Introduction au domaine de recherche - Actions conformes lorentziennes de groupes de Lie semi-simples

Vincent Pecastaing

20 octobre 2011

Sous la direction de Charles Frances

Table des matières

Introduction

Le domaine de recherche présenté ici s'inscrit dans le cadre général de l'étude des actions de groupes de Lie qui préservent une structure géométrique donnée. Précisément, nous voulons comprendre les groupes de Lie qui peuvent agir fidèlement isométriquement, et plus généralement conformément, sur une variété pseudo-riemannienne. Les groupes des isométries et des transformations conformes d'une variété pseudo-riemannienne sont toujours des groupes de Lie (essentiellement, ceci provient de la rigidité de telles structures géométriques, au sens de Gromov dans [Gro88]) .

Nous allons chercher à décrire les groupes qui peuvent se réaliser comme des sous-groupes du groupe des isométries $\mathrm{Isom}(M)$ (resp. du groupe conforme $\mathrm{Conf}(M)$), pour une certaine variété pseudo-riemannienne M. Nous nous placerons toujours sous les hypothèses suivantes : le groupe qui agit est semi-simple sans facteur compact et la variété qui supporte la structure géométrique est compacte.

Les techniques développées ici s'appuient sur des contraintes sur l'algèbre de Lie d'un tel groupe, et ne permettent en rien de discuter les cas où le groupe qui agit est discret. Il n'y a pour le moment pas de résultat permettant d'aborder la question. Mais on a tout de même des éléments de réponse dans des cas très particuliers, fournis par Zimmer ([Zim84]) puis Zeghib ([Zeg97]), notamment lorsque le groupe qui agit contient un réseau de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$.

Nous allons commencer par présenter le cas des actions isométriques. Nous nous attarderons ensuite sur la technique mise en oeuvre pour écarter les groupes qui ne peuvent jamais agir isométriquement sur une variété lorentzienne compacte. Nous exposerons ensuite les exemples fondamentaux d'actions lorentziennes conformes et expliquerons comment on peut exploiter les idées développées dans la partie sur les actions isométriques.

Conventions et notations

Dans ce texte, M désignera toujours une variété réelle différentiable de classe $\mathcal{C}^\infty$, connexe, de dimension $n \geqslant 3$. Si $x \in M$, $\mathrm{T}_x M$ désigne l'espace tangent en x à M. L'algèbre de Lie des champs de vecteurs lisses sur M sera noté $\Gamma(TM)$.

Si $p, q \in \mathbb{N}$ avec $p + q = n$, la convention utilisée pour la signature (p, q) d'une forme quadratique réelle Q sur un espace vectoriel réel de dimension n est que p est la dimension maximale d'un sous-espace sur lequel Q est définie négative. La signature $(1, n-1)$ sera appelée signature lorentzienne.

1 Rappels de géométrie pseudo-riemannienne

Définition 1 (Structures pseudo-riemanniennes)**.** Soient p, q avec $p + q = n$. Une *métrique pseudo-riemannienne de signature* (p, q) sur M est la donnée en tout point x de M d'une forme quadratique g_x réelle non dégénérée de signature (p, q) sur l'espace tangent $\mathrm{T}_x M$, et avec une dépendance lisse en x. Si $p = 0$, on parle de *métrique riemannienne* et les métriques de signature $(1, n-1)$ seront dites *lorentziennes*. Une variété *riemannienne* (resp. *pseudo-riemannienne*) est la donnée d'une variété réelle lisse munie d'une métrique riemannienne (resp. pseudo-riemannienne).

Remarque 2. On peut définir la régularité de $x \mapsto g_x$ en demandant que pour tous champs de vecteurs $X, Y \in \Gamma(TM)$, l'application $x \mapsto g_x(X_x, Y_x)$ est lisse.

Proposition 1. *Toute variété lisse admet une structure de variété riemannienne.*

Remarque 3. Ceci est propre au cas riemannien, on peut vérifier par exemple qu'il n'existe pas de métrique lorentzienne sur la sphère $\mathbb{S}^2$.

Soient (M, g) et (M', g') deux variétés pseudo-riemanniennes.

Définition 4 (Définition locale des isométries)**.** On appelle *isométrie* entre M et M' tout difféomorphisme $f : M \to M'$ tel que $f^*g' = g$. Les isométries d'une variété riemannienne forment un groupe, que nous noterons $\mathrm{Isom}(M)$.

Remarque 5. Rappelons que le tiré en arrière de g' se définit par $\forall x \in M$, $\forall u, v \in \mathrm{T}_x M$, $(f^*g')_x(v, w) = g'_{f(x)}(\mathrm{D}_x f v, \mathrm{D}_x f w)$.

Sans rentrer dans les détails, dans le cas riemannien on définit une distance associée à la métrique comme étant la borne inférieure des longueurs des chemins $\mathcal{C}^1$ par morceaux joignant deux points donnés, la longueur d'un tel chemin se définissant par

$$\ell(\gamma) = \int_0^1 g_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t))\mathrm{d}t$$

Cette distance engendre la topologie originelle de M, et de plus, toute application entre deux variétés riemanniennes est une isométrie (au sens ci-dessus) si et seulement si elle est une isométrie entre ces deux variétés vues comme espaces métriques.

Définition 6 (Structure conforme)**.** Soit (M, g) une variété pseudo-riemannienne. On définit la *classe conforme* de sa métrique $[g]$ comme étant l'ensemble des métriques de la forme $\mathrm{e}^\sigma g$, avec $\sigma : M \to \mathbb{R}$ lisse. La donnée d'une classe conforme sur M est appelée *structure conforme pseudo-riemannienne.* Nous la noterons $(M, [g])$.

Un difféomorphisme de $(M, [g])$ est dit *conforme* s'il préserve $[g]$, c'est à dire si pour toute métrique h dans la classe conforme de g, $f^*h \in [g]$. Ces diffémorphismes forment un groupe, appelé *groupe conforme* de $(M, [g])$ et noté $\mathrm{Conf}(M, [g])$, ou $\mathrm{Conf}(M)$.

Remarque 7. On a l'inclusion $\mathrm{Isom}(M) \subset \mathrm{Conf}(M)$. Géométriquement, un élément f de $\mathrm{Conf}(M)$ est un difféomorphisme qui préserve les angles : pour tous $u, v \in \mathrm{T}_x M$,

$$\frac{g_{f(x)}(\mathrm{D}_x f u, \mathrm{D}_x f v)}{\|\mathrm{D}_x f u\| \|\mathrm{D}_x f v\|} = \frac{g_x(u, v)}{\|u\| \|v\|}.$$

Exemples 8.

1. Dans $M = \mathbb{R}^n$, considérons la forme quadratique

$$Q_{p,q} = - \sum_{1 \leqslant i \leqslant p} {x_i}^2 + \sum_{p+1 \leqslant i \leqslant n} {x_i}^2.$$

Comme pour tout $x \in M$, on a une identification canonique $\mathrm{T}_x M \simeq \mathbb{R}^n$, on définit une métrique $g_{p,q}$ sur M en prenant pour tout x, $(g_{p,q})_x = Q_{p,q}$. On obtient une variété pseudo-riemannienne, qu'on a coutume d'appeler *espace pseudo-euclidien standard*, noté $\mathbb{R}^{p,q}$. $\mathbb{R}^{0,n}$ est l'espace euclidien usuel de dimension n, et $\mathbb{R}^{1,n-1}$ est appelé *espace de Minkowski.*

Nous avons alors $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^{p,q}) \simeq O(p, q) \ltimes \mathbb{R}^n$: les isométries de cet espace sont les « rotations-translations ».

Pour les transformations conformes (*ie* préservant la classe conforme de la métrique $g_{p,q}$), nous avons $\mathrm{Conf}(\mathbb{R}^{p,q}) \simeq (\mathbb{R}^* \times O(p, q)) \ltimes \mathbb{R}^n$.

2. Soit $\mathbb{S}^n = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \mid \sum {x_i}^2 = 1\}$ la sphère de dimension n. Alors, en restreignant la métrique de $\mathbb{R}^{0,n+1}$ à $\mathbb{S}^n$, on fait de $\mathbb{S}^n$ une variété riemannienne, dont le groupe des isométries s'identifie $\mathrm{Isom}(\mathbb{S}^n) \simeq O(n + 1)$. Son groupe conforme, qu'on a coutume de désigner par *groupe de Möbius* de la sphère, est $\mathrm{Conf}(\mathbb{S}^n) \simeq PO(1, n + 1)$

3. Considérons le demi-hyperboloïde supérieur

$$\mathcal{H}_+^n = \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_0 > 0 \text{ et } -x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2 = -1\}$$

   Si on restreint la métrique de $\mathbb{R}^{1,n}$ à $\mathcal{H}_+^n$, on vérifie aisément que l'on définit ainsi une métrique riemannienne, et la variété ainsi obtenue se nomme *modèle du demi-hyperboloïde supérieur* de l'espace hyperbolique $\mathbb{H}_n(\mathbb{R})$.
   Si on note $O_+(1,n)$ le sous-groupe de $O(1,n)$ formé des applications linéaires qui préserve la nappe considérée, on a une identification $\mathrm{Isom}(\mathcal{H}_+^n) \simeq O_+(1,n)$.
4. Si G est un groupe de Lie, dès que l'on se donne une forme quadratique non dégénérée g_e sur $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$, on obtient une métrique de même signature sur G en « poussant » g_e sur tout le groupe grâce aux translations $(L_x)_{x \in G}$:

$$\forall x \in G,\ \forall u, v \in \mathrm{T}_x G,\ g_x(u,v) := g_e(\mathrm{D}_x(L_{x^{-1}})u, \mathrm{D}_x(L_{x^{-1}})v).$$

   On obtient ainsi une métrique invariante à gauche, et toutes les métriques invariantes à gauche sont obtenues ainsi.

2 Les actions isométriques

2.1 Le cas riemannien

Le cas riemannien isométrique présente peu d'intérêt comme le montre le théorème suivant.

Théorème 2. *Soit (M,g) une variété riemannienne compacte. Alors $\mathrm{Isom}(M,g)$, muni de la topologie compacte-ouverte, admet une unique structure différentielle qui en fait un groupe de Lie, et ce groupe de Lie est compact.*

Éléments de preuve. Nous ne détaillerons pas la mise en évidence ni l'unicité de la structure différentielle de $\mathrm{Isom}(M,g)$ et renvoyons au théorème 1.1 du deuxième chapitre de [Kob72]. Intéressons nous plutôt à la compacité. Si on se donne $f_n \in \mathrm{Isom}(M,g)$, alors par compacité de M, on peut appliquer le théorème d'Arzéla-Ascoli pour conclure que (f_n) converge à extraction près en topologie $\mathcal{C}^0$ vers f_∞ une application continue sur M. Le point clé est qu'à la limite, f_∞ préserve la distance riemannienne et ceci assure qu'elle est lisse. On prouve alors qu'on a convergence en topologie $\mathcal{C}^1$. $\mathrm{D}_x f_n : \mathrm{T}_x M \to \mathrm{T}_{x_n} M$ est une isométrie entre espace euclidiens et la compacité du groupe orthogonal euclidien permet de faire converger les différentielles $\mathrm{D}_x f_n$, vers une application qui n'est autre que la différentielle en x de f_∞. □

On voit alors clairement que dans le cas pseudo-riemannien général, cet argument est mis en défaut du fait que le groupe $O(p,q)$ n'est compact que si $p = 0$ ou $q = 0$.

Inversement, si on se donne un groupe compact H, on a directement une variété riemannienne compacte sur laquelle H agit par isométries : H lui-même. En effet, tout groupe de Lie compact admet une métrique riemannienne bi-invariante. Il agit donc sur lui même par isométries (par multiplication gauche ou droite).

Finalement, il n'y a pas grand chose à dire : on a des actions isométriques sur des variétés riemanniennes compactes dès que le groupe est compact et la compacité est une condition nécessaire. Ceci nous incite à explorer du coté des variétés pseudo-riemanniennes, puisque la compacité du groupe orthogonal en signature non euclidienne y est mise en défaut. Et parmi les signatures, nous préférons nous pencher sur une qui se distingue tout particulièrement : la signature lorentzienne.

2.2 Un exemple en signature lorentzienne : $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ muni de sa métrique de Killing

Le groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ des matrices réelles de déterminant 1, est un groupe de Lie, son algèbre de Lie est $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) = \{M \in \mathfrak{gl}_2(\mathbb{R}) \,:\, \operatorname{Tr} M = 0\}$, munie du crochet matriciel usuel. Rappelons la

Définition 9. La *forme de Killing* d'un groupe de Lie G est une forme quadratique B sur $\mathfrak{g}$ qui se définit par :

$$\forall X, Y \in \mathfrak{g},\ B(X,Y) = \operatorname{Tr}(\operatorname{ad} X \circ \operatorname{ad} Y)$$

On vérifie par un simple calcul que dans le cas de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, la forme de Killing est non dégénérée de signature lorentzienne $(1,2)$. On peut définir une structure lorentzienne sur $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ en translatant la forme de Killing par la gauche, comme on l'a expliqué à la partie 1. La métrique ainsi définie s'appelle la *métrique de Killing sur* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$.

Nous avons ainsi obtenu une variété lorentzienne sur laquelle $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ agit isométriquement par translation gauche ou droite. Le problème est que cette variété n'est pas compacte. L'idée pour résoudre ce problème est de se donner un réseau cocompact de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, de quotienter, et de vérifier qu'à l'arrivée on obtient bien une variété lorentzienne et que l'action de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ descend en une action isométrique. Cette idée va marcher car la métrique de Killing est bi-invariante sous l'action de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ (ceci provient essentiellement du fait que la forme de Killing est laissée invariante par l'action adjointe de G, c'est ce qui a motivé son choix). C'est ce que nous allons voir en formalisant un peu le problème.

Lemme 3. *Soit (M,g) une variété pseudo-riemannienne. On se donne un sous groupe $\Gamma \subset \operatorname{Isom}(M)$ discret qui agit (à gauche) proprement et librement sur M.*

Alors, la métrique de M descend en une métrique pseudo-riemannienne de même signature $\overline{g}$ sur $\overline{M} = \Gamma\backslash M$, et une isométrie $\varphi \in \operatorname{Isom}(M,g)$ descend en une isométrie $\overline{\varphi} \in \operatorname{Isom}(\overline{M},\overline{g})$ si et seulement si φ normalise Γ.

Ainsi, on a construit, en quotientant $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, une variété lorentzienne compacte sur laquelle $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ agit isométriquement. Celle-ci dépend du choix du réseau cocompact que l'on s'est donné, nous voyons qu'il y a beaucoup de variétés lorentziennes compactes sur lesquelles $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ agit isométriquement.

Remarque 10. Nous renvoyons à [Kat92] pour l'existence de réseaux cocompacts dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$.

Avant de nous intéresser au cas général lorentzien, citons un joli résultat dû à Zeghib, [Zeg98]. Il y a un groupe qui se distingue particulièrement dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, c'est le groupe affine, que l'on peut définir par :

$$\mathrm{Aff}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & t \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix},\ a \in \mathbb{R}^*,\ t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Théorème 4 (Zeghib)**.** *Pour toute variété lorentzienne compacte, si il existe une action isométrique, localement fidèle, du groupe affine* $\mathrm{Aff}(\mathbb{R})$*, alors il existe un revêtement fini de* $PSL_2(\mathbb{R})$ *qui agit isométriquement, en prolongeant l'action de* $\mathrm{Aff}(\mathbb{R})$*.*

Ce théorème nous dit quelque chose de très intéressant : $\mathrm{Aff}(\mathbb{R})$ ne peut jamais être *tout* le groupe des isométries d'une variété lorentzienne compacte. Ce qui soulève une question plus délicate que celle posée initialement : une fois qu'on a prouvé qu'un groupe peut agir sur des variétés lorentziennes, en existe-t-il une pour laquelle il s'identifie à tout le groupe ?

2.3 Le théorème de plongement

Notre objectif est de savoir quels groupes peuvent ou non agir isométriquement sur une variété lorentzienne compacte. Nous arrivons ici à un résultat très intéressant : le théorème de plongement de Zimmer, qui va nous fournir une contrainte sur l'algèbre de Lie du groupe qui est sensé agir. La donnée d'une action isométrique d'un groupe de Lie va nous fournir celle d'un plongement de son algèbre de Lie dans $\mathfrak{o}(1, n-1)$. Il est important de noter que ce genre de technique nous permettront au mieux d'établir des conclusions sur la composante neutre du groupe qui agit. En revanche, nous ne pourrons rien conclure sur la composante discrète en procédant de cette manière.

Le théorème de Zimmer auquel nous faisons référence est le théorème A de [Zim86] . Il s'énonce pour des structures géométriques plus générales que les métriques.

Théorème 5 (Zimmer)**.** *Soit* (M, g) *une variété pseudo-riemannienne, compacte, de signature* (p, q)*. Soit* H *un groupe de Lie semi-simple, sans facteur compact, agissant isométriquement et fidèlement sur* M*.*

Alors, il existe un plongement (d'algèbres) de $\mathfrak{h}$ *dans* $\mathfrak{o}(p, q)$*.*

Ce théorème nous permet déjà d'affirmer que dans le cas lorentzien si un groupe agit isométriquement, alors il est de rang réel inférieur ou égal à 1 (essentiellement parce que $O(1, n-1)$ est de rang 1). Mais nous avons une classification des groupes semi-simples de rang 1 :

Liste des groupes semi-simples de rang 1 :

1. $O(1, k)$, $k \geqslant 1$;
2. $U(1, k)$, $k \geqslant 1$;
3. $SP(1, k)$;
4. F_4^{-20}.

Les techniques développées dans la preuve du théorème 5 nous mettent en mesure de prouver qu'essentiellement, il n'y a que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \simeq O(1,2)_0$ qui peut agir dans cette liste. Notons bien qu'énoncé tel quel, ce théorème ne nous permet pas d'exclure le cas de $O(1,k)$, puisqu'il n'y a rien de contradictoire dans l'existence d'un plongement de $\mathfrak{o}(1,k)$ dans $\mathfrak{o}(1,n-1)$ pour $k \leqslant n-1$. Détaillons quelque peu les constructions faites dans la preuve de ce théorème, et pour simplifier, supposons que le groupe H qui agit est simple.

Le point clé est que dans le cas des structures isométriques, étant donné une métrique pseudo-riemannienne sur une variété M compacte, il existe toujours une mesure finie sur M invariante par tout le groupe $\mathrm{Isom}(M)$. Cette mesure a un rôle primordial lors de l'étude du groupe des isométries et son existence est mise en défaut dans le cas des structures conformes : il n'existe pas nécessairement de mesure sur M invariante par toute transformation conforme. Ce qui est développé ici repose fondamentalement sur des résultats concernant les actions algébriques de groupes algébriques sur des variétés algébriques préservant une mesure finie.

Proposition 6. *Il existe sur M une mesure finie μ laissée invariante par toutes les isométries.*

Démonstration. Il y a une forme volume canonique ω associée à la métrique de M : c'est celle qui vaut 1 sur toutes les bases orthonormées de M. Elle est alors par essence invariante par tout $\mathrm{Isom}(M)$. Si A est un borélien, on définit $\mu(A) = \int_A \omega$. □

Remarque 11. On voit alors clairement qu'il n'est pas possible de définir par un tel procédé une mesure finie invariante par tout le groupe des tranformations conformes (elles peuvent dilater les bases).

Expliquons comment on parvient à exploiter des résultats sur des actions algébriques ergodiques. Notons $\mathfrak{g} = \mathfrak{o}(p,q) \ltimes \mathbb{R}^n$ et $P = O(p,q)$. Définissons la notion de fibré principal.

Définition 12 (Fibré principal)**.** Soit G un groupe de Lie. Un fibré principal au-dessus de M et de groupe G est une fibration $\pi : P \to M$, de fibre G, telle que :

- G agit librement à droite sur P,
- les fibres sont les orbites sous l'action de G,
- les trivialisations locales sont G-équivariantes : tout point de M admet un voisinage ouvert U et une trivialisation de $\pi^{-1}(U)$: $\psi : \pi^{-1}(U) \to U \times G$ telle que si $\psi(p) = (\pi(p), \varphi(p))$, alors $\forall g \in G$, $\varphi(p.g) = \varphi(p)g$.

Exemples 13. Le fibré des repères d'une variété défini formellement par

$$\mathcal{R}(M) = \{(x, \widehat{x}),\ x \in M,\ \widehat{x} \text{ isomorphisme linéaire} : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} T_xM\}.$$

est un fibré principal au dessus de M, avec pour fibre $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Proposition 7. *La donnée d'une métrique pseudo-riemannienne signature (p,q) est équivalente à celle d'un sous-fibré $\widehat{M}$ de $\mathcal{R}(M)$, de groupe structurel $O(p,q)$.*

L'idée pour cette proposition est simplement de dire que se donner une forme quadratique non dégénérée sur un espace vectoriel revient à déclarer quelles sont ses bases orthonormées.

Remarque 14. D'une façon générale, la donnée d'un sous-fibré du fibré des repères ayant pour groupe un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est ce que l'on appelle une G-strucure sur M. Celles-ci permettent de modéliser beaucoup d'objets ou structures géométriques telles qu'un parallélisme, une forme volume, une orientation, une forme symplectique ou encore une structure complexe. Pour plus de détail, nous renvoyons le lecteur à [Kob72].

L'idée à retenir est qu'on parvient à modéliser la métrique pseudo-riemannienne par le biais d'un objet géométrique (un sous-fibré du fibré des repères). Pour y représenter les isométries, on utilise le théorème suivant.

Théorème 8 (Géométrie de Cartan isométrique lorentzienne)**.** *Il existe sur $\widehat{M}$ une 1-forme à valeurs dans $\mathfrak{g}$, notée ω, qui est telle que :*

1. *$\forall \widehat{x} \in \widehat{M}$, $\omega_{\widehat{x}}$ réalise un isomorphisme linéaire entre $T_{\widehat{x}}\widehat{M}$ et $\mathfrak{g}$.*
2. *$\forall X \in \mathfrak{p} = \mathrm{Lie}(P)$, $\omega_{\widehat{x}}(X^*_{\widehat{x}}) = X$.*
3. *$\forall p \in P$, $R^*_p\,\omega = \mathrm{Ad}(p^{-1})\,\omega$.*
4. *Pour toute isométrie f de M, $\widehat{f}^*\omega = \omega$.*

Définition 15. On dit alors que le triplet $(M, \widehat{M}, \omega)$ est une géométrie de Cartan sur M associée à la structure pseudo-riemannienne isométrique, modelée sur $(\mathfrak{g}, P)$. La forme ω est appelée forme de Cartan.

Donnons-nous à présent H un groupe simple non compact qui agit isométriquement sur M. Notons $\mathfrak{h}$ son algèbre de Lie. La géométrie de Cartan décrite ci-dessus nous permet alors de construire une application naturelle

$$\psi : \widehat{x} \in \widehat{M} \mapsto \lambda_{\widehat{x}} \in \mathcal{L}(\mathfrak{h}, \mathfrak{g}).$$

En faisant agir $H \times P$ sur $\widehat{M}$ par $(h,p).\widehat{x} = h.\widehat{x}.p$ et sur $\mathcal{L}(\mathfrak{h}, \mathfrak{g})$ par

$$\forall \alpha \in \mathcal{L}(\mathfrak{h}, \mathfrak{g}),\ \forall (h,p) \in H \times P,\ (h,p).\,\alpha = \mathrm{Ad}(p^{-1}) \circ \alpha \circ \mathrm{Ad}(h^{-1}),$$

on vérifie que ψ défini ci-dessus est équivariante pour l'action de $H \times P$. En particulier, cette application passe au quotient par P en :

$$\varphi : M \to W := \mathcal{L}(\mathfrak{h}, \mathfrak{g})/P.$$

et φ reste H-équivariante. H agit par isométrie sur M, donc en laissant la mesure μ invariante. Par conséquent, H agit également sur W en préservant la mesure finie $\varphi^*\mu$. Un peu de théorie ergodique nous permet de prouver qu'il existe une orbite $H.w \subset W$ de mesure pleine. C'est là qu'entrent en scène les résultats sur les dynamiques algébriques préservant une mesure. Le résultat central est le théorème suivant :

Théorème 9 (Borel-Tits). *Soit G un groupe algébrique agissant algébriquement sur une variété algébrique lisse V, en préservant une mesure borélienne finie μ. Notons W l'adhérence de Zariski du support de μ dans V.*

Alors, le sous-groupe $G_0 \subset G$ formé des éléments de G qui agissent trivialement sur W est un sous-groupe algébrique, normal et cocompact de G. En particulier, les orbites de G sur W sont toutes compactes.

On note $H_w = \mathrm{Stab}_H(w)$. Un peu de travail autour de ce théorème appliqué à H et H/H_w nous permet de conclure qu'il existe un sous-groupe algébrique de H normal et cocompact $\subset H_w$. Mais par hypothèse H est simple et non compact. Ce sous-groupe est donc H entier, d'où $H_w = H$ (il est à noté qu'il y a des subtilité, on utilise en fait que la varitété qui nous intéresse est « presque » algébrique, et qu'un groupe simple est également « presque » algébrique, et il faut travailler en tenant compte des presques). En d'autres termes, $\mu(\varphi^{-1}(w)) = 1$.

En détaillant ce que signifie $H.\varphi(w) = \varphi(w)$, on voit qu'il existe des points $x \in M$ tels que pour tout $\widehat{x} \in \widehat{M}$ s'y projetant, on a un sous-espace $\mathfrak{h}^{\widehat{x}} \subset \mathfrak{g}$ isomorphe comme espace vectoriel à $\mathfrak{h}$, d'un sous groupe (algébrique) $P^{\widehat{x}} \subset P$ dont l'action adjointe sur tout $\mathfrak{g}$ stabilise $\mathfrak{h}^{\widehat{x}}$, y agit comme des éléments de $\mathrm{Ad}(H)$, et *réalise ainsi toute l'action adjointe.* Ceci peut se condenser en

Proposition 10. *Pour tout x dans un ensemble de μ-mesure pleine, à conjugaison par $\lambda_{\widehat{x}}$ à l'arrivée près, le morphisme : $\rho_{\widehat{x}} : p \in P^{\widehat{x}} \mapsto \mathrm{Ad}(p)|_{\mathfrak{h}^{\widehat{x}}} \in \mathrm{Ad}(H)$ est surjectif.*

C'est ce que nous entendrons par ce diagramme :

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{h} \arrow[r, "\mathrm{Ad}(H)"] \arrow[d, "\lambda_{\widehat{x}}"'] & \mathfrak{h} \arrow[d, "\lambda_{\widehat{x}}"] \\ \mathfrak{h}^{\widehat{x}} \arrow[r, "\mathrm{Ad}(P^{\widehat{x}})"] & \mathfrak{h}^{\widehat{x}} \end{tikzcd} \tag{1}$$

En fait, la seule donnée d'un morphisme surjectif d'un sous-groupe de P sur $\mathrm{Ad}(H)$ suffit à prouver le théorème 5. Le diagramme 1 nous dit plus. C'est en s'appuyant sur lui qu'on peut prouver le théorème

Théorème 11. *Les groupes suivant ne peuvent pas agir isométriquement sur une variété lorentzienne compacte :*

1. $O(1,k)$ *pour* $k \geqslant 3$
2. $U(1,k)$ *pour* $k \geqslant 2$
3. $SP(1,k)$ *pour* $k \geqslant 2$
4. F_4^{-20}.

Finalement, il n'y a que très peu de groupes simples non compacts qui se plongent dans un $\mathrm{Isom}(M)$, pour une certaine variété lorentzienne compacte M. Ceux-ci doivent nécessairement avoir une algèbre de Lie contenue dans $\mathfrak{o}(1,2) \simeq \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$.

3 Les actions conformes

3.1 Le cas riemannien

Le cas riemannien se distingue particulièrement par le résultat suivant. Soit (M, g) une variété riemannienne compacte.

Définition 16. Le groupe $\mathrm{Conf}(M)$ est dit *inessentiel* s'il existe une métrique dans la classe conforme de g telle qu'il se réalise le groupe d'isométries de cette métrique.

Il est dit *essentiel* dans le cas contraire, c'est à dire si on ne peut jamais le plonger dans le groupe d'isométries d'une métrique de la classe conforme de g.

Théorème 12 (Ferrand-Obata)**.** *Supposons M de dimension $\geqslant 2$. Alors* $\mathrm{Conf}(M)$ *est essentiel si et seulement si M est conformément équivalente à $\mathbb{S}^n$.*

Démonstration. Nous renvoyons à [FT02]. □

Finalement, un seul groupe vient se rajouter à la liste des groupes qui agissent isométriquement (cf paragraphe 2.1) : le groupe de Möbius de la sphère.

Cependant, on n'a pas d'équivalent du théorème de Ferrand-Obata en signature pseudo-riemannienne.

3.2 Le cas lorentzien

Présentation de l'univers d'Einstein Il s'agit d'une variété compacte qui s'avère être un objet central en géométrie lorentzienne conforme. Il fut introduit à l'origine comme exemple de solution statique de l'équation d'Einstein en relativité générale. En géométrie, il peut être vu comme un analogue conforme lorentzien de la sphère $\mathbb{S}^n$.

Nous noterons :

- $\mathbb{R}^{p,q}$ l'espace $\mathbb{R}^n$ munit de la forme quadratique $-x_1^2 - \cdots - x_p^2 + x_{p+1}^2 + \cdots + x_n^2$. $\mathbf{C}^{p,q}$ le cône isotrope épointé de $\mathbb{R}^{p,q}$.
- π la projection canonique $\mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$, $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Définition 17. On définit ensemblistement l'univers d'Einstein de signature $(1, n-1)$ comme étant la quadrique projective $\mathbf{Ein}^{1,n-1} = \pi(\mathbf{C}^{2,n})$.

Cet ensemble est une variété réelle projective de dimension n.

Proposition 13. $\mathbf{Ein}^{1,n-1}$ *est une variété compacte et connexe, doublement revêtue par le produit* $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^{n-1}$.

Lorsqu'on restreint la métrique $g_{2,n}$ à $\mathbf{C}^{2,n}$, on obtient sur tous les espaces tangents une forme quadratique dégénérée de pseudo-signature $(0, -, +, \cdots, +)$. Que se passe-t-il lorsqu'on descend dans le projectif et qu'on cherche à « pousser » cette distribution de formes quadratiques sur $\mathbf{Ein}^{1,n-1}$? On voit qu'on supprime la dégénérescence et que parce qu'en tout point de $\mathbf{Ein}^{1,n-1}$ on doit choisir arbitrairement une constante pour définir la métrique en ce point, on obtient à l'arrivée une classe conforme de métriques lorentzienne. Lorsqu'on parle d'univers d'Einstein, on fait référence à $\mathbf{Ein}^{1,n-1}$ muni de cette classe conforme de métriques. Par essence, l'action projective du groupe $PO(2,n)$ sur l'univers d'Einstein est conforme et on a même :

Proposition 14. *On a* $\mathrm{Conf}(\mathbf{Ein}^{1,n-1}) = PO(2,n)$.

Finalement, on vient de mettre en évidence une variété compacte munie d'une structure conforme lorentzienne lorentzienne sur laquelle $O(2,n)$ agit conformément, avec noyau fini. On voit alors que dans le cas conforme, il les groupes $O(2,k)$, $k \geqslant 1$ peuvent agir conformément sur une variété lorentzienne compacte. Il en est donc de même pour les groupes $O(1,n)$, $U(1,n) \subset O(2,2n)$.

On étend les techniques développées dans le cas isométrique Soit H un groupe de Lie semi-simple sans facteur compact, qui agit conformément sur une variété lorentzienne compacte.

On a l'équivalent du théorème 8 pour la géométrie conforme. Soient $\mathfrak{g} = \mathfrak{o}(2,n)$ et $P = (\mathbb{R}^* \times O(1,n-1)) \ltimes \mathbb{R}^n$. Alors, la donnée d'une structure conforme lorentzienne sur M est équivalente à celle d'un sous fibré principal $\widehat{M}$ de $\mathcal{R}(M)$ ayant pour groupe P.

Théorème 15 (Géométrie de Cartan conforme lorentzienne)**.** *Il existe sur $\widehat{M}$ une 1-forme à valeurs dans $\mathfrak{g}$, notée ω, qui est telle que :*

1. $\forall \widehat{x} \in \widehat{M}$, $\omega_{\widehat{x}}$ *réalise un isomorphisme linéaire entre* $T_{\widehat{x}}\widehat{M}$ *et* $\mathfrak{g}$.
2. $\forall X \in \mathfrak{p} = \mathrm{Lie}(P)$, $\omega_{\widehat{x}}(X^*_{\widehat{x}}) = X$.
3. $\forall p \in P$, $R_p^* \omega = \mathrm{Ad}(p^{-1})\,\omega$.
4. *Pour toute* $f \in \mathrm{Conf}(M)$, $\widehat{f}^*\omega = \omega$.

Dans l'idéal, on aimerait se trouver dans la situation des actions isométriques en réalisant toute l'action de H par l'action adjointe d'un sous-groupe de P sur un sous-espace de $\mathfrak{g}$ isomorphe à $\mathfrak{h}$. Or, comme on l'a fait remarquer, il est capital d'avoir l'existence d'une mesure finie sur M invariante par tout H. Ce n'est pas nécessairement le cas dans le cas des actions conformes.

Une piste très fructueuse est de considérer seulement l'action de sous-groupes de H qui sont moyennables. Si $R \subset H$ en est un, il admettra automatiquement une mesure invariante, et on obtiendra un ensemble de mesure pleine de $\widehat{M}$ tel que pour tout $\widehat{x}$ dedans, il existe un sous-groupe $P^{\widehat{x}} \subset P$ et un sous-espace $\mathfrak{h}^{\widehat{x}} \subset \mathfrak{g}$ isomorphe comme espace vectoriel à $\mathfrak{h}$, tels que

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{h} \arrow[r, "\mathrm{Ad}(R)"] \arrow[d, "\lambda_{\widehat{x}}"'] & \mathfrak{h} \arrow[d, "\lambda_{\widehat{x}}"] \\ \mathfrak{h}^{\widehat{x}} \arrow[r, "\mathrm{Ad}(P^{\widehat{x}})"] & \mathfrak{h}^{\widehat{x}} \end{tikzcd} \tag{2}$$

C'est en procédant ainsi qu'on peut, comme c'est fait dans [BFM09], prouver le

Théorème 16. *Si H est un groupe semi-simple qui agit conformément sur une variété lorentzienne, alors le rang réel de H est majoré par* 2.

Démonstration. On utilise le diagramme 2 avec comme groupe moyennable A, un sous-groupe de Cartan de H, c'est à dire un sous-groupe abélien tel que pour tout $a \in A$, $\mathrm{Ad}(a)$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Dans un sous groupe semi-simple, il existe des sous-groupes de Cartan et ils ont tous la même dimension, c'est la définition du rang réel d'un groupe semi-simple (rappelons qu'un sous-groupe abélien est toujours moyennable). On prouve alors en décomposant l'algèbre $\mathrm{Lie}(P^{\widehat{x}})$ que la dimension de A est majorée par 2. □

Dans [BFM09], on a un résultat qui nous assure que si H agit et est de rang 2, alors la situation est bien comprise : la variété est un quotient de $\mathbf{Ein}^{1,n-1}$ par un groupe monogène et $\mathrm{Lie}(H) = \mathfrak{o}(2, n)$.

Il reste donc à comprendre les groupes de rang 1. Nous savons déjà que $O(1, n)$ et $U(1, n)$ agissent.

L'objet de la fin de mon mémoire de M2 et du début de mon travail de thèse est, toujours comme on le fait dans [BFM09], en considérant les sous-algèbres nilpotentes de dimension maximale de $\mathfrak{h}$, de prouver que $SP(1, n)$ et F_4^{-20} ne peuvent pas agir conformément sur une variété lorentzienne compacte. Si tel est le cas, le théorème suivant sera établi.

Théorème 17. *Les seuls groupes de Lie semi-simples sans facteur compact qui peuvent agir conformément sur une variété lorentzienne compacte sont*

1. $O(1, n)$, $n \geqslant 2$
2. $U(1, n)$, $n \geqslant 2$
3. $O(2, n)$, $n \geqslant 1$.

Références

[BFM09] U. Bader, C. Frances, and K. Melnick, *An embedding theorem for automorphism groups of cartan geometries*, Geometric and Functional Analysis **19** (2009), no. 2, 333–355.

[FT02] C. Frances and C. Tarquini, *Autour du théorème de ferrand-obata*, Ann. Global Anal. Geom. **21** (2002), no. 1, 51–62.

[Gro88] M. Gromov, *Rigid transformations groups*, Géométrie différentielle (1988), 65–139.

[Kat92] S. Katok, *Fuchsian groups*, University of Chicago Press, 1992.

[Kob72] S. Kobayashi, *Transformation groups in differential geometry*, Springer, 1972.

[Sha94] I. R. Shafarevich, *Basic algebraic geometry*, Springer, 1994.

[Ste99] S. Sternberg, *Lectures on differential geometry*, American Mathematical Soc., 1999.

[Zeg97] A. Zeghib, *Sur les actions affines des groupes discrets*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble **47** (1997), no. 2, 641–685.

[Zeg98] ———, *The identity component of the isometry group of a compact lorentz manifold*, Duke Math. J. 92 **129** (1998), no. 2, 321–333.

[Zim84] R. J. Zimmer, *Ergodic theory and semisimple groups*, Birkhäuser, 1984.

[Zim86] ———, *On the automorphism group of a compact lorentz manifold and other geometric manifolds*, Inventiones Mathematicae **83** (1986), no. 3, 411–424.