# Applications de l'étude des cycles algébriques à la théorie des algèbres à involutions

Simon Pépin Lehalleur

15 mai 2009

## Table des matières

**1 Structures algébriques obtenues par descente galoisienne 3**
1.1 Formes quadratiques . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 3
1.2 Algèbres simples centrales . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 4
1.3 Involutions . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 5

**2 Variétés associées 6**
2.1 Quadriques . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 6
2.2 Variétés de Severi-Brauer . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 7

**3 Groupes de Chow et K-théorie 7**
3.1 Cycles algébriques et problème de l'intersection . . . . . . . . . . 7
3.2 $K_0$ d'un schéma et lien avec les cycles algébriques . . . . . . . . . 9

**4 Applications 10**
4.1 Décomposabilité des algèbres à division . . . . . . . . . . . . . . 10
4.2 Anisotropie des involutions orthogonales . . . . . . . . . . . . . . 11

Ma directrice de mémoire de Master 2, Anne Quequiner-Mathieu m'a introduit à de nombreuses questions de la théorie des algèbres à involutions et des formes quadratiques. Je la remercie pour son encadrement et ses remarques, auxquelles ce texte introductif ne peut rendre justice. Mon tuteur à l'ENS, Philippe Gille a également beaucoup contribué à me faire découvrir, entre autres choses, la cohomologie galoisienne des groupes algébriques.

## Introduction

Dans toute la suite, $F$ désigne un corps de base fixé et $F_s$ une clôture séparable de $F$.

La théorie de Galois classique étudie le comportement des extensions du corps de base $F$ et relie leur classification à la théorie des groupes profinis. Une remarque importante, systématisée par Weil, Tate et Serre, est que l'on peut l'utiliser également pour étudier le comportement de nombreuses classes d'objets algébriques par *extension des scalaires*.

Plus précisément, on considère des objets provenant de l'algèbre linéaire et bilinéaire sur $F$ et vivant sur des $F$-espaces vectoriels de dimension finie : algèbres d'endomorphismes, formes quadratiques et hermitiennes, groupes linéaires et orthogonaux ; dans tous ces cas, étant donné une extension de corps $E/F$ (en particulier pour $F_s/F$), il y a une manière canonique d'étendre les scalaires à $E$, qui correspond à prendre le produit tensoriel de l'espace sous-jacent avec $E$.

A ces objets sont associés divers invariants : pour les formes quadratiques par exemple, on a l'indice de Witt qui mesure le dégré d'isotropie de la forme quadratique. On souhaiterait comprendre comment cet invariant varie après extension des scalaires à $E$.

Ce qui enrichit considérablement la théorie, c'est que l'on étudie aussi la question inverse de la *descente galoisienne* : étant donné un objet sur $E$, trouver les objets sur $F$ dont il peut provenir. Or il se trouve que même lorsque l'on part d'une algèbre de matrices (resp. d'une forme quadratique), on peut obtenir de nouvelles structures : algèbres simples centrales et involutions sur ces algèbres. Pour les étudier, on leur associe d'autres invariants algébriques, par exemple l'indice de Schur pour une algèbre simple centrale, et on souhaite comprendre comment ils varient après extension des scalaires.

Ces questions ont été largement traitées par des méthodes purement algébriques : on peut citer les noms de Witt et Pfister pour la théorie des formes quadratiques, de Brauer, Wedderburn et Albert pour les algèbres simples centrales et d'Albert pour les involutions. Cependant, l'introduction d'idées venues de la géométrie algébrique et de la K-théorie ont depuis les années 80 amené des évolutions fulgurantes dans le domaine, résolvant nombre de questions classiques : on peut citer les noms de l'école russe, Merkurjev, Suslin, Panin, Vishik, Karpenko, Izhboldin,...

L'idée est d'étudier des variétés naturellement associées au contexte algébrique. Dans le cas d'une forme quadratique $q$, la variété associée la plus simple est la quadrique projective définie par l'équation $q = 0$. Dans le cas des algèbres simples centrales, on a la notion de variété de Severi-Brauer, due à Châtelet.

Etant donnée une telle variété $X$, la démarche est de relier les invariants algébriques à des résultats sur les cycles rationnels (c'est-à-dire aux sous-$F$-variétés) de $X$, puis d'appliquer le formalisme de la théorie de l'intersection à ces cycles. Cependant, comme ces calculs de cycles algébriques se révèlent souvent trop difficiles, on a besoin d'un outil supplémentaire qui est plus adapté au calcul : la K-théorie.

Le texte est organisé comme suit : dans la section 1, on présente brièvement les classes de structures algébriques que l'on souhaite étudier : formes quadratiques, algèbres simples centrales, involutions, ainsi que leurs invariants. Dans la section 2, on présente les variétés algébriques associées. Dans la section 3, on évoque les outils géométriques utilisés. Enfin dans la section 4, on présente plusieurs problèmes où les ceux-ci ont permis à Karpenko de faire des progrès importants : la décomposabilité des algèbres simples centrales et l'analogue pour les involutions orthogonales du théorème de Springer pour les formes quadratiques.

# 1 Structures algébriques obtenues par descente galoisienne

## 1.1 Formes quadratiques

On suppose $car(F) \neq 2$.

Soit $(V, q)$ une forme quadratique, c'est-à-dire un polynôme homogène de degré 2 sur le $F$-espace vectoriel de dimension finie $V$. La forme bilinéaire symétrique $b(x, y) = q(x+y) - q(x) - q(y)$ détermine complètement $q$ grâce à l'hypothèse sur la caractéristique. On dira que $q$ est *non-dégénérée* si $b(x, -) = 0 \in V^* \Rightarrow x = 0$. On considère seulement les formes quadratiques non-dégénérées (notons que cette notion est invariante par extension des scalaires).

Le problème de base est de comprendre *l'isotropie* de $q$ au sens suivant :

**Définition 1.1.** Un vecteur $x \in V$, $x \neq 0$ est dit *isotrope* si $q(x) = 0$. Un sous-espace vectoriel $W \subset V$ est dit *totalement isotrope* si $q(W) = 0$. Si $q(x) = 0 \Rightarrow x = 0$, on dit que $q$ est *anisotrope*.

On rappelle le théorème fondamental suivant :

**Définition 1.2.** (décomposition de Witt) Il existe une décomposition de $V$ en somme directe $V = V_{an} \oplus H_1 \oplus ... \oplus H_i$ telle que :
- La décomposition soit orthogonale, c'est-à-dire que si $x$ et $y$ proviennent de facteurs différents, $b(x, y) = 0$.
- La forme $q_{V_an}$ est anisotrope.
- Pour tout $j$, la forme $q_{H_j}$ est isomorphe à la forme hyperbolique $F \oplus F \to F, (x_1, x_2) \mapsto x_1 \cdot x_2$.

**Définition 1.3.** *L'indice de Witt* de $q$, noté $i_0(q)$, est la dimension d'un sous-espace totalement isotrope maximal de $V$, ou encore l'entier $i$ de la décomposition de Witt. Supposons maintenant $q$ anisotrope. Le *premier indice de Witt* de $q$, noté $i_1(q)$ est le minimum des $i_0(q_E)$, où $E/F$ parcourt toutes les extensions telles que $q_E$ est isotrope.

## 1.2 Algèbres simples centrales

Les algèbres simples centrales sont les objets obtenus par descente galoisienne à partir des algèbres de matrices. On adoptera ici la convention qu'une algèbre est toujours associative unitaire et de dimension finie sur le corps de base. Pour les résultats de cette section, on renvoie à [3].

**Définition 1.4.** Soit $A$ une $F$-algèbre. On dira que $A$ est une *algèbre simple centrale* si $A$ n'a pas d'idéal bilatère non-trivial et si le centre $Z(A)$ est réduit à $F \cdot 1$.

Fixons dans la suite une telle algèbre simple centrale $A/F$. Il y a deux exemples importants de telles algèbres : les algèbres de matrices d'une part, et les algèbres à division d'autre part :

**Définition 1.5.** Soit $D$ une $F$-algèbre. On dira que $D$ est une *algèbre à division (centrale)* si $D$ est de centre $F \cdot 1$ et que $D$ n'a pas de diviseurs de zéros.

Le produit tensoriel de deux algèbres simples centrales est encore une algèbre simple centrale. On a un analogue de la décomposition de Witt :

**Théorème 1.6.** *(théorème de Wedderburn) Il existe une algèbre à division $D$, unique à isomorphisme près, et un entier $r$ telle que $A \simeq M_r(D)$.*

**Définition 1.7.** Deux algèbres simples centrales qui partagent

**Lemme 1.8.** *Soit $K$ un corps séparablement clos et $D/K$ une $K$-algèbre à division. Alors $D = F \cdot 1$.*

On déduit des deux énoncés précédents le théorème suivant, qui montre qu'il s'agit bien de descente galoisienne :

**Théorème 1.9.** *Soit $A$ une $F$-algèbre. Alors $A$ est une algèbre simple centrale si et seulement si $A \otimes_F F_s$ est isomorphe à une $F_s$-algèbre de matrices $M_n(F_s)$.*

On peut alors définir l'invariant qui nous intéresse :

**Définition 1.10.** Soit $A/F$ une algèbre simple centrale, $D/F$ une algèbre à division associée à $A$ par le théorème de Wedderburn. Le résultat précédent montre que la dimension de $D$ sur $F$ est un carré. L'entier $\sqrt{dim_F D}$ est appelé *l'indice (de Schur)* de A. La dimension de $A$ sur $F$ est également un carré, et l'entier $\sqrt{dim_F A}$ est appelé *le degré* de A.

La théorie des algèbres à division a commencé avec la découverte des quaternions réels par Hamilton. Sa construction peut être généralisée de la manière suivante :

Exemple 1.11. *On suppose $car(F) \neq 2$.*
*Soit $a, b \in F^*$. Considérons* l'algèbre de quaternions $Q = (a,b)_F$ *de dimension 4 sur $F$ avec la base $(1, i, j, ij)$ et la table de multiplication $i^2 = a, j^2 = b, ij = -ji$.*
*$Q$ est une algèbre simple centrale de dimension 4 et on peut montrer qu'elles sont toutes de cette forme en étudiant les sous-extensions quadratiques.*
*$Q$ est une algèbre de degré 2. L'indice vaut 1 (cas déployé) ou 2 (cas à division).*

Proposition 1.12. $ind(Q) = 1 \Leftrightarrow a \in N_{F(\sqrt{b})/F}(F(\sqrt{b})^\times)$

*Par exemple, pour tout $a \neq 0, 1$, $1 - a = N_{F(\sqrt{a})/F}(1 - \sqrt{a})$, donc $(a, 1-a)_F$ est déployée.*

*Comme cas particulier de ce qui précède, on a un isomorphisme explicite entre $Q_{F_s} \simeq M_2(F_s)$ donné par exemple par :*

$$i \mapsto \sqrt{a} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \ j \mapsto \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix}$$

Un résultat surprenant sur les algèbres simples centrales est le suivant :

**Théorème 1.13.** *L'algèbre $A^{\otimes ind(A)}$ est isomorphe à une algèbre de matrices.*

**Définition 1.14.** *L'exposant* de A, noté $exp(A)$ est le plus petit entier $e$ tel que $A^e$ est isomorphe à une algèbre de matrices. Le théorème précédent montre qu'il existe et divise $ind(A)$.

*Remarque* 1.15. En fait, on peut montrer que $ind(A)$ et $exp(A)$ ont les mêmes diviseurs premiers.

## 1.3 Involutions

Dans cette section, on suppose $car(F) \neq 2$.

Il y a une bonne introduction au sujet dans [11]. Le livre de référence est [7].

**Définition 1.16.** Soit $A/F$ une algèbre simple centrale. Une involution $\sigma$ sur $A$ est un anti-automorphisme de F-algèbre de $A$ vérifiant $\sigma^2 = 1$.

Par définition, une algèbre simple centrale $A$ qui peut être munie d'un anti-automorphisme est isomorphe à $A^{op}$. La remarque à la fin du paragraphe précédent entraîne que que son indice est une puissance de 2.

Le résultat suivant, qui classifie les involutions sur une algèbre de matrices (d'endomorphismes) montre qu'une involution est obtenue par descente galoisienne d'une forme quadratique ou symplectique, à similitude près :

**Théorème 1.17.** *Soit $V/F$ un espace vectoriel de dimension $n$. Soit $\sigma$ une involution sur $A = End_F(V)$. Il existe une forme bilinéaire non-dégénérée $b$ sur $V$ telle que si l'on note $\tilde{b} : V \simeq V^*$ l'isomorphisme induit et $^t : End_F(V) \to$*

*$End_F(V^*)$ la transposition, on a pour tout $f \in End_F(V)$ $\sigma(f) = \tilde{b}^{-1} \circ^t f \circ \tilde{b}$. De plus, $b$ est nécessairement symétrique ou antisymétrique, et $\sigma$ détermine $b$ à un scalaire près. Dans le cas où $b$ est symétrique, on dit que $\sigma_b$ est une involution* orthogonale. *Dans le cas où $b$ est antisymétrique, on dit que $\sigma_b$ est une involution* symplectique.

**Définition 1.18.** Soit $(A, \sigma)/F$ une algèbre à involution. Soit $E/F$ une extension déployant $A$, c'est-à-dire telle que $A_E$ est isomorphe à une algèbre de matrices. Le type de $\sigma_E$ (orthogonal ou symplectique) ne dépend pas du choix de $E$. On dit que $\sigma$ est *orthogonale (resp. symplectique)* si $\sigma_E$ est orthogonale (resp. symplectique).

EXEMPLE 1.19. *Soit $Q = (a, b)_F$ une algèbre de quaternions muni de sa base $(1, i, j, ij)$. L'application $\gamma$ $F$-linéaire définie par $i \mapsto -i$, $j \mapsto -j, ij \mapsto -ij$ est une involution. On peut montrer qu'elle ne dépend pas du choix d'une base quaternionique et s'écrit en terme de la trace réduite. L'involution $\gamma$ est une forme de l'involution*

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} t & -y \\ -z & x \end{pmatrix}$$

*qui est associée à la forme symplectique standard sur $F^2$, donc $\gamma$ est symplectique. On peut montrer que c'est l'unique involution symplectique sur $Q$. Pour obtenir des exemples d'involutions orthogonales, il suffit de conjuguer par un élément inversible $\gamma$-antisymétrique, c'est-à-dire un "quaternion pur". Par exemple, on peut étudier $Int(j) \circ \gamma$ via l'isomorphisme*

$$i \mapsto \sqrt{a} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \; j \mapsto \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix}$$

*On obtient l'involution adjointe à la forme quadratique $< 1, -b >$.*

Pour simplifier, dans la suite de l'exposé on ne considérera que des involutions orthogonales.

Il y a une notion d'isotropie en théorie des algèbres à involutions qui est une descente de celle des formes quadratiques :

**Définition 1.20.** Soit $(A, \sigma)/F$ une involution. On dit que $x \in A$, $x \neq 0$ est *isotrope* si $\sigma(x) \cdot x = 0$. Si $\sigma(x) \cdot x = 0 \Rightarrow x = 0$, on dit que $\sigma$ est *anisotrope*.

Là encore, il existe une notion d'indice mesurant le défaut d'anisotropie.

# 2 Variétés associées

## 2.1 Quadriques

Dans cette section, $car(F) \neq 2$.

**Définition 2.1.** Soit $(V,q)/F$ une forme quadratique non-dégénérée. Dans l'espace projectif $\mathbb{P}(V)$, l'équation $q=0$ définit une hypersurface lisse, intègre si $dim(V) \leq 3$, que l'on appelle *quadrique associée à* $q$, et que l'on notera $Q_q$.

La variété $Q_q$ a un $F$-point si et seulement si $q$ est isotrope.

Exemple 2.2. *Soit $q = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ la somme de deux plans hyperboliques. Alors $Q_q \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.*

## 2.2 Variétés de Severi-Brauer

Pour la géométrie des variétés de Severi-Brauer, l'article [1] constitue une très bonne introduction. Le livre [3] est très complet.

**Proposition 2.3.** *Soit $A/F$ une algèbre simple centrale de degré $d$. Il existe un procédé canonique pour construire une variété $SB(A)$, dite* variété de Severi-Brauer *associée à $A$ telle que pour toute extension de corps $E/F$ on ait $SB(A)(E) \simeq \{I$ idéal à gauche de dimension $d$ de $A_E\}$.*

En particulier, pour $A = End_F(V)$, on sait que les idéaux à gauche de $A$ sont de la forme $Hom_F(V/W,V)$ avec $W$ sous-espace vectoriel de $V$, de sorte qu'en fait $SB(End_F(V)) \simeq \mathcal{P}(V)$. Dans le cas général, cela implique que $SB(A)$ s'obtient par descente galoisienne à partir de l'espace projectif.

Exemple 2.4. *Supposons $car(F) \neq 2$. Soit $Q = (a,b)_F$ une algèbre de quaternions munie de sa base canonique $(1,i,j,ij)$. On définit une forme norme $N : Q \to F, a_1 + a_2 \cdot i + a_3 \cdot j + a_4 \cdot ij \mapsto a_1^2 - a_2^2 \cdot a - a_3^2 \cdot b + a_4^2 \cdot ab$. Un élément $\alpha$ de $Q$ est inversible si et seulement si $N(\alpha) \neq 0$. Maintenant il est facile de voir qu'un idéal à gauche de rang 2 de $Q$ est nécessairement de la forme $L = A \cdot \alpha$, avec $\alpha = a_1 + a_2 \cdot i + a_3 \cdot j$, $N(\alpha) = 0$ et $\alpha \neq 0$ et que deux tels idéaux $A \cdot \alpha$ et $A \cdot \beta$ sont égaux si et seulement si $\alpha$ et $\beta$ sont proportionnels. Donc on a un isomorphisme entre les idéaux à gauche de $Q$ et les points de la conique plane $a_1^2 - a_2^2 \cdot a - a_3^2 \cdot b = 0$ dans $\mathbb{P}^2$. Cette courbe est la variété de Severi-Brauer associée à $Q$.*

Le corps de fonctions $F(SB(A))$ de la variété de Severi-Brauer associée à $A$ est un invariant important, qui apparait dans les deux applications de la section 4.

# 3 Groupes de Chow et K-théorie

## 3.1 Cycles algébriques et problème de l'intersection

La référence la plus complète sur la théorie de l'intersection est le livre de Fulton, [2]. On considère la classe $Sm(F)$ des variétés algébriques lisses quasi-projectives sur le corps $F$.

**Définition 3.1.** Soit $X \in Sm(F)$, $i \in \mathbb{N}$. Un *cycle premier* sur $X$ est une sous-variété intègre (non-nécessairement lisse) de $X$. Le *groupe des cycles de codimension $i$ de $X$*, noté $Z^i(X)$, est le groupe abélien libre engendré par les cycles premiers. Le *groupe des cycles de $X$* est le groupe abélien gradué $Z^*(X) = \bigoplus Z^i(X)$.

La connaissance des cycles algébriques sur une variété fournit beaucoup d'informations sur sa géométrie, mais est difficile à atteindre en général. Le point est que, contrairement à une variété différentielle, une variété algébrique a peu de sous-variétés, et qu'il est très difficile de les construire.

L'idée de la théorie de l'intersection est qu'à partir de deux cycles algébriques on devrait pouvoir en produire un troisième par intersection, en tenant compte des multiplicités. Il suffit de définir l'intersection de cycles premiers et d'étendre par bilinéarité.

**Définition 3.2.** Soit $Y \in Z^i(X)$, $W \in Z^j(X)$ deux cycles premiers. On dit que $Y$ et $W$ *s'intersectent proprement* si pour toute composante irréductible $S$ de l'intersection schématique réduite $(Y \cap W)_{red}$, $codim_X(S) = i + j$.

**Définition 3.3.** Soit $Y \in Z^i(X)$, $W \in Z^j(X)$ deux cycles premiers s'intersectant proprement. On définit leur *produit d'intersection*, qui est un cycle dans $Z^{i+j}(X)$, par la formule :

$$Y \cdot Z = \sum_S l(\mathcal{O}_{Y \cap Z, S}) \cdot S$$

où $S$ parcourt les composantes irréductibles de l'intersection schématique réduite et où $l(\mathcal{O}_{Y\cap Z,S}$ est la longueur de l'anneau local artinien $\mathcal{O}_{Y\cap Z,S}$.

On a donc un produit d'intersection partiellement défini. Malheuresement il ne s'étend pas à $Z^*(X)$. Pour cela, on introduit une certaine relation d'équivalence homogène sur $Z^*(X)$, dite *équivalence rationnelle*, et que l'on notera $\sim$ dans la suite. On peut alors définir le $i$-ème groupe de Chow de $X \in Sm(X)$ par :

$$CH^i(X) = Z^i(X)/\sim$$

Dans le cas de codimension 1, on retrouve l'équivalence linéaire des diviseurs de Weil, d'où sur une variété lisse $X$ un isomorphisme $CH^1(X) \simeq Pic(X)$.

On a alors le théorème difficile suivant :

**Théorème 3.4.** *Le produit d'intersection partiel est compatible avec $\sim$ et au niveau de $CH^*(X)$ on a un produit d'intersection défini partout, qui fait de $CH^*(X)$ un anneau gradué.*

Les groupes de Chow ont certaines fonctorialités, et il existe un formalisme : localisation, invariance homotopique... qui permet de les calculer dans certains cas. En particulier, pour les variétés associées à nos objets algébriques *dans le cas déployé* : espace projectif et quadrique standard, on a des descriptions très simples de leurs groupes de Chow : ce sont des groupes abéliens libres sur des génerateurs géométriques naturels, et on connait explicitement la structure d'anneau. Par exemple, pour tout $0 \leq i \leq n$, $CH^i(\mathbb{P}^n) = [H]^i \cdot \mathbb{Z}$ où $[H]$ est la classe d'un hyperplan.

Maintenant, si l'on prend une variété $X$ associée à un objet non-déployée, on connait la structure de $CH^*(X_{F_s})$ par ce qui précède, et on a une flèche canonique (non-injective en général) :

$$CH^*(X) \to CH^*(X_{F_s})$$

L'image de cette flèche est appelée *groupe des cycles rationnels*, notée $\overline{CH}^*(X)$. Ce groupe contient suffisamment d'information pour reconstituer les invariants qui nous intéressent. Par exemple, on a :

**Proposition 3.5.** *Soit $A/F$ une algèbre simple centrale, $X$ la variété de Severi-Brauer associée. Alors :*
- $\overline{CH}^1(X) = \mathbb{Z} \cdot \exp(A) \cdot [H] \subset \mathbb{Z} \cdot [H] = CH^1(X_{F_s})$
- $\overline{CH}^{dimX} = \mathbb{Z} \cdot \mathrm{ind}(A) \cdot [p] \subset \mathbb{Z} \cdot [p] = CH^{dimX}(X_{F_s})$

## 3.2 $K_0$ d'un schéma et lien avec les cycles algébriques

Une autre manière d'étudier une variété algébrique $X$ est de considérer la catégorie des faisceaux cohérents $Coh(X)$ (ou des fibrés vectoriels) sur cette variété. Cependant, même dans le cas des fibrés vectoriels, il est très difficile d'obtenir une information complète : les seules variétés projectives sur lesquelles on sait classifier tous les fibrés vectoriels sont les courbes de genre $\leq 1$ (Grothendieck, Atiyah). La K-théorie, introduite en géométrie algébrique dans les années 50 par Grothendieck, permet de produire une série d'invariants à partir de ces catégories, et s'est révelée un outil indispensable pour l'étude des cycles algébriques. Le premier de ces invariants est le $K_0$ :

**Définition 3.6.** Soit $X \in Sm(F)$. Le *groupe de Grothendieck* de $X$, où encore 0-*ième groupe de K-théorie* de $X$, noté $K_0(X)$, est le quotient du groupe abélien libre sur les classes d'isomorphisme de faisceaux cohérents sur $X$ par le sous-groupe engendré par les éléments de la forme $[X] - [Y] - [Z]$ pour lesquels il existe une suite exacte de faisceaux :

$$0 \to Y \to X \to Z \to 0$$

Exemple 3.7. *Avec le lemme de Grothendieck sur la classification des fibrés vectoriels sur $\mathbb{P}^1$ ( tout fibré vectoriel est isomorphe à une somme de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(i)$) et un petit travail pour passer aux faisceaux cohérents quelconques, on obtient que :*

$$K_0(\mathbb{P}^1) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, [\mathcal{F}] \mapsto (rang(\mathcal{F}), deg(\mathcal{F}))$$

Quillen, puis Panin ont réussi à calculer ce groupe pour toutes les variétés associées aux objets algébriques qui nous intéressent (cf [10], [8]), et pas uniquement dans le cas déployé. Par exemple, si $X = SB(A)$ et $\xi$ un générateur de degré 1, on a :

$$K_0(X) \simeq \left( \bigoplus_i ind(A^{\otimes i}) \cdot \xi^i \right) / (1-\xi)^{degA}$$

Or Grothendieck avait remarqué dès les débuts de la K-théorie qu'il existait un lien entre celle-ci et les groupes de Chow. Ce lien passe par une certaine filtration décroissante du groupe $K_0(X)$, la *filtration topologique*, notée $K_0(X)^{(0)} = K_0(X) \supset K_0(X)^{(1)} \supset \ldots \supset K_0(X)^{(dimX+1)} = 0$. On a pour tout $i$ une flèche surjective :

$$\phi : CH^i(X) \twoheadrightarrow K_0(X)^{(d)}/K_0(X)^{(d+1)}, Z \mapsto [\mathcal{O}_Z]$$

Cette filtration n'est pas donnée par les calculs de Quillen-Panin mais on peut parfois contourner cet obstacle et obtenir des informations sur les groupes de Chow. Par exemple dans [4], Karpenko calcule cette filtration dans le cas où $X = SB(D)$, avec $D$ algèbre à division telle que $ind(D) = exp(D)$.

# 4 Applications

## 4.1 Décomposabilité des algèbres à division

On étudie la question de la décomposabilité des algèbres à division au sens du produit tensoriel.

Le théorème suivant est dû à Brauer (cf [3], proposition 4.5.16) :

**Théorème 4.1.** *Soit $D/F$ une algèbre à division d'indice $n$. Si la décomposition de $n$ en produit de facteurs premiers s'écrit $n = p_1^{m_1} \ldots p_r^{m_r}$, il existe des $F$-algèbres à division $D_1, \ldots D_r$ avec $ind(D_i) = p_i^{m_i}$ et $D \simeq D_1 \otimes \ldots \otimes D_r$.*

Donc on peut se concentrer sur le cas où $ind(D) = p^\alpha$ et $exp(D) = p^\beta$. La relation $exp|ind$ montre que si $\alpha = \beta$, $D$ ne peut admettre de décomposition non-triviale. Concentrons nous sur le cas typique $\beta = 1$.

Un des théorèmes les plus profonds de la théorie des algèbres simples centrales est le théorème de Merkurjev-Suslin (cf [3], [12]). Sa preuve utilise de manière intensive la K-théorie des variétés de Severi-Brauer. Un corollaire important en est :

**Théorème 4.2.** *Soit $D/F$ une algèbre simple centrale d'indice $p^\alpha$ et d'exposant $p$. Alors il existe des algèbres à division $D_1, \ldots, D_\gamma$ d'indice $p$ telles que $D$ et $\bigotimes_i D_i$ sont Brauer-équivalentes.*

On peut se demander s'il est possible de remplacer la Brauer-équivalence par une égalité dans ce qui précède. Un théorème classique d'Albert donne un cas où c'est possible (cf [1] pour une preuve géométrique).

**Théorème 4.3.** *Toute algèbre à division d'indice 4 et d'exposant 2 est le produit tensoriel de deux algèbres de quaternions.*

Par contre, dans tous les autres cas, il existe des algèbres indécomposables. Les premiers exemples datent de 1979 (Amitsur, Rowen et Tignol). Dans l'article [5], Karpenko donne une manière très générale de construire de telles algèbres indécomposables. Soit $D/F$ une algèbre à division avec $ind(D) = exp(D) = p^\alpha$ (il en existe par exemple sur tout corps de nombre). Posons alors $D' = D_{F(SB(D^p))}$, $X = SB(D)$. Karpenko montre alors le théorème suivant :

**Théorème 4.4.** *Si $(p, \alpha) \neq (2, 2)$, l'algèbre $D'$ vérifie $ind(D') = p^\alpha$, $exp(D') = p$ et est indécomposable.*

La preuve consiste à calculer complètement $\overline{CH}^*(X)$ en utilisant le calcul de la filtration topologique pour $SB(D)$ (cf [4]) et à vérifier qu'elle est incompatible avec l'existence d'une décomposition en produit tensoriel. Le cas $ind = 8$ est plus délicat et implique de mettre en évidence un élément de 2-torsion dans $CH^2(X)$.

## 4.2 Anisotropie des involutions orthogonales

Soit $(A, \sigma)/F$ une algèbre involution orthogonale anisotrope. Par analogie avec le théorème de Springer sur les formes quadratiques (cf [11]), on est amené à poser la conjecture :

**Conjecture 4.5.** *Soit $E/F$ une extension finie impaire. Alors l'involution $\sigma_E$ est anisotrope.*

Pour attaquer ce problème, Karpenko introduit dans [6] la conjecture suivante, dont on montre facilement en utilisant le théorème de Springer qu'elle entraîne la précédente :

**Conjecture 4.6.** *L'involution $\sigma_{F(SB(A))}$ (qui est une involution sur une algèbre déployée, donc associée à une certaine forme quadratique $q$) est anisotrope (de manière équivalente, $q$ est anisotrope).*

Cette conjecture est connue dans deux cas extrêmes : celui où $A$ est Brauer-équivalente à une algèbre de quaternions (cf [9]) et celui où $A$ est une algèbre à division (cf [6]). Concentrons-nous sur ce dernier cas.

**Théorème 4.7.** *Soit $(D, \sigma)$ une algèbre à division d'indice $2^\alpha$ qui porte l'involution $\sigma$ (qui dans ce cas est automatiquement anisotrope). Alors l'involution $\sigma_{F(SB(D))}$ est anisotrope*

L'idée de la preuve est la suivante. Soit $D$ l'algèbre à division d'indice $2^\alpha$ qui porte l'involution $\sigma$ (qui dans ce cas est automatiquement anisotrope). Karpenko utilise la K-théorie pour obtenir une information modulo 2 sur le groupe des cycles rationnels de $X = SB(D)$, à savoir :

**Proposition 4.8.** *Soit $i > 0$. On a l'inclusion suivante :*

$$\overline{CH}^i(X) \subset 2 \cdot [H] \cdot \mathbb{Z} \subset [H] \cdot \mathbb{Z} = CH^i(X_{F_s})$$

Il en déduit ensuite une information modulo 2 sur le même groupe pour $X \times X$ et arrive à la conclusion suivante :

**Proposition 4.9.** *On a un isomorphisme canonique :*

$$\overline{CH}^{dimX}(X \times X)/2 \simeq \Delta \cdot \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

*où $\Delta$ désigne la diagonale.*

Mais $CH^{dim(X)}(X \times X)$ contient en particulier les adhérences des graphes des applications rationnelles $X \dashrightarrow X$. Cela entraîne le résultat suivant :

**Proposition 4.10.** *Toute application rationnelle de $X$ dans $X$ est dominante.*

Supposons maintenant $\sigma_{F(X)}$ isotrope. En traduisant cette condition en terme de l'existence d'un $F(X)$-point rationnel d'une certaine hypersurface $Y$ de $X_{F(X)}$ (déterminée par $\sigma$) et en utilisant la correspondance entre $F(X)$-points de $Y$ et applications rationnelles de $X$ dans $Y$, on obtient une application rationnelle de $X$ dans $X$ qui contredit le théorème précédent.

# Références


[1] M. Artin. Brauer-Severi varieties. In *Brauer groups in ring theory and algebraic geometry (Wilrijk, 1981)*, volume 917 of *Lecture Notes in Math.*, pages 194–210. Springer, Berlin, 1982.

[2] William Fulton. *Intersection theory*, volume 2 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics]*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1998.

[3] Philippe Gille and Tamás Szamuely. *Central simple algebras and Galois cohomology*, volume 101 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2006.

[4] N. A. Karpenko. On topological filtration for Severi-Brauer varieties. In *K-theory and algebraic geometry : connections with quadratic forms and division algebras (Santa Barbara, CA, 1992)*, volume 58 of *Proc. Sympos. Pure Math.*, pages 275–277. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995.

[5] Nikita A. Karpenko. Torsion in $\mathrm{CH}^2$ of Severi-Brauer varieties and indecomposability of generic algebras. *Manuscripta Math.*, 88(1) :109–117, 1995.

[6] Nikita A. Karpenko. On anisotropy of orthogonal involutions. *J. Ramanujan Math. Soc.*, 15(1) :1–22, 2000.

[7] Max-Albert Knus, Alexander Merkurjev, Markus Rost, and Jean-Pierre Tignol. *The book of involutions*, volume 44 of *American Mathematical Society Colloquium Publications*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1998. With a preface in French by J. Tits.

[8] I. A. Panin. On algebraic $K$-theory of generalized flag fiber bundles and some of their twisted forms. In *Algebraic $K$-theory*, volume 4 of *Adv. Soviet Math.*, pages 21–46. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991.

[9] R. Parimala, R. Sridharan, and V. Suresh. Hermitian analogue of a theorem of Springer. *J. Algebra*, 243(2) :780–789, 2001.

[10] Daniel Quillen. Higher algebraic $K$-theory. I. In *Algebraic $K$-theory, I : Higher $K$-theories (Proc. Conf., Battelle Memorial Inst., Seattle, Wash., 1972)*, pages 85–147. Lecture Notes in Math., Vol. 341. Springer, Berlin, 1973.

[11] Winfried Scharlau. *Quadratic and Hermitian forms*, volume 270 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1985.

[12] V. Srinivas. *Algebraic $K$-theory*. Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, second edition, 2008.