

# L'arbre de Bruhat-Tits

Tony Ly & Adeline Pierrot

27 juin 2007



On cherche à comprendre certains aspects des représentations lisses de  $\mathrm{GL}_1(\mathbb{Q}_p)$  et  $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$  en caractéristique  $p$ .

L'étude de  $\mathbb{Q}_p^\times = \mathrm{GL}_1(\mathbb{Q}_p)$  révèle l'importance du pro- $p$ -groupe  $1 + p\mathbb{Z}_p$  et ceci nous permet de classifier les caractères lisses de  $\mathrm{GL}_1(\mathbb{Q}_p)$ .

Dans le cas de  $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ , on a besoin de nouveaux outils. On construit pour cela l'arbre de Bruhat-Tits. L'action de  $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$  sur l'arbre fait apparaître un sous-groupe particulier, dont on extrait là aussi un pro- $p$ -groupe, le pro- $p$ -Iwahori  $\mathcal{I}(1)$ . Ceci nous apporte de précieuses informations sur les représentations lisses de  $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$  en caractéristique  $p$ .

Quant à  $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$  pour  $n \geq 3$ , le problème reste ouvert...

Nous tenions à remercier amicalement Rachel Ollivier pour son aide précieuse à la floraison de beaux arbres et sans qui ce travail n'aurait jamais aussi bien porté ses fruits.

# 1 Des nombres $p$ -adiques

Pour commencer, il est indispensable de s'appropriier quelques notions sur les nombres  $p$ -adiques. Voici deux manières classiques de les *construire* :

## 1.1 Vus comme une limite projective

On peut les introduire comme une limite projective d'anneaux.

Dans le cas qui nous intéresse, on fixe un nombre premier  $p$  et on prend l'anneau  $A_n = \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ . On note  $p_n$  le morphisme canonique de  $\mathbb{Z}$  sur  $A_n$  et  $\Phi_{n,n-1}$  l'homomorphisme naturel de  $A_n$  dans  $A_{n-1}$  qui à  $x \pmod{p^n}$  associe  $x \pmod{p^{n-1}}$ . Alors le diagramme suivant est commutatif.

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{Z} & \\ p_n \swarrow & & \searrow p_{n-1} \\ \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} & \xrightarrow{\Phi_{n,n-1}} & \mathbb{Z}/p^{n-1}\mathbb{Z} \end{array}$$

Soit maintenant  $A = \prod_{n \geq 1} A_n$ , muni de sa structure d'anneau produit, et soit  $\pi_n$  le morphisme canonique de  $A$  sur  $A_n$ . Chacun des  $A_n$  muni de la topologie discrète est un anneau topologique compact. On munit  $A$  de la topologie produit, ce qui en fait un anneau topologique compact.

Soit  $i$  l'application de  $\mathbb{Z}$  dans  $A$  définie par  $i(z) = (p_n(z))_{n \geq 1}$ . C'est un morphisme d'anneaux injectif, donc l'image  $i(\mathbb{Z})$  est un sous-anneau de  $A$  isomorphe à  $\mathbb{Z}$ . De plus pour  $n \geq 2$  et  $a \in \mathbb{Z}$  :

$$\Phi_{n,n-1}(\pi_n(a)) = \pi_{n-1}(a) \quad (R_n).$$

**Proposition 1.1** *L'ensemble  $\mathbb{Z}_p$  des éléments de  $A = \prod_{n \geq 1} A_n$  qui satisfont les relations  $(R_n)$  pour  $n \geq 2$  est un sous-anneau topologique compact de  $A$  contenant l'image  $i(\mathbb{Z})$  de  $\mathbb{Z}$ .*

*Preuve* : Soit  $n \geq 2$ , l'ensemble  $E_n$  des éléments de  $A$  qui satisfont la relation  $(R_n)$  est un sous-anneau compact de  $A$  car les applications  $\Phi_{n,n-1}$ ,  $\pi_n$  et  $\pi_{n-1}$  sont continues et sont des morphismes d'anneaux. Donc  $\mathbb{Z}_p$  qui est l'intersection des  $E_n$  est un sous-anneau compact de  $A$ . Enfin on a déjà vu que pour  $n \geq 2$ ,  $i(\mathbb{Z}) \subset E_n$ .  $\square$

L'anneau topologique  $\mathbb{Z}_p$  est appelé *anneau des entiers  $p$ -adiques*. Nous identifierons le plus souvent  $\mathbb{Z}$  et son image dans  $\mathbb{Z}_p$  par l'homomorphisme  $i$ .

Détaillons la topologie profinie sur  $\mathbb{Z}_p$  : soit  $a = (a_n)_{n \geq 1}$  un point de  $A$ . On a muni  $A$  de la topologie produit donc la famille des  $W_K(a) = \bigcap_{n \in K} \pi_n^{-1}(a_n)$ , où  $K$  parcourt l'ensemble des parties finies de  $\mathbb{N}$ , est une base

de voisinages de  $a$  dans  $A$ . Si de plus  $a \in \mathbb{Z}_p$ , soit  $k = \sup\{n \mid n \in K\}$ , alors pour  $n \leq k$ ,  $(\pi_n^{-1}(a_n) \cap \mathbb{Z}_p) \supseteq (\pi_k^{-1}(a_k) \cap \mathbb{Z}_p)$  donc  $W_K(a) \cap \mathbb{Z}_p = \pi_k^{-1}(a_k) \cap \mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Z}_p \mid \pi_k(x) = \pi_k(a)\}$ . On voit ainsi que pour  $a \in \mathbb{Z}_p$ , la suite  $V_k(a) = \{x \in \mathbb{Z}_p \mid \pi_k(x) = \pi_k(a)\}$ ,  $k \geq 1$  est une base de voisinages de  $a$  dans  $\mathbb{Z}_p$ .

## 1.2 Vus comme un complété métrique

On a l'habitude de métriser  $\mathbb{Q}$  à l'aide d'une norme, qui se nomme valeur absolue et sera notée  $|\cdot|_\infty$ . On peut en fait généraliser la notion de *valeur absolue* via les axiomes suivants :  $|\cdot|$  est une valeur absolue sur  $\mathbb{Q}$  si pour tous  $x, y \in \mathbb{Q}$ , on a

$$\begin{cases} x = 0 \Leftrightarrow |x| = 0 \\ |xy| = |x||y| \\ |x + y| \leq |x| + |y|. \end{cases}$$

La dernière relation est appelée inégalité *triangulaire* ; il arrive parfois que nos éléments satisfassent une relation plus forte, l'*inégalité ultramétrique* :  $|x + y| \leq \max(|x|, |y|)$ , auquel cas on parlera de *valeur absolue ultramétrique*. L'espace considéré est alors dit *non-archimédien* (en rappelant que  $\mathbb{R}$  est dit archimédien).

Pour  $p \in \mathcal{P}$  (l'ensemble des nombres premiers), soit  $v_p(x)$  l'exposant de  $p$  dans la décomposition de  $x$  en facteurs premiers, pour  $x \in \mathbb{Q}$  non nul, et  $v_p(0) = +\infty$ . C'est une valuation discrète sur  $\mathbb{Q}$ , c'est-à-dire une application de  $\mathbb{Q}$  dans  $\mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$  vérifiant les propriétés :

- pour tout  $x \in \mathbb{Q}$ ,  $v_p(x) = +\infty \Leftrightarrow x = 0$
- pour tout  $x$  et  $y \in \mathbb{Q}$ ,  $v_p(xy) = v_p(x) + v_p(y)$
- pour tout  $x$  et  $y \in \mathbb{Q}$ ,  $v_p(x + y) \geq \inf\{v_p(x), v_p(y)\}$ .

On remarque que  $x \mapsto p^{-v_p(x)}$  (avec la convention  $v_p(0) = \infty$ ) vérifie les axiomes de valeur absolue ultramétrique sur  $\mathbb{Q}$  lorsque  $p \in \mathcal{P}$  ; cela définit la valeur absolue  $p$ -adique que l'on note  $|x|_p$ . En fait, c'est la seule possibilité qui nous est offerte.

**Théorème 1.2 (Ostrowski)** *Sur  $\mathbb{Q}$ , toute valeur absolue non triviale est équivalente à l'un des  $|\cdot|_l$  avec  $l \in \mathcal{P} \cup \{\infty\}$ .*

Démonstration : On pourra se référer à [3]. □

Remarquons que l'équivalence citée dans le théorème est celle des topologies (ou plutôt des distances) induites par les distances associées  $d_l(x, y) = |x - y|_l$ .

Revenons-en à nos moutons. On fixe  $p \in \mathcal{P}$  (puisque le cas  $\infty$  nous redonne la métrique usuelle). Et il est facile de voir que  $(\mathbb{Q}, |\cdot|_p)$  n'est pas complet (considérer  $(u_n) = \left(\sum_{k=1}^n a_k p^k\right)_n$ , où  $a_k$  est le  $k$ -ième chiffre dans

l'écriture de  $e$  en base  $p$  : elle est de Cauchy puisque  $|u_{n+m} - u_n|_p \leq p^{-(n+1)}$  mais ne converge pas dans  $\mathbb{Q}$  car son développement n'est pas périodique). On appelle alors  $\mathbb{Q}_p$  le complété de  $\mathbb{Q}$  pour  $|\cdot|_p$ . On remarque que pour  $a \in \mathbb{Q}_p$ , la suite  $W_k(a) = \{x \in \mathbb{Q}_p \mid |a - x|_p \leq p^{-k}\}$ ,  $k \geq 1$  est une base de voisinages de  $a$  dans  $\mathbb{Q}_p$ .

L'espace obtenu est totalement discontinu et c'est un corps ! Notons, pour la culture, qu'il ne faut pas rêver :  $\mathbb{Q}_p$  est plus gros que  $\mathbb{Q}$  mais certainement pas algébriquement clos (par exemple certaines extensions cycliques ne sont pas triviales du fait que le groupe de valuation est discret). Par le lemme de Steinitz, on peut en prendre une clôture algébrique  $\overline{\mathbb{Q}_p}$ . On peut voir qu'on peut étendre la valeur absolue de manière unique sur  $\overline{\mathbb{Q}_p}$ ; mais malheur, cette dernière n'est plus complète. Alors on recomplete, et le corps obtenu reste algébriquement clos : on vient d'assister à la naissance de  $\mathbb{C}_p$ .

### 1.3 Équivalence des définitions de $\mathbb{Q}_p$

On notera  $\mathbb{Z}_p$  l'anneau topologique défini dans la partie 1.1, et  $\mathcal{Z}_p$  le complété de  $\mathbb{Z}$  pour la valeur absolue  $p$ -adique  $|\cdot|_p$  vue dans la partie 1.2. Le but de cette partie est de montrer que ces deux objets sont les mêmes et sont munis de la même topologie.

**Proposition 1.3** *Soit  $x \in \mathbb{Z}_p$ , il existe une unique suite  $(b_n)_{n \geq 0}$ ,  $0 \leq b_n < p$  telle que la série  $\sum_{n \geq 0} b_n p^n$  converge vers  $x$  dans  $\mathbb{Z}_p$ . Cette série est appelée développement de Hensel de  $x$ .*

*Preuve* : Si l'on représente les éléments de  $A_n = \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$  par les entiers compris entre 0 et  $p^n - 1$ , chaque entier  $p$ -adique  $x = (x_n)_{n \geq 1}$  peut être représenté par une suite d'entiers  $(a_n)_{n \geq 1}$  définis par :  $0 \leq a_n < p^n$  et  $a_n \in x_n$  (soit  $\pi_n(i(a_n)) = x_n = \pi_n(x)$ ).

Comme  $x \in \mathbb{Z}_p$  on a pour  $n \geq 1$ ,  $p^n \mid (a_{n+1} - a_n)$ . Il existe donc une suite  $(b_n)_{n \geq 0}$  d'entiers  $0 \leq b_n < p$  tels que  $a_n = b_0 + b_1 p + \dots + b_{n-1} p^{n-1}$ .

Or par définition,  $i(a_n) \in V_n(x)$  donc la suite  $i(a_n)$  converge vers  $x$  dans  $\mathbb{Z}_p$ , c'est à dire que la série  $\sum_{n \geq 0} b_n p^n$  converge vers  $x$  dans  $\mathbb{Z}_p$ . On a donc l'existence ; et l'unicité découle du lemme suivant. □

**Lemme 1.4** *Soit  $(b_n)_{n \geq 0}$  une suite d'entiers  $p$ -adiques. La série  $\sum_{n \geq 0} b_n p^n$  converge dans  $\mathbb{Z}_p$ ; soit  $x$  sa somme. Supposons de plus que  $b_n = 0$  pour  $n < n_0$  et  $\pi_1(b_{n_0}) \neq 0$ . Alors  $\pi_{n_0}(x) \neq 0$  et  $\pi_n(x) = 0$  pour  $n < n_0$ .*

Grâce à la décomposition de Hensel, on peut donc plonger  $\mathbb{Z}_p$  dans  $\mathcal{Z}_p$ . Inversement on peut plonger  $\mathcal{Z}_p$  dans  $\mathbb{Z}_p$  car tout élément  $x \in \mathcal{Z}_p$  peut s'écrire comme la somme d'une série  $\sum_{n \geq 0} b_n p^n$  où  $0 \leq b_n < p$ . On associe

alors à  $x$  l'élément  $y \in \mathbb{Z}_p$  tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\pi_n(y) = \sum_{0 \leq k < n} b_k p^k$  (ceci définit bien un élément de  $\mathbb{Z}_p$ ).

On a donc l'équivalence des objets, reste à montrer celle des topologies. Soit  $a \in \mathbb{Z}_p$  et soit  $V_k(a) = \{x \in \mathbb{Z}_p \mid \pi_k(x) = \pi_k(a)\}$  un élément de la base de voisinages de  $a$  exhibée dans la partie 1.1. On note  $a = \sum_{n \geq 0} a_n p^n$  et  $x = \sum_{n \geq 0} b_n p^n$  où  $a_n \geq 0$ ,  $b_n < p$ . Alors  $x \in V_k(a)$  si et seulement si  $\forall n < k$ ,  $a_n = b_n$  si et seulement si  $p^k \mid (a-x)$  si et seulement si  $v_p(a-x) \geq k$  si et seulement si dans  $\mathcal{Z}_p$ ,  $|a-x|_p \leq p^{-k}$  si et seulement si dans  $\mathcal{Z}_p$ ,  $x \in W_k(a)$ . On a donc une bijection entre une base de voisinages de  $a$  dans  $\mathbb{Z}_p$  et une base de voisinages de  $a$  dans  $\mathcal{Z}_p$ , les deux topologies sont donc bien les mêmes.

On a donc  $\mathbb{Z}_p = \mathcal{Z}_p$ , alors  $\mathbb{Q}_p$  est le corps des fractions de  $\mathbb{Z}_p$  : c'est le corps des nombres  $p$ -adiques. Les propriétés de  $\mathbb{Z}_p$  nous permettent de déduire les propriétés suivantes de  $\mathbb{Q}_p$ , qu'on utilisera constamment par la suite.

**Proposition 1.5**

- *Tout élément non nul  $x \in \mathbb{Q}_p$  s'écrit de façon unique  $x = p^n u$  où  $n \in \mathbb{Z}$  et  $u$  est une unité de  $\mathbb{Z}_p$ .*
- *Tout élément  $x \in \mathbb{Q}_p$  admet un unique développement de Hensel  $x = \sum_{n \geq n_0} a_n p^n$  où  $0 \leq a_n < p$ ,  $n_0 \in \mathbb{Z}$  et  $a_{n_0} \neq 0$ . On a alors  $n_0 = v(x)$ .*

## 2 Représentations lisses des groupes profinis

Maintenant qu'on s'est familiarisé un peu avec les nombres  $p$ -adiques, il nous sera utile avant d'attaquer les représentations d'avoir quelques connaissances en termes de topologie des groupes profinis.

### 2.1 Notions topologiques sur les groupes profinis

Soit  $(I, \leq)$  un ensemble ordonné. On dit qu'il est *filtrant* si pour tous  $i, j$  de  $I$ , il existe un élément  $k \in I$  plus grand que chacun d'eux.

Soit  $(G_i)_{i \in I}$  une famille de groupes munie de projections  $f_i^j : G_j \rightarrow G_i$  ( $i \leq j$ ) telle que :

- $\forall i \in I, f_i^i = \mathbb{1}_{G_i}$  ;
- $\forall i \leq j \leq k, f_i^j \circ f_j^k = f_i^k$ .

Lorsque ces conditions sont satisfaites, on parle de *système projectif* et on définit alors la *limite projective* comme  $\{(g_i) \in \prod_{i \in I} G_i \mid \forall i \leq j, f_i^j(g_j) = g_i\}$  et on la note  $\varprojlim G_i$ . Cette structure est alors munie de projections naturelles  $\bar{f}_j : \varprojlim G_i \rightarrow G_j$ .

La propriété suivante nous montre que la construction est naturelle.

**Proposition 2.1** *La limite projective  $\varprojlim G_i$  satisfait la propriété universelle suivante.*

*Soit  $(\phi_i)_i$  une famille de morphismes de groupes  $\phi_i : H \rightarrow G_i$  telle que  $\phi_j = f_j^k \circ \phi_k$  pour  $j \leq k$ . Il existe un morphisme  $H \rightarrow \varprojlim G_i$  tel que le diagramme*

$$\begin{array}{ccc}
 & H & \\
 \phi_j \swarrow & \downarrow & \searrow \phi_k \\
 & \varprojlim G_i & \\
 \bar{f}_j \swarrow & & \searrow \bar{f}_k \\
 G_j & \xleftarrow{f_j^k} & G_k
 \end{array}$$

*soit commutatif.*

*Preuve :* On définit 
$$\begin{array}{ccc}
 H & \rightarrow & \prod G_i \\
 h & \mapsto & (\phi_i(h))_{i \in I}
 \end{array}$$
. La commutativité du diagramme inférieur nous assure que cette application est bien à valeurs dans  $\varprojlim G_i$ .  $\square$

La limite projective d'une famille de groupes finis est appelée *groupe profini* ; pour des  $p$ -groupes, on parle de *pro- $p$ -groupe*.

On munit ces groupes de la topologie produit induite : ainsi un ouvert fondamental de  $\varprojlim G_i$  est de la forme  $\{(g_k) \in (\prod_{i \in I \setminus J} G_i) \times (\prod_{j \in J} \Gamma_j) \mid \forall k \leq$

$l, f_k^l(g_l) = g_k\}$  où  $J$  est fini et les  $\Gamma_j$  pour  $j \in J$  sont des sous-ensembles de  $G_j$ .

**Lemme 2.2** *Le quotient d'un groupe profini  $G$  par un sous-groupe ouvert  $N$  est fini.*

*Preuve :* La projection canonique  $G \rightarrow G/N$  est continue par définition de la topologie quotient sur  $G/N$ . Puisque  $N$  est ouvert, les points de  $G/N$  le sont aussi et la topologie est donc séparée et discrète sur  $G/N$ . Aussi,  $G$  est compact en tant que produit de tels espaces (théorème de Tychonoff), et  $G/N$  l'est donc aussi en tant qu'image continue d'un compact dans un espace séparé. Mais un compact discret est fini.  $\square$

Introduisons la notion de *nombre supernaturel* : c'est en fait un élément de  $(\mathbb{N} \cup \{\infty\})^{\mathcal{P}}$  que l'on note alors  $\prod_{p \in \mathcal{P}} p^{n_p}$ . Lorsque  $G$  est un groupe profini et que  $H$  en est un sous-groupe fermé, on peut définir l'indice  $(G : H)$  de  $G$  par rapport à  $H$  comme  $\text{ppcm}\{(G : V) \mid V \triangleleft G \text{ ouvert contenant } H\}$ . On peut alors montrer, comme en cas fini, des propriétés de multiplicativité des indices ou des théorèmes de Sylow ; en particulier, on notera que l'existence d'un pro- $p$ -Iwahori dans  $\text{GL}_2$  nous est dictée par les théorèmes de Sylow.

## 2.2 Des représentations lisses en caractéristique $p$

Soit  $K$  un corps algébriquement clos. Une *représentation*  $\rho$  d'un groupe  $G$  est un morphisme de groupes de  $G$  dans  $\text{GL}(V)$  où  $V$  est un espace vectoriel ; on peut aussi voir  $\rho$  comme une action de  $G$  sur  $V$ . Par abus de langage, on appellera aussi représentation l'espace de représentation  $V$ . On parle de *caractère* lorsque l'espace  $V$  est de dimension 1.

Une représentation  $V$  de  $G$  est dite *lisse* lorsque les stabilisateurs des points sont ouverts : pour tout  $v \in V$ , le stabilisateur de  $v$  dans  $G$ , noté  $\text{Stab}_G(v)$ , est un sous-groupe ouvert de  $G$ . On notera que cette condition assure l'existence d'un ouvert autour de l'élément neutre de  $G$  stabilisant  $v$  et donc que le morphisme  $G \rightarrow \text{GL}(V)$  soit localement constant.

Par analogie au cas des représentations en caractéristique nulle, on s'intéresse aux représentations *irréductibles*, c'est-à-dire aux représentations  $V$  pour lesquels les seuls sous-espaces stables par  $G$  sont  $\{0\}$  et  $V$ . On commence par énoncer quelques résultats classiques.

**Lemme 2.3** *Toute représentation irréductible  $\rho$  d'un groupe abélien fini  $G$  sur un corps algébriquement clos est un caractère.*

*Preuve :* Si  $g_1, \dots, g_r$  sont les éléments de  $G$ , les  $\rho(g_i)$  commutent. Et donc si  $E_i$  est un espace propre de  $g_i$  ( $E_i$  existe car on est sur un corps algébriquement clos),  $E_i$  est stabilisé par tous les  $g_j$  :  $E_i$  est alors tout l'espace et  $\rho(g_i)$  est une homothétie. Le résultat suit.  $\square$

**Lemme 2.4** *Toute représentation de degré fini en caractéristique  $p$  d'un  $p$ -groupe  $G$  possède un vecteur stable non trivial.*

*Preuve :* On considère un vecteur non nul  $v$  et  $X$  le  $p$ -groupe engendré par  $\{g.v \mid g \in G\}$  sur lequel  $G$  opère par translation à gauche. L'équation aux classes donne alors  $X = \coprod_{y \in G \backslash X} \text{Orb}(y)$  et  $\text{Card}(X) = \sum_{y \in G \backslash X} \frac{\text{Card}(X)}{\text{Card}(\text{Stab } y)}$ .

Toute orbite non triviale est donc de cardinal divisible par  $p$  et  $\text{Card}(X^G) \equiv \text{Card}(X) \equiv 0 \pmod{p}$ . De plus,  $0$  est un point fixe trivial et il en existe alors un deuxième, non trivial cette fois-ci.  $\square$

Le résultat suivant est fondamental pour la suite.

**Théorème 2.5** *Toute représentation lisse  $\rho$  en caractéristique  $p$  d'un  $p$ -groupe  $G$  possède un vecteur stable non trivial.*

*Preuve :* On considère un vecteur non nul  $v$  et  $\tilde{\rho}$  le  $\overline{\mathbb{F}}_p$ -espace vectoriel engendré par  $\{\rho(g)v \mid g \in G\}$ . Comme la représentation considérée est lisse,  $\text{Stab}_G(v)$  est d'indice fini dans  $G$  par le lemme 2.2. La sous-représentation  $\tilde{\rho}$  est donc de dimension finie, disons de base  $v_1, \dots, v_d$ .

On a alors  $\text{Ker } \tilde{\rho} = \bigcap_{i=1}^d \text{Stab}_G(v_i)$  normal ouvert (en tant qu'intersection finie d'ouverts) et  $G/(\text{Ker } \tilde{\rho})$  est un  $p$ -groupe auquel on peut appliquer le lemme précédent.  $\square$



### 3 Représentations lisses de $\mathbb{Q}_p^\times$ en caractéristique $p$

Le but de cette partie est d'étudier les morphismes continus de  $\mathbb{Q}_p^\times$  dans  $\overline{\mathbb{F}}_p^\times$ . Il semble donc impensable de ne pas commencer par regarder de plus près la structure de  $\mathbb{Q}_p^\times$ .

#### 3.1 Structure de $\mathbb{Q}_p^\times$

On note  $\mathcal{U} = \mathbb{Z}_p^\times$  et  $\mathcal{U}_n = 1 + p^n\mathbb{Z}_p$  (pour  $n \geq 1$ ). Il est clair que  $\mathcal{U}_n$  est le noyau de l'homomorphisme  $\epsilon_n : \mathcal{U} \rightarrow (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times$ . En particulier, le quotient  $\mathcal{U}/\mathcal{U}_1$  s'identifie à  $\mathbb{F}_p^\times$  donc est d'ordre  $p-1$ . Les  $\mathcal{U}_n$  forment une suite décroissante de sous-groupes de  $\mathcal{U}$ , et l'on a  $\mathcal{U} = \varprojlim \mathcal{U}/\mathcal{U}_n$  (car  $\mathbb{Z}_p = \varprojlim \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$  donc  $\mathbb{Z}_p^\times = \varprojlim (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times$  et  $\mathcal{U} = \mathbb{Z}_p^\times$ ,  $\mathcal{U}/\mathcal{U}_n \simeq (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times$ ). Si  $n \geq 1$ , l'application  $(1+p^n x) \mapsto x \pmod p$  définit un isomorphisme  $\mathcal{U}_n/\mathcal{U}_{n+1} \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  car  $(1+p^n x)(1+p^n y) \equiv 1 + p^n(x+y) \pmod{p^{n+1}}$ . On en déduit, par récurrence sur  $n$  que  $\mathcal{U}_1/\mathcal{U}_n$  est d'ordre  $p^{n-1}$ .

**Lemme 3.1** *Soit  $0 \rightarrow A \rightarrow E \rightarrow B \rightarrow 0$  une suite exacte de groupes commutatifs (notés additivement), avec  $A$  et  $B$  finis d'ordres  $a$  et  $b$  premiers entre eux. Soit  $B'$  l'ensemble des  $x \in E$  tels que  $bx = 0$ . Le groupe  $E$  est somme directe de  $A$  et de  $B'$ , de plus  $B'$  est le seul sous-groupe de  $E$  isomorphe à  $B$ .*

*Preuve :* Puisque  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux, il existe  $r, s \in \mathbb{Z}$  tels que  $ar + bs = 1$ . Si  $x \in A \cap B'$ , on a  $ax = bx = 0$ , d'où  $(ar + bs)x = x = 0$ , ainsi  $A \cap B' = 0$ . De plus, tout  $x \in E$  peut s'écrire  $x = arx + bsx$ ; comme  $bB = 0$ , on a  $bE \subset A$ , d'où  $bsx \in A$ ; d'autre part, on a  $abE = 0$  (car  $bE \subset A$ ), d'où  $arx \in B$ . On a donc bien  $E = A \oplus B'$ , et la projection  $E \rightarrow B$  définit un isomorphisme de  $B'$  sur  $B$ . Inversement si  $B''$  est un sous-groupe de  $E$  isomorphe à  $B$ , on a  $bB'' = 0$ , d'où  $B'' \subset B'$  et  $B'' = B'$  puisque ces groupes ont le même ordre.  $\square$

**Proposition 3.2** *Soit  $\mathcal{V} = \{x \in \mathcal{U} \mid x^{p-1} = 1\}$ , c'est le seul sous-groupe de  $\mathcal{U}$  isomorphe à  $\mathbb{F}_p^\times$ . On a alors  $\mathcal{U} = \mathcal{V} \times \mathcal{U}_1$ .*

*Preuve :* On applique le lemme aux suites exactes :  $1 \rightarrow \mathcal{U}_1/\mathcal{U}_n \rightarrow \mathcal{U}/\mathcal{U}_n \rightarrow \mathbb{F}_p^\times \rightarrow 1$  ce qui est licite puisque l'ordre de  $\mathcal{U}_1/\mathcal{U}_n$  est  $p^{n-1}$ , et celui de  $\mathbb{F}_p^\times$  est  $p-1$ . On en conclut que  $\mathcal{U}/\mathcal{U}_n$  contient un unique sous-groupe  $\mathcal{V}_n$  isomorphe à  $\mathbb{F}_p^\times$ , et la projection  $\mathcal{U}/\mathcal{U}_n \rightarrow \mathcal{U}/\mathcal{U}_{n-1}$  applique  $\mathcal{V}_n$  isomorphiquement sur  $\mathcal{V}_{n-1}$ . Comme  $\mathcal{U} = \varprojlim \mathcal{U}/\mathcal{U}_n$  on en déduit par passage à la limite projective un sous-groupe  $\mathcal{V}$  de  $\mathcal{U}$  isomorphe à  $\mathbb{F}_p^\times$ . On a  $\mathcal{U} = \mathcal{V} \times \mathcal{U}_1$  et l'unicité de  $\mathcal{V}$  résulte de celle des  $\mathcal{V}_n$ .  $\square$

**Corollaire 3.3** *Le corps  $\mathbb{Q}_p$  contient  $(p-1)$  racines  $(p-1)$ -ièmes de l'unité.*

**Lemme 3.4** Soit  $x \in \mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{n+1}$  où  $\begin{cases} n \geq 1 & \text{si } p \neq 2 \\ n \geq 2 & \text{si } p = 2 \end{cases}$ .

Alors  $x^p \in \mathcal{U}_{n+1} \setminus \mathcal{U}_{n+2}$ .

*Preuve* : En effet l'hypothèse signifie que  $x = 1 + kp^{n+1}$  avec  $k \not\equiv 0 \pmod{p}$ . D'après la formule du binôme, on a  $x^p = 1 + kp^{n+1} + \dots + k^p p^{np}$  et les exposants dans les termes non écrits sont  $\geq 2n + 1$  donc aussi  $\geq n + 2$ . D'autre part on a  $np \geq n + 2$  (grâce au fait que  $n \geq 2$  si  $p = 2$ ). On en conclut que  $x^p \equiv 1 + kp^{n+1} \pmod{p^{n+2}}$  d'où  $x^p \in \mathcal{U}_{n+1} \setminus \mathcal{U}_{n+2}$ .  $\square$

**Proposition 3.5** Si  $p \neq 2$ ,  $\mathcal{U}_1$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}_p$ . Si  $p = 2$ ,  $\mathcal{U}_1 \simeq \{\pm 1\} \times \mathcal{U}_2$  et  $\mathcal{U}_2$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}_p$ .

*Preuve* : Dans le cas  $p \neq 2$  on choisit  $\alpha = 1 + p \in \mathcal{U}_1 \setminus \mathcal{U}_2$ . D'après le lemme on a  $\alpha^{p^i} \in \mathcal{U}_{i+1} \setminus \mathcal{U}_{i+2}$ . Soit  $\alpha_n$  l'image de  $\alpha$  dans  $\mathcal{U}_1/\mathcal{U}_n$ , on a donc  $(\alpha_n)^{p^{n-2}} \neq 1$  et  $(\alpha_n)^{p^{n-1}} = 1$ . Mais  $\mathcal{U}_1/\mathcal{U}_n$  est d'ordre  $p^{n-1}$ , on en conclut que c'est un groupe cyclique engendré par  $\alpha_n$ . Notons alors  $\theta_{n,\alpha}$  l'isomorphisme  $z \mapsto \alpha_n^z$  de  $\mathbb{Z}/p^{n-1}\mathbb{Z}$  sur  $\mathcal{U}_1/\mathcal{U}_n$ . Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} & \xrightarrow{\theta_{n-1,\alpha}} & \mathcal{U}_1/\mathcal{U}_{n+1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{Z}/p^{n-1}\mathbb{Z} & \xrightarrow{\theta_{n,\alpha}} & \mathcal{U}_1/\mathcal{U}_n \end{array}$$

est commutatif. On en conclut que les  $\theta_{n,\alpha}$  définissent un isomorphisme  $\theta_\alpha$  de  $\mathbb{Z}_p = \varprojlim \mathbb{Z}/p^{n-1}\mathbb{Z}$  sur  $\mathcal{U}_1 = \varprojlim \mathcal{U}_1/\mathcal{U}_n$  d'où le résultat pour  $p \neq 2$ . Si  $p = 2$ , on choisit  $\alpha \in \mathcal{U}_2 \setminus \mathcal{U}_3$ , autrement dit  $\alpha \equiv 5 \pmod{8}$ . On définit comme ci-dessus des isomorphismes  $\theta_{n\alpha} : \mathbb{Z}/2^{n-2}\mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{U}_2/\mathcal{U}_n$ , d'où un isomorphisme  $\theta_\alpha : \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathcal{U}_2$ . De plus l'homomorphisme  $\mathcal{U}_1 \rightarrow \mathcal{U}_1/\mathcal{U}_2 \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  induit un isomorphisme de  $\{\pm 1\}$  sur  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . On en déduit que  $\mathcal{U}_1 = \{\pm 1\} \times \mathcal{U}_2$ .  $\square$

**Théorème 3.6** Le groupe  $\mathbb{Q}_p^\times$  est isomorphe à

$$\begin{cases} \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z} & \text{si } p \neq 2 \\ \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{si } p = 2 \end{cases}$$

*Preuve* : Tout élément  $x \in \mathbb{Q}_p^\times$  s'écrit de façon unique sous la forme  $x = p^n u$  avec  $n \in \mathbb{Z}$  et  $u \in \mathcal{U}$ . On a donc  $\mathbb{Q}_p^\times \simeq \mathbb{Z} \times \mathcal{U}$ . D'autre part, d'après la proposition 3.2,  $\mathcal{U} = \mathcal{V} \times \mathcal{U}_1$  où  $\mathcal{V}$  est cyclique d'ordre  $p-1$ . Enfin la structure de  $\mathcal{U}_1$  est donnée par la proposition précédente.  $\square$

Fort de cette description, on va pouvoir enfin atteindre le but annoncé en début de partie.

### 3.2 Représentations lisses de $\mathbb{Q}_p^\times$ en caractéristique $p$

On commence par s'intéresser à l'action du pro- $p$ -groupe de  $\mathbb{Q}_p^\times$ .

**Théorème 3.7** *Tout caractère lisse de  $1 + p\mathbb{Z}_p$  en caractéristique  $p$  est trivial.*

Remarque : C'est en fait un corollaire du théorème 2.5 mais on peut aussi en donner une preuve moins coûteuse comme suit.

Preuve : Soient  $E$  un corps de caractéristique  $p$  et  $\chi$  un caractère lisse de  $1 + p\mathbb{Z}_p$ . Soient  $v \in E$  et  $g \in 1 + p\mathbb{Z}_p$ . On a  $(\chi(g)v)^{p^k} = \chi(g)v$  pour tout  $k \geq 1$ , mais aussi  $(\chi(g)v)^{p^k} = \chi(g)^{p^k} v^{p^k} = \chi(g^{p^k})v$ . Aussi,  $\text{Stab}_{1+p\mathbb{Z}_p}(v)$  est ouvert, donc il existe  $\alpha \geq 0$  tel que  $\text{Card}((1 + p\mathbb{Z}_p)/(\text{Stab } v)) = p^\alpha$  (par le lemme 2.2). Si  $\alpha = 0$ , c'est que  $1 + p\mathbb{Z}_p$  agit trivialement sur  $v$ . Sinon, c'est qu'il existe un élément  $g_0$  de  $1 + p\mathbb{Z}_p$  ne stabilisant pas  $v$ ; mais  $v = \chi((g_0)^{p^\alpha})v = \chi(g_0)v$ , ce qui contredit l'existence d'un tel  $g_0$ .  $\square$

Notons que ceci clôt complètement la description des représentations lisses irréductibles de  $\mathbb{Q}_p^\times$  sur  $\overline{\mathbb{F}}_p$  telles que  $p$  agisse par homothétie.

Soient  $(\rho, V)$  une telle représentation et  $v$  un vecteur non nul de  $V$ . On considère  $\tilde{V}$  la sous-représentation engendrée par  $v$ , c'est-à-dire que  $\tilde{V}$  est le  $\overline{\mathbb{F}}_p$ -espace vectoriel engendré par  $\{\rho(g)v \mid g \in G\}$ . L'irréductibilité de  $V$  nous assure que  $V = \tilde{V}$ . Elle est de dimension finie puisque  $\text{Stab}_{\mathbb{Q}_p^\times}(\text{Vect } v) \simeq p^\mathbb{Z} \times \text{Stab}_{\mathbb{Z}_p^\times}(\text{Vect } v)$  (puisque l'on a supposé que  $p$  agissait par multiplication par un scalaire) et que  $\text{Stab}_{\mathbb{Z}_p^\times}(\text{Vect } v)$  contient  $\text{Stab}_{\mathbb{Z}_p^\times}(v)$ , qui est d'indice fini dans  $\mathbb{Z}_p^\times$ . Ainsi  $\text{Stab}_{\mathbb{Q}_p^\times}(\text{Vect } v)$  est d'indice fini dans  $\mathbb{Q}_p^\times$  et  $\mathbb{Q}_p^\times/(\text{Stab}_{\mathbb{Q}_p^\times}(\text{Vect } v))$  est un groupe abélien fini dont toute représentation irréductible est un caractère (par le lemme 2.3).

On est donc ramené à regarder d'une part l'action de  $p$  par homothétie, d'autre part le caractère porté par  $\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$  si  $p > 2$  et  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  si  $p = 2$  (puisque  $1 + p\mathbb{Z}_p$  apporte une action triviale par le théorème précédent). Déjà, l'action de  $p$  est aussi un scalaire, dont on n'a donc plus à se soucier non plus.

– Cas  $p = 2$  :

Ensuite, on veut ici énumérer les caractères de  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  sur  $\overline{\mathbb{F}}_2$  valant 1 sur 2. Soit  $\chi$  un tel caractère. La valeur de  $\chi(1)$  détermine  $\chi$ ; mais l'ordre de celle-ci doit être de la forme  $2^k - 1$ . Or si  $\chi(1)$  n'était pas trivial, il serait d'ordre 2, qui est premier à  $2^k - 1$ , ce qui est absurde. Donc  $\chi$  est trivial.

– Cas  $p \neq 2$  :

On cherche les caractères de  $\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$  sur  $\overline{\mathbb{F}}_p$  valant 1 sur  $p$ . Soit  $\chi$  un tel caractère. Il est déterminé par  $\chi(1)$ , lequel doit être d'ordre  $p-1$  ou 1 (si trivial). Et ceci est possible en prenant  $\chi(1) \in \mathbb{F}_p^\times \subseteq \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ .

On résume la situation à travers la proposition suivante :

**Proposition 3.8** *Soit  $\rho$  une représentation lisse irréductible de  $\mathbb{Q}_p^\times$  sur  $\overline{\mathbb{F}}_p$  telle que  $p$  agisse par homothétie. Alors  $\rho$  est un caractère ; de plus :*

- *si  $p = 2$ , alors  $\rho$  est uniquement déterminé par  $\rho(p) \in \overline{\mathbb{F}}_p^\times$  et est triviale sur  $\mathbb{Z}_p \setminus p\mathbb{Z}_p$ .*
- *si  $p \neq 2$ , alors si  $\varepsilon$  est une racine  $(p-1)^e$  de l'unité non triviale dans  $\mathbb{Q}_p$ ,  $\rho$  est uniquement déterminé par  $\rho(\varepsilon) \in \mathbb{F}_p^\times \hookrightarrow \overline{\mathbb{F}}_p^\times$  et par  $\rho(p) \in \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ .*

**Remarque :** Cette classification n'est plus vraie lorsque l'on ne demande pas à ce que  $p$  agisse par homothétie. Déjà,  $\rho$  n'est alors plus nécessairement un caractère : par exemple, si  $p > 2$  agit par  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  sur  $(\overline{\mathbb{F}}_p)^2$  et que l'action de  $1+p\mathbb{Z}_p$  vérifie que l'action de  $1+p$  soit donnée par  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , un vecteur stable par  $\mathbb{Q}_p^\times$  serait de la forme  $\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$  avec  $\lambda \neq 0$  et  $\mu \neq 0$  (car les vecteurs de base ne sont pas stabilisés par l'action de  $p$ ). On peut donc choisir  $\lambda = 1$  et l'image de  $v = \begin{pmatrix} 1 \\ \mu \end{pmatrix}$  par  $\rho(p)$  est alors  $\begin{pmatrix} \mu \\ 1 + \mu \end{pmatrix}$ , qui n'est colinéaire à  $v$  que lorsque  $1 + \mu - \mu^2 = 0$ . Maintenant, l'image de  $v$  par  $\rho(1+p)$  est  $\begin{pmatrix} 1 + \mu \\ \mu \end{pmatrix}$ , qui n'est colinéaire à  $v$  que lorsque  $1 + \mu - \mu^2 = 0$ . Mais alors,  $\mu = 0$ , ce qu'on a déjà vu comme étant absurde. Donc on a exhibé une représentation irréductible de dimension 2.

## 4 Arbre de $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q}_p)$

Afin d'espérer obtenir des résultats pour des représentations de  $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$  cette fois-ci, nous avons besoin de quelques outils supplémentaires. Commençons par construire l'arbre de  $\mathrm{PGL}_2$  dans le cas d'un corps local quelconque.

### 4.1 Généralités sur les corps locaux

On désignera par  $K$  un corps local, à savoir un corps complet vis-à-vis d'une valuation discrète  $v$ . Une valuation discrète  $v$  est un homomorphisme de  $K^\times$  sur  $\mathbb{Z}$  (donc  $v(1) = 0$ ), et on a  $v(x + y) \geq \inf(v(x), v(y))$  pour  $x, y \in K$ , en convenant  $v(0) = +\infty$ . L'image de  $v$  est un sous-groupe de  $\mathbb{Z}$ , donc quitte à post-composer par un morphisme de groupes de  $\mathbb{Z}$  dans lui-même, on peut considérer la valuation surjective, ce qu'on fera. On notera  $\mathcal{O}$  son anneau d'entiers, soit l'ensemble des  $x \in K$  tels que  $v(x) \geq 0$ . On choisit  $\pi$  une uniformisante, c'est-à-dire un élément de  $K$  tel que  $v(\pi) = 1$  et on note  $k = \mathcal{O}/\pi\mathcal{O}$  le corps résiduel ( $\pi\mathcal{O}$  étant l'idéal maximal de  $\mathcal{O}$ ).

On rappelle quelques propriétés essentielles sur les anneaux locaux :

#### Proposition 4.1

- Un élément  $x \in \mathcal{O}$  est inversible dans  $\mathcal{O}$  si et seulement si  $v(x) = 0$ .
- Tout élément  $x \in K^\times$  s'écrit de façon unique  $x = \pi^n u$  où  $n \in \mathbb{Z}$  et  $u$  est inversible dans  $\mathcal{O}$ . On a alors  $n = v(x)$ .
- Dans  $\mathcal{O}$ ,  $x$  divise  $y$  si et seulement si  $v(x) \leq v(y)$ . En particulier l'anneau  $\mathcal{O}$  est euclidien.

Preuve :

- Soit  $x \in \mathcal{O}$ , alors  $x$  est inversible dans le corps  $K$  et  $v(x) + v(x^{-1}) = v(1) = 0$  donc  $x^{-1} \in \mathcal{O}$  si et seulement si  $v(x) = 0$ .
- Existence de l'écriture : Soit  $x \in K^\times$ . L'élément  $u = x\pi^{-v(x)}$  est de valuation nulle donc il est inversible dans  $\mathcal{O}$  et  $x = \pi^{v(x)}u$ .  
 Unicité : Si  $\pi^n u = \pi^m v$  où  $n, m \in \mathbb{Z}$  et  $u$  et  $v$  sont inversibles dans  $\mathcal{O}$ , alors  $n = v(\pi^n u) = v(\pi^m v) = m$  et donc  $u = v$ .
- Si  $x$  divise  $y$  dans  $\mathcal{O}$ , il existe  $a \in \mathcal{O}$  tel que  $y = ax$  donc  $v(y) = v(a) + v(x) \geq v(x)$ . Réciproquement, si  $v(x) \leq v(y)$  alors il existe  $n \geq 0$  tel que  $v(x) + n = v(y)$ , et il existe  $u$  et  $v$  inversibles dans  $\mathcal{O}$  tels que  $x = \pi^{v(x)}u$  et  $y = \pi^{v(y)}v$ . Donc  $y = \pi^n \pi^{v(x)} u u^{-1} v = ax$  où  $a = \pi^n u^{-1} v \in \mathcal{O}$  et alors  $x$  divise  $y$  dans  $\mathcal{O}$ .  
 Soient  $x$  et  $y$  non nuls dans  $\mathcal{O}$ . Si  $v(x) \leq v(y)$  alors  $x$  divise  $y$  : il existe  $a \in \mathcal{O}$  tel que  $y = ax + 0$ ; autrement si  $v(x) > v(y)$  alors on écrit  $y = 0x + y$ . □

### 4.2 Arbre de $\mathrm{SL}_2$ sur un corps local

Soit  $V$  un espace vectoriel de dimension 2 sur  $K$ .

On appelle *réseau* de  $V$  tout sous- $\mathcal{O}$ -module qui est de type fini et engendre

le  $K$ -espace vectoriel  $V$ . Un tel module  $L$  est libre de rang 2 et une base du module  $L$  est une base du  $K$ -espace vectoriel  $V$ .

Si  $L$  est un réseau de  $\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}$  et  $x \in K^\times$ , alors  $Lx$  est encore un réseau de  $V$ . Ceci nous permet de considérer l'action de  $K^\times$  sur l'ensemble des réseaux et la classe  $\Lambda(L)$  d'un réseau  $L$  comme étant son orbite sous cette action ; on note  $X$  l'ensemble de ces classes. De manière plus synthétique, on ne fait que considérer les classes de réseaux à homothétie près.

**Lemme 4.2** *Soient  $L_1$  et  $L_2$  deux réseaux de  $\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}$ , il existe  $a, b \in \mathbb{Z}$  et une base  $(e_1, e_2)$  de  $L_1$  tels que  $(e_1\pi^a, e_2\pi^b)$  soit une base de  $L_2$ . De plus, l'entier  $|a - b|$  ne dépend que des classes de  $L_1$  et  $L_2$ .*

*Preuve :* Soit  $\{e_1, e_2\}$  une base de  $L_1$  (en tant que module) et  $\{f_1, f_2\}$  une base de  $L_2$ . Comme  $\{e_1, e_2\}$  est une base du  $K$ -espace vectoriel  $V$ , il existe des éléments  $x, y, z, t \in K$  tels que  $f_1 = xe_1 + ye_2$  et  $f_2 = ze_1 + te_2$ . Soit  $m = \min\{v(x), v(y), v(z), v(t)\}$  alors  $\pi^{-m}f_1$  et  $\pi^{-m}f_2$  sont des éléments de  $L_1$ . On pose  $L_3 = \pi^{-m}L_2$ , alors  $L_3$  est un sous- $\mathcal{O}$ -module de  $L_1$  dont  $\{\pi^{-m}f_1, \pi^{-m}f_2\}$  est une base. Comme  $\mathcal{O}$  est euclidien donc principal, d'après le théorème de la base adaptée et sachant que  $L_3$  est de rang 2, il existe une base  $\{a_1, a_2\}$  de  $L_1$  et des éléments non nuls  $d_1, d_2 \in \mathcal{O}$  tels que  $\{d_1a_1, d_2a_2\}$  soit une base de  $L_3$ . On écrit  $d_1 = \pi^n u$  et  $d_2 = \pi^k v$  où  $n, k \in \mathbb{Z}$  et  $u$  et  $v$  sont inversibles dans  $\mathcal{O}$ , alors  $\{\pi^n a_1, \pi^k a_2\}$  est une base de  $L_3 = \pi^{-m}L_2$  donc  $\{\pi^{m+n}a_1, \pi^{m+k}a_2\}$  est une base de  $L_2$  d'où l'existence des bases recherchées. De plus, soient  $a, b \in \mathbb{Z}$  et une base  $\{e_1, e_2\}$  de  $L_1$  tels que  $\{e_1\pi^a, e_2\pi^b\}$  soit une base de  $L_2$ , et soient  $x, y \in K^\times$  qui s'écrivent  $x = \pi^n u$  et  $y = \pi^m v$ . Alors  $\{e_1\pi^n, e_2\pi^m\}$  est une base de  $L_1x$  et  $\{e_1\pi^a\pi^m, e_2\pi^b\pi^m\}$  est une base de  $L_2y$ . Donc en posant  $f_1 = e_1\pi^n$  et  $f_2 = e_2\pi^m$ ,  $\{f_1, f_2\}$  est une base de  $L_1x$  et  $\{f_1\pi^{a+m-n}, f_2\pi^{b+m-n}\}$  est une base de  $L_2y$ . Remplacer  $L_1$  par  $L_1x$  et  $L_2$  par  $L_2y$  où  $x, y \in K^\times$  a pour effet de remplacer  $a$  et  $b$  par  $a + v(y) - v(x)$  et  $b + v(y) - v(x)$ , donc l'entier  $|a - b|$  ne dépend que des classes de  $L_1$  et  $L_2$ .  $\square$

On définit ainsi la distance  $d$  entre deux classes de réseaux  $\Lambda_1$  et  $\Lambda_2$  : si  $L_1$  et  $L_2$  sont des représentants de ces classes,  $d(\Lambda_1, \Lambda_2) = |a - b|$  où  $a$  et  $b$  sont les entiers définis dans le lemme. On voit déjà que  $d$  est symétrique, et on montrera par la suite qu'elle vérifie bien les autres axiomes de la distance.

**Proposition 4.3** *Soient  $L$  un réseau de  $\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}$  et  $\Lambda \in X$ . Alors il existe un unique représentant  $M \in \Lambda$  vérifiant les assertions équivalentes suivantes :*

- $M \subseteq L$  maximal dans  $\Lambda$
- $M \subseteq L$  et  $M \not\subseteq \pi L$
- $M \subseteq L$  et  $L/M$  monogène.

*Dans ce cas-là,  $L/M \simeq \mathcal{O}/\pi^n \mathcal{O}$  où  $n = d(\Lambda(L), \Lambda)$ .*

*Preuve :* Ces assertions équivalent chacune à ce que les entiers  $a$  et  $b$  définis dans le lemme avec  $L_1 = L$  et  $L_2 = M$  soient l'un nul et l'autre positif, elles

sont donc bien équivalentes entre elles. Reste à montrer l'existence de  $M$  une fois  $L$  et  $\Lambda$  fixés. On commence par prendre  $M'$  un représentant quelconque de  $\Lambda$ . Alors il existe  $a, b \in \mathbb{Z}$  et une base  $\{e_1, e_2\}$  de  $L$  tels que  $\{e_1\pi^a, e_2\pi^b\}$  soit une base de  $M'$ . Soit  $m = \min\{a, b\}$ . On suppose quitte à échanger  $e_1$  et  $e_2$  que  $m = a$  et on pose  $M = \pi^{-m}M'$ . Le réseau  $M$  est bien un représentant de  $\Lambda$  et  $\{e_1, e_2\pi^{b-a}\}$  est une base de  $M$ . Les deux entiers  $a$  et  $b$  définis dans le lemme avec  $L_1 = L$  et  $L_2 = M$  sont donc l'un nul et l'autre positif, d'où le résultat ; et on a  $L/M \simeq \mathcal{O}/\pi^{b-a}\mathcal{O}$  où par définition de  $d$  et de  $a$  et  $b$ ,  $b - a = d(\Lambda(L), \Lambda)$ .  $\square$

**Corollaire 4.4** *Soient  $\Lambda$  et  $\Lambda'$  deux classes de réseaux. On a  $d(\Lambda, \Lambda') = 0$  si et seulement si  $\Lambda = \Lambda'$  ; et on a  $d(\Lambda, \Lambda') = 1$  si et seulement s'il existe des représentants  $M \subseteq L$  de  $\Lambda$  et  $\Lambda'$  tels que  $L/M \simeq k$ .*

Rappelons qu'on appelle *graphe (non orienté)* un couple  $(S, A)$  où :

- $S$  est un ensemble dont les éléments sont appelés *sommets* ;
- $A$  est un ensemble de paires (et non des couples) appelées *arêtes*.

On appelle *chemin* de  $a$  à  $b$  une suite finie  $s_0, s_1, \dots, s_r$  ( $r \geq 1$ ) d'éléments de  $S$  telle que pour tout  $1 \leq i \leq r$ ,  $\{s_{i-1}, s_i\} \in A$ . Aussi, un *cycle* est un chemin entre un sommet et lui-même. Un graphe est dit *connexe* lorsqu'il existe toujours un chemin entre deux sommets quelconques. Enfin, un graphe connexe et sans cycle est appelé *arbre*.

On décide de lier deux classes  $\Lambda_1, \Lambda_2 \in X$  lorsqu'ils sont à distance 1. Ceci définit une structure de graphe sur  $X$ , que l'on notera  $\mathcal{X}$ .

On remarquera que les assertions suivantes sont équivalentes :

- deux classes  $\Lambda_1, \Lambda_2 \in X$  sont liées dans  $\mathcal{X}$  ;
- $\Lambda_1$  et  $\Lambda_2$  sont à distance 1 ;
- il existe des représentants  $L_1 \subseteq L_2$  de  $\Lambda_1, \Lambda_2$  tels que  $L_1/L_2 \simeq k$  ;
- il existe des représentants  $L_1, L_2$  de  $\Lambda_1, \Lambda_2$  tels que  $\pi L_2 \subsetneq L_1 \subsetneq L_2$ .

**Théorème 4.5** *Le graphe  $\mathcal{X}$  est un arbre.*

*Preuve* : On a déjà vu que  $\mathcal{X}$  était un graphe. Montrons d'abord qu'il est connexe : soient  $\Lambda$  et  $\Lambda'$  deux classes de réseaux,  $L$  un représentant de  $\Lambda$  et  $M$  un représentant de  $\Lambda'$  comme dans la proposition 4.3. Soit  $n = d(\Lambda, \Lambda')$ , on sait qu'il existe une base  $\{e_1, e_2\}$  de  $L$  telle que  $\{e_1, e_2\pi^n\}$  soit une base de  $M$ . Pour tout  $k = 0, \dots, n$  on pose  $L_k$  le réseau de  $\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}$  ayant pour base  $\{e_1, e_2\pi^k\}$  et  $\Lambda_k$  sa classe d'homothétie. Alors  $d(\Lambda(L_k), \Lambda(L_{k+1})) = 1$  et donc  $\Lambda_0, \Lambda_1, \dots, \Lambda_n$  est un chemin dans  $\mathcal{X}$  reliant  $\Lambda_0 = \Lambda$  à  $\Lambda_n = \Lambda'$ .

Voyons maintenant qu'il est sans cycle : soit  $n \geq 1$  et  $\Lambda_0, \dots, \Lambda_n$  une suite de sommets sans aller-retour (c'est-à-dire  $\Lambda_{i-1} \neq \Lambda_{i+1}$ ). On va montrer par récurrence sur  $n$  que  $d(\Lambda_0, \Lambda_n) = n$ , ou de manière équivalente que  $L_n \not\subseteq \pi L_0$

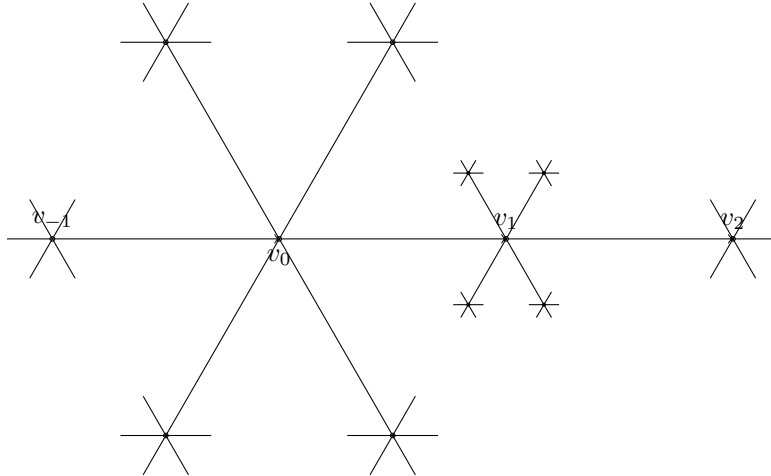
(où les  $L_i$  sont des représentants vérifiant  $L_{i+1} \subseteq L_i$  et  $L_i/L_{i+1} \simeq k$ , lesquels existent en vertu de la remarque précédant le théorème). En effet, si  $L_n \subseteq L_0$  et  $L_n \not\subseteq \pi L_0$  alors, comme  $L_0/L_n \simeq \mathcal{O}/\pi^n \mathcal{O}$ , on a  $d(\Lambda_0, \Lambda_n) = n$  par la proposition 4.3 ; et si  $L_n \subseteq \pi L_0 \subseteq L_0$ , alors  $L_n/(\pi L_0) \simeq \mathcal{O}/\pi^{n-2} \mathcal{O}$  et  $d(\Lambda_0, \Lambda_n) \leq n - 2 < n$ . Par hypothèse de récurrence, on a  $L_{n-1} \not\subseteq \pi L_0$ . On a  $L_n \neq \pi L_{n-2}$ , sinon  $\Lambda_n = \Lambda_{n-2}$ , ce qui contredirait l'hypothèse d'un chemin sans aller-retour. Aussi, en utilisant des bases adaptées on peut écrire les sommes directes de  $\mathcal{O}$ -modules suivantes :  $L_n = \pi L_{n-1} \oplus (L_n/\pi L_{n-1})$  et  $\pi L_{n-2} = \pi L_{n-1} \oplus (\pi L_{n-2})/(\pi L_{n-1})$  ; de telle sorte que  $L_n/\pi L_{n-1}$  et  $(\pi L_{n-2})/(\pi L_{n-1})$  sont des droites distinctes du  $k$ -plan  $L_{n-1}/\pi L_{n-1}$ . On a alors  $L_{n-1} = L_n + \pi L_{n-2} \pmod{\pi L_{n-1}}$  et  $L_n = L_{n-1} \pmod{\pi L_0}$ , d'où on déduit bien  $L_n \not\subseteq \pi L_0$ .  $\square$

**Proposition 4.6** *L'arbre  $\mathcal{X}$  ne dépend que du cardinal du corps résiduel, à isomorphisme près.*

Idée de la preuve : Dans le cas où  $K = \mathbb{Q}_p$ ,  $\mathcal{O} = \mathbb{Z}_p$ ,  $\pi = p$  et  $k = \mathbb{F}_p$ , on cherche le nombre de sommets voisins d'un sommet. Soit une classe  $\Lambda_1 \in X$  et  $L_1$  un représentant. On cherche  $L_2$  tels que  $\pi L_2 \subsetneq L_1 \subsetneq L_2$  donc tels que  $0 \subsetneq L_2/pL_1 \subsetneq L_1/pL_1$  ; or  $L_1/pL_1 \simeq \mathbb{F}_p^2$  donc on cherche un sous-espace vectoriel de dimension 1 de  $\mathbb{F}_p^2$  or il y a  $\frac{p^2-1}{p-1} = p+1$  droites dans  $\mathbb{F}_p^2$  donc chaque sommet du graphe  $\mathcal{X}$  a  $(p+1)$  voisins.  $\square$

On ne peut pas parler sans cesse de l'arbre sans en dessiner un ; ce qui suit est donc une illustration de ce à quoi on peut s'attendre lorsqu'on évoque l'arbre de  $\text{PGL}_2(\mathbb{Q}_5)$ .

(Sur cet arbre, on a noté  $v_n$  le sommet correspondant au réseau  $\mathbb{Z}_p \oplus p^n \mathbb{Z}_p$ .)



Pour  $L_1$  et  $L_2$  deux réseaux de  $V$ , on peut trouver un réseau  $L_3 \subseteq (L_1 \cap L_2)$ . On définit alors  $h(L_1, L_2) = n_{1,3} - n_{2,3}$  où  $L_1/L_3 \simeq \mathcal{O}/\pi^{n_{1,3}} \mathcal{O}$



et  $L_2/L_3 \simeq \mathcal{O}/\pi^{n_2,3}\mathcal{O}$ . On vérifie facilement que la quantité ainsi définie est indépendante du réseau  $L_3$  choisi.

On prendra dorénavant les conventions suivantes : sur  $\mathcal{X}$ , les *arêtes* sont orientées. De plus, on appelle *bout* un chemin infini sans aller-retour et *droit chemin* un chemin sans aller-retour, infini dans les deux sens.

### 4.3 Action de $\mathrm{GL}(V)$ sur $\mathcal{X}$

Les morphismes  $v \circ \det : \mathrm{GL}(V) \rightarrow \mathbb{Z}$  et  $\epsilon \circ v \circ \det : \mathrm{GL}(V) \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  sont surjectifs ; on note respectivement  $\mathrm{GL}(V)^\circ$  et  $\mathrm{GL}(V)^+$  leur noyau. On a les inclusions  $\mathrm{SL}(V) \subseteq \mathrm{GL}(V)^\circ \subseteq \mathrm{GL}(V)^+ \subseteq \mathrm{GL}(V)$ .

On peut donner une interprétation géométrique à ces morphismes, à l'image de la propriété suivante.

**Proposition 4.7** *Soient  $L \in \Lambda \in X$  et  $s \in \mathrm{GL}(V)$ . Alors on a les égalités  $h(L, sL) = v \circ \det(s)$  et  $d(\Lambda, s\Lambda) \equiv v \circ \det(s) \pmod{2}$ .*

*Remarque :*  $\mathrm{GL}(V)^+$  agit alors sans inversion sur  $\mathcal{X}$  alors que  $\mathrm{GL}(V)$  si. En effet,  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \pi & 0 \end{pmatrix}$  a pour effet d'inverser les classes d'homothétie de  $\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}$  et de  $\mathcal{O} \oplus \pi\mathcal{O}$ . Par contre, pour pouvoir inverser comme ceci deux sommets voisins, il faut l'existence d'un  $\Lambda \in X$  et d'un  $s \in \mathrm{GL}(V)^+$  tels que  $d(\Lambda, s\Lambda) = 1$ , ce qui contredirait la deuxième partie de la proposition.

*Preuve :* Soit  $(e_1, e_2)$  une base de  $L$  adaptée à  $sL$ , c'est-à-dire de sorte qu'il existe  $a, b$  tels que  $(e_1\pi^a, e_2\pi^b)$  soit une base de  $sL$ . Le déterminant étant inchangé par changement de base, on peut écrire  $s$  dans la base  $(e_1, e_2)$  et c'est alors un  $\begin{pmatrix} \pi^a & \\ & \pi^b \end{pmatrix} \tilde{s}$  avec  $\tilde{s} \in \mathrm{GL}_2(\mathcal{O})$ . Mais  $v \circ \det(s)$  prend alors clairement la valeur  $a+b$ , ce qui est aussi le cas de  $h(L, sL)$ . Pour la deuxième assertion, il n'y a qu'à remarquer que  $d(\Lambda, s\Lambda) = |a - b| \equiv a + b \pmod{2}$ .  $\square$

Soit  $G$  un sous-groupe de  $\mathrm{GL}(V)$ . Soient  $L$  un réseau de classe d'homothétie  $\Lambda$  et  $\Lambda\Lambda'$  une arête de  $\mathcal{X}$ . On notera  $G_L, G_\Lambda$  et  $G_{\Lambda\Lambda'}$  les stabilisateurs respectifs de ces objets dans  $G$ .

**Lemme 4.8** *Si  $G \subseteq \mathrm{GL}(V)^\circ$ , alors  $G_L = G_\Lambda$ .*

*Remarque :* C'est le cas en particulier pour  $\mathrm{SL}(V)$ .

*Preuve :* On a déjà que  $G_L \subseteq G_\Lambda$ . Pour l'inclusion inverse, soit  $s \in G_\Lambda$ . Alors il existe  $x \in K^\times$  tel que  $sL = Lx$ . De plus  $h(L, Lx) = 2v(x)$  et donc  $v(\det s) = 2v(x)$  par la proposition 4.7. Or  $s \in \mathrm{GL}(V)^\circ$  et ainsi  $v(x) = 0$  et  $x$  est inversible dans  $\mathcal{O}$ . Au final,  $sL = L$  et  $s \in G_L$ .  $\square$

**Théorème 4.9** *Sous l'hypothèse que l'adhérence de  $G \subseteq \mathrm{GL}(V)^+$  dans  $\mathrm{GL}(V)$  contient  $\mathrm{SL}(V)$ , le segment  $[\Lambda\Lambda']$  est un domaine fondamental pour l'action de  $G$  sur l'arbre  $\mathcal{X}$ .*

*Preuve :* Il s'agit de montrer que  $G$  agit transitivement sur l'ensemble des classes à distance paire de l'origine, ceux à distance impaire de l'origine, et enfin que  $G_L$  agit transitivement sur l'ensemble des arêtes d'origine  $\Lambda$ . Faisons le précisement :

Action sur les sommets :

Notons  $X_e$  l'ensemble des sommets de  $\mathcal{X}$  à distance paire de  $\Lambda$  et  $X_o$  ceux à distance impaire. L'interprétation volumique donnée à la proposition 4.7 et le fait que  $G \subseteq \mathrm{GL}(V)^+$  impliquent que  $X_e$  et  $X_o$  sont stables par  $G$ . Reste à voir que si  $\Lambda_e \in X_e$  (resp.  $\Lambda_o \in X_o$ ) alors il existe  $g \in G$  tel que  $g\Lambda = \Lambda_e$  (resp.  $g\Lambda' = \Lambda_o$ ). On va traiter le cas pair, l'autre se faisant de manière similaire : soient  $\Lambda_e \in X_e$  et  $2n = d(\Lambda_e, \Lambda)$ . Par le même argument que pour le lemme 4.3, si  $L \in \Lambda$  et  $L_e \in \Lambda_e$ , on a une base  $(e_1, e_2)$  à  $L$  de sorte que  $(e_1\pi^a, e_2\pi^b)$  soit une base de  $L_e$  ; aussi,  $|a - b| = 2n$ . Le réseau  $\tilde{L}_e = \pi^{n-a}L_e$  admet alors  $(e_1\pi^n, e_2\pi^{-n})$  pour base et  $s_n = \begin{pmatrix} \pi^n & 0 \\ 0 & \pi^{-n} \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(V)$  vérifie  $s_n L = \tilde{L}_e$ . De plus,  $s_n^{-1}G$  est un sous-ensemble de  $\mathrm{GL}_2(K)$  contenant  $1 \in \mathrm{GL}_2(\mathcal{O})$  dans son adhérence ; or  $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O})$  est ouvert dans  $\mathrm{GL}_2(K)$ , c'est donc qu'il existe  $g \in G$  et  $u \in \mathrm{GL}_2(\mathcal{O})$  tels que  $g = s_n u$ . Mais alors  $gL = sL = \tilde{L}_e$  et  $g\Lambda = \Lambda_e$ .

Action sur les arêtes :

Comme l'action est transitive sur les sommets, il suffit de se ramener au sommet origine  $v_0 = \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}$  et aux arêtes partant de ce sommet. Notons  $v_1$  son sommet voisin  $\mathcal{O} \oplus \pi\mathcal{O}$ . Remarquons que les autres voisins de  $v_0$  se déduisent de  $v_1$  via multiplication par  $w = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  ou  $x_a = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  pour  $a \in \mathcal{O}$ . Soit  $U$  le sous-groupe de  $\mathrm{GL}(\mathcal{O})$  de la forme  $\begin{pmatrix} 1 + \pi\mathcal{O} & \pi\mathcal{O} \\ \pi\mathcal{O} & 1 + \pi\mathcal{O} \end{pmatrix}$  : il est ouvert et stabilise  $v_0$ . De plus  $x_a^{-1}G$  est un sous-ensemble de  $\mathrm{GL}_2(K)$  possédant  $1 \in U$  ouvert dans son adhérence. C'est donc qu'il existe  $u_a \in U$  et  $g_a \in G$  tels que  $g_a = x_a u_a$ . De la même manière, il existe  $u \in U$  et  $g \in G$  tels que  $g = wu$ . Alors  $g_a v_0 = g v_0 = v_0$  et  $g_a v_1 = x_a v_1$ , ainsi que  $g v_1 = w v_1$ . Donc l'action de  $G$  sur les arêtes est transitive.  $\square$

#### 4.4 Sous-groupes de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$

Comme premier apport de l'arbre, certains sous-groupes intéressants de  $\mathrm{GL}_2$  apparaissent comme des stabilisateurs de parties de l'arbre. C'est ce que nous décrivons dans ce paragraphe :

On dit que  $G \subseteq \mathrm{GL}(V)$  est *borné* s'il existe une borne commune aux coefficients de  $G$  vu comme sous-ensemble de  $\mathrm{GL}_2(K)$  : il existe un entier  $m$  tel que si  $g = (g_{i,j}) \in G$ , alors  $v(g_{i,j}) \geq m$ .

**Proposition 4.10** *Les sous-groupes bornés maximaux de  $G \subseteq \mathrm{GL}(V)^\circ$  sont les stabilisateurs des sommets de  $\mathcal{X}$ .*

*Preuve* : Il s'agit de montrer que  $G$  laisse fixe un sommet de  $\mathcal{X}$  si et seulement si  $G$  est borné. Par le lemme précédent, cela revient à voir qu'il existe un réseau de  $V$  stable par  $G$  si et seulement si  $G$  est borné. Pour l'implication directe, soient  $L$  un réseau stable par  $G$  et  $(e_1, e_2)$  une base de  $L$ . Pour  $g \in G$ , sa matrice dans la base  $(e_1, e_2)$  appartient à  $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O})$ . Et les coefficients sont alors clairement bornés. Réciproquement, si  $G$  est borné (disons par  $m$ ), fixons un réseau  $L_0$  et formons  $L = \sum_{g \in G} gL_0$ . Tous les  $gL_0$  sont inclus dans  $\pi^m L_0$  et  $L$  est donc un réseau. De plus, il est stable par  $G$ , ce qui achève la démonstration.  $\square$

On appelle *sous-groupes d'Iwahori* les stabilisateurs des arêtes de  $\mathcal{X}$ , et *sous-groupes de Borel* les stabilisateurs des bouts. Quant aux stabilisateurs des droits chemins, on les nomme *sous-groupes de Cartan*.

Sous-groupes d'Iwahori :

Vu que l'action sur les arêtes est transitive, il suffit de s'intéresser à l'arête orientée reliant  $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$  à  $\mathbb{Z}_p \oplus p\mathbb{Z}_p$ , les autres s'obtenant simplement par conjugaison de ce stabilisateur standard.

Cela correspond à  $\mathcal{I} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p) \mid |c|_p \leq p^{-1} \right\}$  si on veut une traduction matricielle. Aussi, il sera intéressant de regarder son pro- $p$ -Sylow, que l'on a envie d'appeler le pro- $p$ -Iwahori :

$$\mathcal{I}(1) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p) \mid a, d \in 1 + p\mathbb{Z}_p, c \in p\mathbb{Z}_p, b \in \mathbb{Z}_p \right\}.$$

Sous-groupes de Borel :

On notera  $B_s = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p) \mid \left| \frac{a}{d} \right|_p = p^{-s} \right\}$ , qui correspond à la stabilisation d'un bout avec translation de  $s$  à l'infini. Et bien sûr, on introduit le sous-groupe de Borel standard  $B = \bigcup B_s$ . Comme pour l'Iwahori, on peut bien sûr conjuguer le sous-groupe de Borel standard pour en obtenir d'autres.

Sous-groupes de Cartan :

$$\text{C'est } C = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p) \right\}.$$

## 5 Représentations lisses de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ en caractéristique $p$

Voyons quelques aspects de ce que l'arbre peut nous offrir en termes de représentations.

### 5.1 Quelques généralités

Soient  $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$  et  $H$  un sous-groupe ouvert. Soit  $(\rho, V)$  est une représentation lisse sur un corps  $\overline{\mathbb{F}}_p$ . On note  $\mathcal{F}(G, H, \rho)$  l'ensemble des applications  $f : G \rightarrow V$  à support compact modulo  $H$  vérifiant, pour tous  $h \in H$ ,  $g \in G$  :  $f(hg) = \rho(h) f(g)$ . On rappelle que  $\mathrm{Ind}_H^G \rho$  est la représentation définie par l'action à droite sur  $\mathcal{F}(G, H, \rho)$ , c'est-à-dire  $g.f : x \mapsto f(xg)$ . Aussi  $V^H$  désignera le sous-espace de  $V$  des éléments invariants sous l'action de  $H$ .

**Proposition 5.1** *Toute représentation lisse  $\rho$  en caractéristique  $p$  du pro- $p$ -Iwahori  $\mathcal{I}(1)$  possède un vecteur stable non trivial.*

Preuve : C'est un corollaire direct de 2.5. □

Le fait que cet espace d'invariants  $V^{\mathcal{I}(1)}$  soit non trivial va nous être très utile, et le paragraphe suivant va nous éclairer sur cela.

### 5.2 Algèbres de Hecke

Pour les structures d'algèbres de groupe considérées, on se fixe un anneau commutatif unifié  $R$ .

On définit l'algèbre de Hecke de  $G$  relativement à  $H$  sur  $R$  par :

$$\mathcal{H}_R(G, H) = \mathrm{End}_{R[G]}(\mathrm{Ind}_H^G \mathbb{1}).$$

Explicitons un peu la réciprocity de Frobenius dans le cas où on induit un caractère trivial pour pouvoir donner une interprétation plus parlante de cette algèbre de Hecke. D'abord, on voit que  $\mathrm{Ind}_H^G \mathbb{1}$  peut s'apparenter à  $R[H \backslash G]$ , qui est par définition la  $R$ -algèbre des fonctions  $H \backslash G \rightarrow R$  à support compact. La réciprocity de Frobenius s'énonce par l'isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_H(\mathbb{1}, V|_H) \simeq \mathrm{Hom}_G(\mathrm{Ind}_H^G \mathbb{1}, V).$$

On a  $\mathrm{Hom}_H(\mathbb{1}, V|_H) = V^H$  : en effet, si  $\alpha \in \mathrm{Hom}_H(\mathbb{1}, V|_H)$  et  $w$  est un vecteur non nul de  $\mathbb{1}_H$ , on voit que  $h\alpha(w) = \alpha(hw) = \alpha(w)$  et ceci nous fournit un élément de  $V^H$  et que réciproquement tout élément de  $V^H$  peut définir un  $\alpha(w)$  et par conséquent un  $\alpha \in \mathrm{Hom}_H(\mathbb{1}, V|_H)$ . Comme, de plus

$\text{Ind}_H^G \mathbb{1} \simeq R[H \backslash G]$ , on est amené à voir que  $V^H \simeq \text{Hom}_G(R[H \backslash G], V)$ . Et là, on peut exhiber les isomorphismes :

$$\begin{array}{ccc} V^H & \longleftrightarrow & \text{Hom}_G(R[H \backslash G], V) \\ v & \mapsto & (\phi_v : \mathbb{1}_H \mapsto v) \\ \varphi(\mathbb{1}_H) & \longleftarrow & \varphi \end{array}$$

où  $\phi_v$  est l'unique morphisme de  $G$ -représentations tel que  $\mathbb{1}_H$  soit envoyée sur  $v$ .

Il devient tautologique de vérifier que ces deux applications sont bien réciproques l'une de l'autre.

En utilisant la réciprocity de Frobenius pour  $V = \text{Ind}_H^G \mathbb{1} \simeq R[H \backslash G]$ , on obtient les isomorphismes :

$$\mathcal{H}_R(G, H) \simeq (R[H \backslash G])^H \simeq R[H \backslash G/H]$$

où  $R[H \backslash G/H]$  désigne l'algèbre des fonctions à valeurs dans  $R$  sur les doubles classes  $H \backslash G/H$  munie d'un produit de convolution (voir l'appendice de [8]). En effet pour le second isomorphisme, remarquons que  $R[H \backslash G]$  est aussi l'algèbre des  $R$ -combinaisons linéaires finies de fonctions caractéristiques  $\mathbb{1}_{Hg}$ , sur laquelle  $G$  agit (pour respecter l'isomorphisme avec l'induite) par translation à droite : si  $f \in R[H \backslash G]$ ,  $g.f : x \mapsto f(xg)$ .

**Proposition 5.2** *L'espace des invariants  $V^H$  est muni d'une structure de module à droite sur  $\mathcal{H}_R(G, H)$ .*

*Preuve :* Par réciprocity de Frobenius, on a déjà vu  $V^H \simeq \text{Hom}_H(\mathbb{1}, \rho|_H) \simeq \text{Hom}_G(\text{Ind}_H^G \mathbb{1}, \rho)$ ; à  $v \in V^H$  on associe alors l'élément de  $\text{Hom}_G(\text{Ind}_H^G \mathbb{1}, \rho)$ ,  $\phi_v^H : \mathbb{1}_H \mapsto v$ . Pour  $T \in \mathcal{H}_R(G, H)$ ,  $v \diamond T = \phi_{v \diamond T}^H(\mathbb{1}_H) = \phi_v^H \circ T(\mathbb{1}_H)$  définit une action à droite.

On peut aussi voir ceci de la façon équivalente suivante : les fonctions de  $\{\mathbb{1}_{HgH} \mid g \in G\}$  forment une base de  $R[H \backslash G]$ . Si  $HgH = \coprod_j Hg_j$  et  $T \in \mathcal{H}_R(G, H)$  est associé à  $\mathbb{1}_{HgH}$  par réciprocity de Frobenius, alors  $v \diamond T = \sum_j \rho(g_j^{-1})v$  définit la même action.  $\square$

Appelons maintenant  $\mathfrak{Rep}_{\overline{\mathbb{F}}_p} G$  la catégorie des représentations de  $G$  sur  $\overline{\mathbb{F}}_p$  et  $\mathfrak{Mod} \mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, H)$  celle des modules à droite sur l'algèbre de Hecke  $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, H)$ . La proposition précédente nous fournit alors un foncteur

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{Rep}_{\overline{\mathbb{F}}_p} G & \longrightarrow & \mathfrak{Mod} \mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, H) \\ V & \longmapsto & V^H \end{array} .$$

L'étude des modules à droite sur l'algèbre de Hecke devrait donc nous permettre d'obtenir des informations sur les représentations de  $G$ , mais ceci à

condition que  $V^H \neq \{0\}$ . En ce sens, le cas des représentations lisses de  $\mathcal{I}(1)$  nous est favorable au vu de la proposition 5.1.

Mais pour décrire des modules, il nous est indispensable de comprendre la structure des algèbres de Hecke. Pour cela encore l'observation de l'action sur l'arbre nous sera d'une grande aide.

### 5.3 Structure de $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)/p, \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p))$

On rappelle qu'on note  $\mathcal{X}$  l'arbre de  $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q}_p)$  et on introduit les notations : son ensemble de sommets sera  $\mathcal{V}$  et celui de ses arêtes orientées  $\mathcal{E}$ . Dorénavant, on note  $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}$  et  $\gamma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . On désigne par  $v_0$  le sommet de  $\mathcal{X}$  correspondant au réseau  $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$  et  $v_n = \alpha^n v_0$  pour  $n \in \mathbb{Z}$ . On appelle  $e_{n,n\pm 1}$  l'arête  $v_n \rightsquigarrow v_{n\pm 1}$ .

Dans cette section, on va noter  $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)/p$  et  $K = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ . Enfin on rappelle les isomorphismes suivants, qui nous seront utiles par la suite :  $\mathcal{V} = G v_0 \simeq G/K$  et  $\mathcal{E} = G e_{0,1} \simeq G/\mathcal{I}$ .

Justifions un peu nos choix : en fait étudier  $G$  à la place de  $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$  revient à demander que  $p$  agisse par multiplication par un scalaire, et  $K$  est le sous-groupe compact maximal comme vu à la proposition 4.10.

Les fonctions  $\{\mathbb{1}_{Kg} \mid g \in K \backslash G\}$  forment une base du  $\overline{\mathbb{F}}_p$ -espace vectoriel  $\overline{\mathbb{F}}_p[K \backslash G]$ . On peut aussi définir une correspondance  $G$ -équivariante par  $\Xi : \begin{array}{ccc} \mathcal{V} & \leftrightarrow & \overline{\mathbb{F}}_p[K \backslash G] \\ g^{-1}v_0 & \leftrightarrow & \mathbb{1}_{Kg} \end{array}$ , c'est-à-dire qu'elle respecte l'action de  $G$ . Alors on peut identifier  $\overline{\mathbb{F}}_p[K \backslash G]$  à l'espace  $\{\sum_{v \in \mathcal{V}} t_v v \mid t_v \in \overline{\mathbb{F}}_p\}$ .

Notons  $D_n(\mathbb{Q}_p)$  l'ensemble des matrices diagonales sur  $\mathbb{Q}_p$ , à éléments diagonaux  $p^{\alpha_i}$  avec  $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_n$ .

**Lemme 5.3 (Cartan)** *On a :  $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Q}_p) = \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}_p) D_n(\mathbb{Q}_p) \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}_p)$ .*

Remarque : On n'a pas unicité dans la décomposition de Cartan.

Démonstration : On se référera à [4]. □

En utilisant la décomposition de Cartan, on voit que  $\overline{\mathbb{F}}_p[K \backslash G/K] = \{f : K \backslash G/K \rightarrow \overline{\mathbb{F}}_p \mid \mathrm{Supp} f \text{ compact}\}$  admet une base formée des fonctions  $\varphi_n = \mathbb{1}_{K\alpha^n K}$  pour  $n \in \mathbb{N}$ . Notons  $T_n$  l'élément de  $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, K)$  correspondant par réciprocity de Frobenius ; on s'autorise à écrire simplement  $T$  pour  $T_1$ . On peut donner une interprétation géométrique à cet opérateur : d'abord  $\mathbb{1}_{K\alpha^n K} = \sum_i \mathbb{1}_{Kg_i}$  où  $\{g_i\}_i = K \backslash (K\alpha^n K)$ . En utilisant la correspondance  $\Xi$ , les  $g_i^{-1}v_0$  sont distincts et fournissent tous les sommets  $\tilde{v} \in \mathcal{V}$   $K$ -équivalents

à  $v_n$ . Cela donne que  $(v_0, \tilde{v})$  est  $G$ -équivalent à  $(v_0, v_n)$ ; ainsi  $T_n$  correspond à l'opérateur  $v \mapsto \sum_{d(v, \tilde{v})=n} \tilde{v}$ .

**Lemme 5.4** *Pour  $n \geq 2$ , on a :  $T_n = T^{n-2}(T^2 - 1)$ .*

*Preuve* : Il faut voir :  $T_2 = T^2 - 1$  et  $T_n = TT_{n-1}$  pour  $n \geq 3$ . Le résultat suivra alors par une récurrence immédiate. Soit  $v$  un élément de  $\mathcal{V}$ .

On a  $Tv = \sum_{d(v, \tilde{v})=1} \tilde{v}$  et pour chaque  $\tilde{v}$ ,  $T\tilde{v}$  est la somme de  $v$  et de  $p$  éléments

à distance 2 de  $v$ . De plus, il va de soi que tout élément à distance 2 de  $v$  est issu d'un  $\tilde{v}$ . Alors  $T^2v = (p+1)v + T_2v$ ; comme on est en caractéristique  $p$ , on a bien  $T_2 = T^2 - 1$ .

Soit  $n \geq 3$ . On a  $T_{n-1}v = \sum_{d(v, \tilde{v})=n-1} \tilde{v}$ ; aussi les  $\tilde{v}$  se regroupent par paquets

de  $p$  car provenant d'un même sommet  $\hat{v}$  à distance  $n-2$  de  $v$  (car précisément  $n \geq 3$ ). Alors  $TT_{n-1}v = \sum_{d(v, \tilde{v})=n-1} T\tilde{v} = \sum_{d(v, \check{v})=n} \check{v} + p \sum_{d(v, \hat{v})=n-2} \hat{v} = \sum_{d(v, \check{v})=n} \check{v} = T_nv$ .  $\square$

**Théorème 5.5** *L'algèbre de Hecke  $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, K)$  est isomorphe à  $\overline{\mathbb{F}}_p[T]$  en tant que  $\overline{\mathbb{F}}_p$ -algèbre.*

*Preuve* : Les  $T_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  forment une base de  $\mathcal{H}(G, K)$ . Le morphisme d'algèbres  $\overline{\mathbb{F}}_p[T_n]_{n \geq 1} \rightarrow \mathcal{H}(G, K)$  est alors surjectif, et se factorise par les relations  $\mathcal{R}$  du lemme précédent; le morphisme induit devient un isomorphisme car  $T$  est bien libre dans  $\mathcal{H}(G, K)$  (il suffit de regarder son action sur l'arbre, qui est libre). Mais le quotient  $(\overline{\mathbb{F}}_p[T_n]_{n \geq 1})/\mathcal{R}$  est bien isomorphe à  $\overline{\mathbb{F}}_p[T]$ .  $\square$

En particulier, on voit que  $\mathcal{H}(G, K)$  est commutative. Par le lemme de Schur, son action sur un module de dimension finie est donc une action de multiplication par un scalaire. Ce qui nous permet de voir que tout module simple est en fait de dimension 1.

Néanmoins l'information n'est utile que lorsque  $V^K \neq \{0\}$ , ce qui arrive en fait très rarement vu que  $K$  est le compact maximal. Pour tenir compte de cette remarque, on veut se rapprocher de l'étude de  $V^{\mathcal{I}(1)}$  en cherchant d'abord à comprendre l'algèbre de Hecke de l'Iwahori standard.

#### 5.4 Structure de $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)/p, \mathcal{I})$

Les fonctions  $\{\mathbb{1}_{\mathcal{I}g} \mid g \in (\mathcal{I} \backslash G)\}$  forment une base du  $\overline{\mathbb{F}}_p$ -espace vectoriel  $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathcal{I} \backslash G]$ . De la même façon que précédemment, on peut établir une correspondance  $G$ -équivariante par  $\Upsilon : \begin{array}{l} \mathcal{E} \leftrightarrow \overline{\mathbb{F}}_p[\mathcal{I} \backslash G] \\ g^{-1}e_{0,1} \leftrightarrow \mathbb{1}_{\mathcal{I}g} \end{array}$ ; et celle-ci permet d'identifier  $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathcal{I} \backslash G]$  à l'espace  $\{\sum_{e \in \mathcal{E}} t_e e \mid t_e \in \overline{\mathbb{F}}_p\}$ .

**Lemme 5.6** *L'ensemble  $\{\alpha^n, \gamma\alpha^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$  forme un système de représentants des doubles classes  $\mathcal{I}\backslash G/\mathcal{I}$ .*

Remarque : Dans la correspondance  $\Upsilon$  on a alors 
$$\begin{array}{l} e_{n,n+1} \leftrightarrow \mathbb{1}_{\mathcal{I}\alpha^{-n}} \\ e_{n+1,n} \leftrightarrow \mathbb{1}_{\mathcal{I}\gamma\alpha^{-(n+1)}} \end{array} .$$

Preuve : On sait  $\mathcal{I}\backslash G/\mathcal{I} \simeq \mathcal{E}/\mathcal{I}$ . Si  $e \in \mathcal{E}$ , on a un unique  $\tilde{e}$  parmi les  $e_{n,n\pm 1}$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ) de sorte que  $(e_{0,1}, e)$  soit  $\mathcal{I}$ -équivalent à  $(e_{0,1}, \tilde{e})$  (par le théorème 4.9 appliqué à  $\mathcal{I}\mathbb{Q}_p^\times$ ). Ainsi  $\{e_{n,n+1}, e_{n+1,n} \mid n \in \mathbb{Z}\}$  est un système de représentants de  $\mathcal{E}/\mathcal{I}$ ; or  $e_{n,n+1} = \alpha^n e_{0,1}$  et  $e_{n+1,n} = \alpha^n e_{1,0} = \alpha^{n+1} \gamma e_{0,1}$ , ce qui permet de conclure.  $\square$

On note  $\phi_{n,n+1}$  (resp.  $\phi_{n+1,n}$ ) l'élément correspondant à  $\mathbb{1}_{\mathcal{I}\alpha^{-n}\mathcal{I}}$  (resp.  $\mathbb{1}_{\mathcal{I}\gamma\alpha^{-(n+1)}\mathcal{I}}$ ) via  $\Upsilon$  : c'est la somme formelle  $\sum \tilde{e}$  de tous les  $\tilde{e}$   $\mathcal{I}$ -équivalents à  $e_{n,n+1}$  (resp.  $e_{n+1,n}$ ). On introduit aussi  $T_{n,n+1}$  (resp.  $T_{n+1,n}$ ) l'élément de  $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, \mathcal{I})$  correspondant par réciprocity de Frobenius. Au vu de l'action décrite à la proposition 5.2, on a  $T_{n,n\pm 1}(e_{0,1}) = e_{0,1} \diamond T_{n,n\pm 1} = \phi_{n,n\pm 1}$ .

**Lemme 5.7** *Soient  $e \in \mathcal{E}$  et  $\bar{e}$  son arête opposée.*

*Alors  $T_{1,0}(e) = \bar{e}$  et  $T_{0,-1}(e) = \sum \tilde{e}$  où  $\tilde{e}$  parcourt l'ensemble des arêtes distinctes de  $e$  ayant la même origine que  $e$ .*

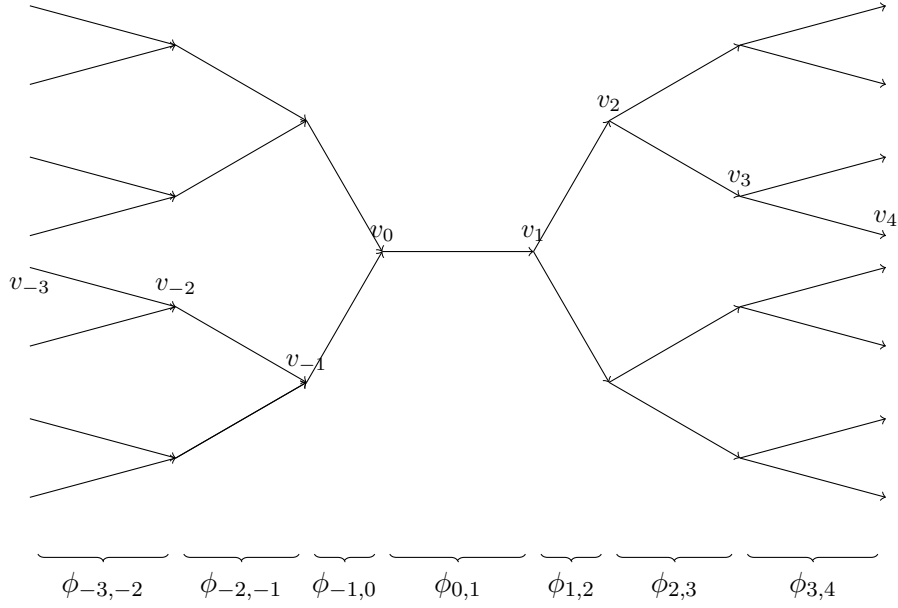
$$\begin{array}{l} \text{Pour } n > 0, \quad (T_{0,-1}T_{1,0})(\phi_{n+1,n}) = -\phi_{n,n+1}, \\ \quad \quad \quad (T_{0,-1}T_{1,0})(\phi_{-n,-n+1}) = -\phi_{-n+1,-n}; \\ \text{pour } n \geq 0, \quad (T_{0,-1}T_{1,0})(\phi_{n,n+1}) = \phi_{n+1,n+2}, \\ \quad \quad \quad (T_{0,-1}T_{1,0})(\phi_{-n+1,-n}) = \phi_{-n,-n-1}; \\ \text{pour } n \in \mathbb{Z}, \quad T_{1,0}(\phi_{n,n+1}) = \phi_{n+1,n}, \\ \quad \quad \quad T_{1,0}(\phi_{n+1,n}) = \phi_{n,n+1}. \end{array}$$

Preuve : Par  $G$ -équivariance, décrire l'action de  $T_{1,0}$  et  $T_{0,-1}$  sur  $e_{0,1}$  la donnera sur toute arête  $e$ . Et ceci a déjà été énoncé précédemment. Néanmoins on peut regarder précisément les choses puisque ces deux éléments vont servir de générateurs pour l'algèbre de Hecke.

- On remarque que l'élément de  $\mathcal{I}\backslash G/\mathcal{I}$  correspondant à  $T_{1,0}$  via la réciprocity de Frobenius est  $\mathbb{1}_{\mathcal{I}\gamma\alpha^{-1}\mathcal{I}}$ . Mais  $\alpha\gamma$  normalise l'Iwahori, c'est-à-dire que  $\gamma\alpha^{-1}\mathcal{I}\alpha\gamma = \mathcal{I}$ , et donc c'est aussi  $\mathbb{1}_{\mathcal{I}\gamma\alpha^{-1}}$ . Alors  $T_{1,0}(e_{0,1}) = (\alpha\gamma)(e_{0,1}) = e_{1,0}$ .
- L'élément de  $\mathcal{I}\backslash G/\mathcal{I}$  correspondant à  $T_{0,-1}$  est  $\mathbb{1}_{\mathcal{I}\gamma\mathcal{I}}$ . On peut maintenant décomposer cette double classe :  $\mathcal{I}\gamma\mathcal{I} = \coprod \mathcal{I}g_a$  où  $g_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & p \end{pmatrix}$  et  $a$  parcourt  $\{0, \dots, p-1\}$ . De ce fait,  $T_{0,-1}(e_{0,1}) = \sum_a (g_a)^{-1}(e_{0,1})$ , ce qui nous permet de retrouver l'action donnée.

Pour démontrer les identités suivantes, on remarquera que  $T_{0,-1}T_{1,0} = T_{1,2}$  et que  $T_{1,2}(e) = \sum \tilde{e}$  où  $\tilde{e}$  parcourt l'ensemble des arêtes distinctes de  $\bar{e}$  ayant pour origine la pointe de  $e$ .





Ainsi il ne reste plus qu'à compter sur l'arbre.

$$\text{Pour } n \geq 0, \quad T_{1,2}(\phi_{n,n+1}) = \phi_{n+1,n+2},$$

$$T_{1,2}(\phi_{n+1,n} = p\phi_{n,n-1}) + (p-1)\phi_{n,n+1} = -\phi_{n,n+1};$$

$$\text{Pour } n > 0, \quad T_{1,2}(\phi_{n,n+1}) = p\phi_{n+1,n+2} + (p-1)\phi_{n+1,n} = -\phi_{n+1,n},$$

$$T_{1,2}(\phi_{n+1,n}) = \phi_{n,n-1}.$$

Les deux identités pour  $T_{1,0}$  coulent de source.  $\square$

**Lemme 5.8** *Soit  $n \geq 0$ .*

- $T_{n,n+1} = (T_{0,-1}T_{1,0})^n$ ;
- $T_{-n+1,-n} = (T_{0,-1}T_{1,0})^n T_{1,0}$ ;
- $T_{n+1,n} = T_{1,0}(T_{0,-1}T_{1,0})^n$ ;
- $T_{-n,-n+1} = T_{1,0}(T_{0,-1}T_{1,0})^n T_{1,0}$ ;
- $(T_{0,-1})^2 + T_{0,-1} = 0$ .

*Preuve :* Par  $G$ -équivariance, il suffit de le prouver sur  $e_0 = e_{0,1}$ . Les deux premières propriétés se montrent par récurrence, et l'initialisation est à chaque fois évidente.

- Ensuite, on a  $T_{n+1,n+2}e_0 = \phi_{n+1,n+2} = (T_{0,-1}T_{1,0})(\phi_{n,n+1})$  et donc  $T_{n+1,n+2}e_0 = (T_{0,-1}T_{1,0})(T_{n,n+1}e_0)$ ; puis en utilisant l'hypothèse de récurrence, il vient  $T_{n+1,n+2}e_0 = (T_{0,-1}T_{1,0})^{n+1}e_0$ .
- Ensuite, on a  $T_{-n,-n-1}e_0 = \phi_{-n,-n-1} = (T_{0,-1}T_{1,0})(\phi_{-n+1,-n})$  et donc  $T_{-n,-n-1}e_0 = (T_{0,-1}T_{1,0})(T_{-n+1,-n}e_0)$ ; puis en utilisant l'hypothèse de récurrence, il vient  $T_{-n,-n-1}e_0 = (T_{0,-1}T_{1,0})^{n+1}T_{1,0}e_0$ .
- On a  $T_{1,0}T_{k,k+1}e_0 = T_{1,0}(\phi_{k,k+1}) = \phi_{k+1,k} = T_{k+1,k}e_0$ . En utilisant cette égalité et le premier point, le résultat suit.
- C'est une conséquence directe de l'égalité  $T_{1,0}T_{k,k+1} = T_{k+1,k}$  et du deuxième point.

– Notons  $e_1, \dots, e_p$  les arêtes ayant même origine que  $e_0$ . On a :

$$\begin{aligned} (T_{0,-1})^2 e_0 &= \sum_{i \neq 0} \sum_{j \neq i} e_j = \sum_{i \neq 0} (e_0 + \sum_{j \notin \{0,i\}} e_j) \\ &= p e_0 + \sum_{j \neq 0} \sum_{i \notin \{0,j\}} e_j = p e_0 + (p-1) T_{0,-1} e_0 \end{aligned}$$

$$(T_{0,-1})^2 e_0 = -T_{0,-1} e_0. \quad \square$$

**Théorème 5.9** *L'algèbre de Hecke  $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, \mathcal{I})$  est non commutative et isomorphe à  $\overline{\mathbb{F}}_p[T, S]/(T^2 - 1, S^2 + S)$  en tant que  $\overline{\mathbb{F}}_p$ -algèbre.*

*Preuve* : Les fonctions  $T_{n,n\pm 1}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  forment une base de  $\mathcal{H}(G, \mathcal{I})$  d'après le lemme 5.6. Le morphisme d'algèbres  $\overline{\mathbb{F}}_p[T_{n,n+1}, T_{n,n-1}]_{n \in \mathbb{Z}} \rightarrow \mathcal{H}(G, \mathcal{I})$  est alors surjectif et se factorise par les relations du lemme précédent. En appelant maintenant respectivement  $T$  et  $S$  les éléments  $T_{1,0}$  et  $T_{0,-1}$ , on obtient un morphisme surjectif  $\overline{\mathbb{F}}_p[T, S]/(T^2 - 1, S^2 + S) \rightarrow \mathcal{H}(G, \mathcal{I})$ . Pour voir que ce dernier est isomorphisme, il suffit de voir que les éléments de la forme  $STS \dots T$  ou  $STS \dots S$  sont libres, ce qui revient à dire, au vu du lemme précédent que les  $T_{n,n\pm 1}$  le sont. Dès lors, on a l'isomorphisme désiré.  $\square$

Maintenant que l'on dispose d'une description sympathique de cette algèbre de Hecke, on peut en exhiber les modules simples. Pour cela, on se reportera à [8] par exemple.

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Des nombres <math>p</math>-adiques</b>	<b>2</b>
1.1	Vus comme une limite projective . . . . .	2
1.2	Vus comme un complété métrique . . . . .	3
1.3	Équivalence des définitions de $\mathbb{Q}_p$ . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Représentations lisses des groupes profinis</b>	<b>6</b>
2.1	Notions topologiques sur les groupes profinis . . . . .	6
2.2	Des représentations lisses en caractéristique $p$ . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Représentations lisses de <math>\mathbb{Q}_p^\times</math> en caractéristique <math>p</math></b>	<b>9</b>
3.1	Structure de $\mathbb{Q}_p^\times$ . . . . .	9
3.2	Représentations lisses de $\mathbb{Q}_p^\times$ en caractéristique $p$ . . . . .	11
<b>4</b>	<b>Arbre de <math>\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q}_p)</math></b>	<b>13</b>
4.1	Généralités sur les corps locaux . . . . .	13
4.2	Arbre de $\mathrm{SL}_2$ sur un corps local . . . . .	13
4.3	Action de $\mathrm{GL}(V)$ sur $\mathcal{X}$ . . . . .	17
4.4	Sous-groupes de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ . . . . .	18
<b>5</b>	<b>Représentations lisses de <math>\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)</math> en caractéristique <math>p</math></b>	<b>20</b>
5.1	Quelques généralités . . . . .	20
5.2	Algèbres de Hecke . . . . .	20
5.3	Structure de $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)/p, \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p))$ . . . . .	22
5.4	Structure de $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)/p, \mathcal{I})$ . . . . .	23

## Références

- [1] AMICE Yvette : *Les nombres  $p$ -adiques*, Presses Universitaires de France, 1975
- [2] BARTHEL L. & LIVNE R. : *Modular Representations of  $GL_2$  of a local field : the ordinary, unramified case*, Journal of Number Theory No. 55, 1995
- [3] KOBLITZ Neal :  *$p$ -adic Numbers,  $p$ -adic Analysis, and Zeta-Functions*, Springer-Verlag, 1977
- [4] MACDONALD I.G. : *Spherical functions on a group of  $p$ -adic type*, Madras, Ramanujan Institute for Advanced Study in Mathematics, University of Madras, 1971
- [5] SERRE Jean-Pierre : *Cours d'arithmétique*, Presses Universitaires de France, 1988
- [6] SERRE Jean-Pierre : *Arbres, amalgames,  $SL_2$* , Astérisque No. 46, Société Mathématique de France, 1977
- [7] SERRE Jean-Pierre : *Représentations linéaires des groupes finis*, Hermann, 1998
- [8] VIGNERAS Marie-France : *Representations modulo  $p$  of the  $p$ -adic group  $GL(2, F)$* , Compositio Math. No. 140, 2004