que la fonction $z \mapsto 1/z$ n'admet pas de primitive holomorphe sur $\mathbb{C}^\times$.
2. Montrer que la fonction $z \mapsto z/(1 + z^2)$ n'admet pas de primitive holomorphe sur $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}$.

Exercice 3

1. Montrer que toute fonction holomorphe $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ telle que $|\mathrm{Re}(f)| > |\mathrm{Im}(f)|$ (sur tout $\mathbb{C}$) est constante. On pourra introduire la fonction $e^{\alpha f}$, en choisissant judicieusement $\alpha \in \mathbb{C}$.
2. Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $f : U \to U$ une fonction holomorphe. On suppose que $f \circ f = f$. Montrer que f est constante ou $f = \mathrm{Id}_U$.

Exercice 4

1. Donner le nombre de zéros (comptés avec multiplicités) du polynôme
$$z \mapsto z^5 - 10z^2 + 5z + 3$$
dans l'ensemble $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 3 \text{ et } |z - 1| \geq 1/2\}$.
Indication : on pourra commencer par les compter dans $\overline{D}(0, 3)$, puis développer $P(1 + z)$.
2. Soit $P(z) = z^4 + 8z^3 + 3z^2 + 8z + 3$.
   (a) Montrer que si $z \in i\mathbb{R}$, $\mathrm{Re}(P(z)) > 0$, et en déduire que pour $R > 0$ suffisamment grand,
   $$\int_{-R}^{R} i\frac{P'(it)}{P(it)}dt = \int_\gamma \frac{1}{z}dz$$
   où $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$ est le chemin défini par
   $$\gamma(s) = P(-iR)(1 - s) + P(iR)s.$$
   (b) On rappelle (et il n'est pas nécessaire de redémontrer) qu'il existe une unique fonction holomorphe $f : D(1, 1) \to \mathbb{C}$ telle que $f'(z) = 1/z$ et $f(1) = 0$.
   Montrer que si $R > 0$ est suffisamment grand, la fonction
   $$z \mapsto f\left(P(z)/z^4\right)$$
   est bien définie et holomorphe sur $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > R/2\}$, et en déduire que
   $$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{P'(Re^{i\theta})}{P(Re^{i\theta})} Rie^{i\theta} d\theta = 4i\pi + f\left(P(iR)/P(-iR)\right)$$
   (c) Calculer le nombre de zéros (comptés avec multiplicités) de P dans le demi-plan
   $$\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) \geq 0\}.$$