

Sur le diagramme de Voronoi et la triangulation de Delaunay d'un ensemble de points dans un revêtement du plan euclidien

Vincent Pilaud

Septembre 2006

Introduction

Il y aurait de nombreuses façons de présenter mon domaine de recherche, la géométrie discrète et algorithmique, et plus précisément mon travail de recherche actuel effectué sous la direction de Michel Pocchiola (Département d'Informatique de l'École Normale Supérieure) et de Francisco Santos (Département de Mathématiques et d'Informatique de l'Université de Cantabrie). J'ai choisi de présenter ici l'exemple de l'étude des diagrammes de Voronoi et des triangulations de Delaunay dans des revêtements particuliers de l'espace euclidien.

Ce choix me permet de situer mon exposé à différents niveaux : je présente d'une part des résultats classiques et des méthodes générales de géométrie discrète et algorithmique (§ 1); j'expose d'autre part des résultats obtenus lors de mon stage du Master Parisien de Recherche Informatique (§ 2,3); enfin, je présente certaines questions qui restent à étudier par la suite. Ainsi, la première partie présente le domaine de ma recherche, tandis que la suite présente le cadre plus précis de mon travail.

J'estime par ailleurs que le sujet des diagrammes de Voronoi et des triangulations de Delaunay présente simultanément l'aspect combinatoire et l'aspect algorithmique qui sont étudiés dans ce domaine. Ces deux aspects seront présents dans mon projet de recherche : je travaille avec Michel Pocchiola sur certains aspects algorithmiques dans les revêtements de l'espace euclidien qui n'ont pas encore été résolus (calcul de l'enveloppe convexe, énumération des pseudo-triangulations,...) tandis que le sujet du stage que j'effectue avec Francisco Santos est plus combinatoire.

Enfin, le sujet des diagrammes de Voronoi et des triangulations de Delaunay me permet de faire le lien avec ma formation d'enseignant puisque j'ai présenté certains des résultats qui suivent lors de la préparation à l'agrégation l'année dernière.

Table des matières

Introduction	1
1 Diagramme de Voronoi et triangulation de Delaunay dans \mathbb{R}^m	2
1.1 Généralités	2
1.2 Linéarisation	3
1.3 Calcul dans le plan	6
1.4 Applications	7
2 Revêtements	8
2.1 Définition	8
2.2 Motivations	9
3 Diagrammes de Voronoi et triangulation de Delaunay dans les revêtements	10
3.1 Définitions	10
3.2 Linéarisation	11
3.3 Cônes d'influence et algorithme de balayage	14
Conclusion	15
Bibliographie	15

1 Diagramme de Voronoi et triangulation de Delaunay dans \mathbb{R}^m

Le diagramme de Voronoi d'un ensemble S de n points de \mathbb{R}^m est une partition de l'espace en n cellules représentant les zones d'influence des points de S : la cellule de Voronoi d'un point x de S est constituée de l'ensemble des points plus proches de x que de tout autre point de S . La triangulation de Delaunay de S est l'unique triangulation de S dont tout simplexe admet une boule circonscrite qui ne contient aucun point de S (à part les sommets du simplexe).

Ces deux objets, duaux l'un de l'autre, peuvent être linéarisés en augmentant la dimension de l'espace : ainsi, le diagramme de Voronoi et la triangulation de Delaunay de S sont des projections de polytopes de \mathbb{R}^{m+1} (§ 1.2). Les diagrammes de Voronoi et les triangulations de Delaunay dans \mathbb{R}^m héritent donc des propriétés combinatoires des polytopes de \mathbb{R}^{m+1} . On obtient en particulier une borne sur la complexité d'un diagramme de Voronoi par le théorème de la borne supérieure (§ 1.2).

On présente ensuite (§ 1.3) un algorithme de calcul du diagramme de Voronoi de n points du plan par une méthode de balayage effectuée en temps $O(n \ln n)$. On renvoie à [Fort, 1997] pour un algorithme incrémental de calcul de la triangulation de Delaunay en temps $O(n \ln n)$.

Enfin, on note que ces objets apparaissent fréquemment en géométrie discrète et algorithmique : on présente ici (§ 1.4) des applications de ces objets au problème du bureau de poste et au calcul d'arbres couvrants minimaux. Pour d'autres exemples d'applications des diagrammes de Voronoi classiques, on renvoie à [Edel, 1987]. Pour des généralisations des diagrammes de Voronoi (diagrammes de Voronoi d'ordre supérieur, diagramme de puissances, changement de métrique,...), on renvoie à [Edel, 1987], [Fort, 1997], [Klei, 1989] et [YvBo, 1995].

1.1 Généralités

Soit m un entier et E l'espace euclidien de dimension m . La distance euclidienne sur E est notée d . On considère un ensemble S de points de E , de cardinal n , dont on note $\wp(S)$ l'ensemble des parties. On définit la fonction $\phi_S : E \mapsto \wp(S)$ qui à un point $x \in E$ associe $\{y \in S \mid d(x, y) = \min_{z \in S} d(x, z)\}$, c'est-à-dire l'ensemble de ses plus proches voisins dans S .

Définition 1 (Diagramme de Voronoi). *Pour toute partie R de S , on appelle cellule de Voronoi de R (dans S) l'image réciproque de R par ϕ_S , que l'on note $\text{Vor}_S(R)$.*

On appelle diagramme de Voronoi de S l'ensemble des cellules de Voronoi non vides de parties de S .

Le diagramme de Voronoi de S est un complexe cellulaire de \mathbb{R}^m . Chaque cellule de dimension m correspond à un site x de S et est constitué de l'ensemble des points de E plus proche de x que de tout autre site de S . Chaque cellule de codimension 1 est constitué de l'ensemble des points équidistants de deux sites x et y de S et plus proches de ces deux sites que de tout autre site de S (cette cellule sépare les deux cellules correspondant à x et y respectivement), et ainsi de suite (fig. 1).

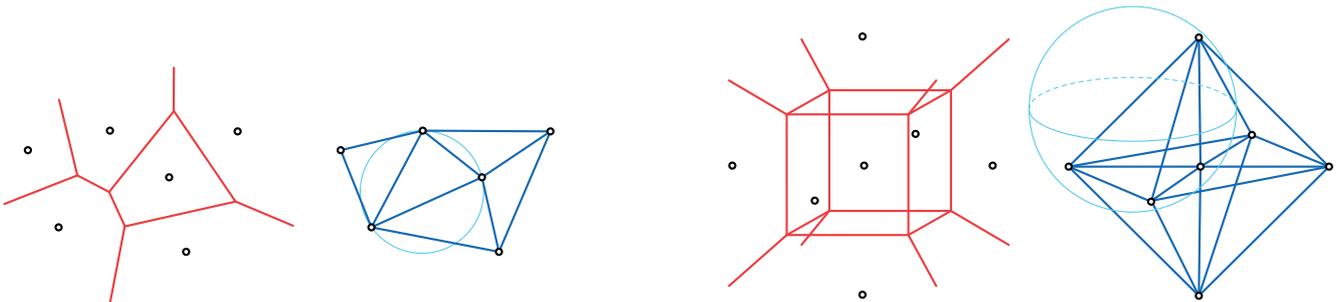


FIG. 1 – Diagramme de Voronoi et triangulation de Delaunay de points dans le plan et dans l'espace

Définition 2 (Triangulation de Delaunay). *Pour toute partie R de S telle qu'il existe une boule circonscrite à R qui ne contient aucun site de S autre que les points de R , on définit la face de Delaunay $\text{Del}_S(R)$ comme l'enveloppe convexe de R .*

On appelle triangulation de Delaunay de S l'ensemble $\text{Del}(S)$ des faces de Delaunay de S .

La triangulation de Delaunay de S est un complexe cellulaire qui forme une partition de l'enveloppe convexe de S (fig. 1). Lorsque les points sont en position générale, c'est-à-dire lorsqu'au plus $m + 1$ d'entre eux appartiennent à une même sphère et au plus $k + 1$ d'entre eux appartiennent à un même sous-espace affine de dimension k (pour tout $k < m$), la triangulation de Delaunay est un complexe simplicial : toutes les faces de Delaunay sont des simplexes.

Par ailleurs, le diagramme de Voronoi et la triangulation de Delaunay de S sont des complexes cellulaires duaux l'un de l'autre (fig. 1) : pour toute partie R de S , la cellule de Voronoi $\text{Vor}_S(R)$ est non vide si et seulement si il existe une boule circonscrite à R ne contenant aucun autre site de S . L'application de $\text{Vor}(S)$ dans $\text{Del}(S)$ qui envoie $\text{Vor}_S(R)$ sur $\text{Del}_S(R)$ est une dualité entre complexes cellulaires (elle renverse l'ordre d'inclusion entre les faces).

1.2 Linéarisation

L'espace des sphères. Soient $x \in E$ et $r \in \mathbb{R}^+$. On appelle *puissance* de la sphère de centre x et de rayon r l'application $\Sigma_{x,r}$ de E dans \mathbb{R} qui à un point y associe $\Sigma_{x,r}(y) = d(x,y)^2 - r^2$. La puissance d'une sphère est clairement nulle sur cette sphère, positive à l'extérieur et négative à l'intérieur. Elle atteint son minimum au centre de la sphère. Le centre et le rayon de la sphère sont donc déterminés par la puissance de la sphère. Dans la suite, on confond une sphère et sa puissance.

À la sphère $\Sigma_{x,r}$ de E de centre x et de rayon r , on fait correspondre le point $\Psi(\Sigma_{x,r}) = (x, \|x\|^2 - r^2) = (x, \Sigma_{x,r}(0)) \in E \times \mathbb{R}$. L'ensemble $\tilde{E} = E \times \mathbb{R}$ est appelé *espace des sphères*. On notera x la première coordonnée des points de cet espace ($x \in E$) et t la deuxième ($t \in \mathbb{R}$) ; on parlera d'*abscisse* et d'*ordonnée*. Le paraboloïde \mathbb{P} de \tilde{E} d'équation $t = \|x\|^2$ représente les sphères de rayon nul. Tous les points de \tilde{E} situés au-dessous de \mathbb{P} correspondent aux sphères réelles de E tandis que les points de \tilde{E} au-dessus de \mathbb{P} sont des sphères imaginaires.

Nous allons voir dans ce qui suit que les problèmes relatifs aux sphères dans l'espace E peuvent se voir comme des problèmes linéaires dans l'espace des sphères \tilde{E} . On a ainsi linéarisé ces problèmes en augmentant la dimension de l'espace. Pour illustrer ceci, on commence par étudier les faisceaux de sphères de E , puis on applique cette linéarisation au diagramme de Voronoi et à la triangulation de Delaunay.

Faisceaux de sphères. Un *faisceau de sphères* est l'ensemble $\mathcal{F}_{\Sigma_1, \Sigma_2}$ des sphères combinaisons linéaires affines de deux sphères données Σ_1 et Σ_2 :

$$\mathcal{F}_{\Sigma_1, \Sigma_2} = \{\lambda \Sigma_1 + (1 - \lambda) \Sigma_2 \mid \lambda \in \mathbb{R}\},$$

(où $\lambda \Sigma_1 + (1 - \lambda) \Sigma_2$ désigne la sphère de puissance $x \mapsto \lambda \Sigma_1(x) + (1 - \lambda) \Sigma_2(x)$).

On vérifie que le faisceau de sphères $\mathcal{F}_{\Sigma_1, \Sigma_2}$ est envoyé par Ψ dans l'espace des sphères sur une droite passant par les points de $\Psi(\Sigma_1)$ et $\Psi(\Sigma_2)$. Les faisceaux de sphères peuvent donc se classer suivant le nombre d'intersections de leur image par Ψ avec le paraboloïde \mathbb{P} . On a ainsi les quatre situations suivantes (fig. 2) :

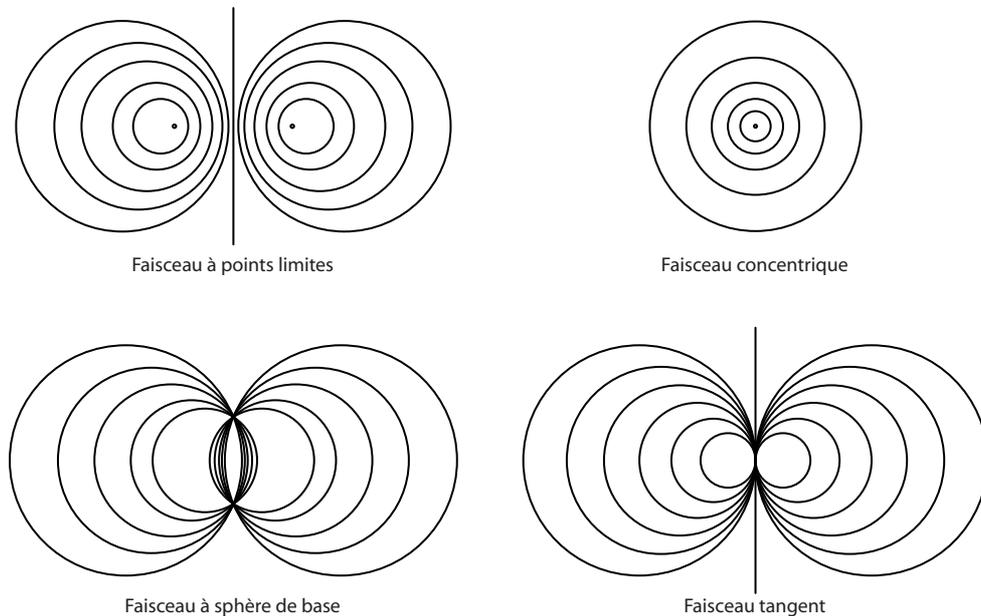


FIG. 2 – Les quatre types de faisceaux de sphères

1. Si la droite $\Psi(\mathcal{F})$ rencontre \mathbb{P} en deux points, \mathcal{F} contient deux sphères de rayon nul que l'on appelle *points limites* du faisceau \mathcal{F} .
2. Si la droite $\Psi(\mathcal{F})$ rencontre \mathbb{P} transversalement en un point, elle est nécessairement verticale (puisque le paraboloïde est dirigé par la verticale). \mathcal{F} est donc un faisceau de *sphères concentriques*.

3. Si la droite $\Psi(\mathcal{F})$ ne rencontre pas \mathbb{P} , il existe une famille d'hyperplans tangents au paraboloïde \mathbb{P} qui contiennent $\Psi(\mathcal{F})$. On note $\Sigma_{\mathcal{F}}$ l'ensemble des points de E (considérés comme des sphères de rayon nul) qui appartiennent à toutes les sphères du faisceau \mathcal{F} . L'image par Ψ de $\Sigma_{\mathcal{F}}$ correspond aux points de contact avec \mathbb{P} des hyperplans tangents à \mathbb{P} et contenant $\Psi(\mathcal{F})$. Ainsi, $\Sigma_{\mathcal{F}}$ est non vide, et on vérifie que c'est une sphère de dimension $n - 1$ que l'on appelle *sphère de base* du faisceau \mathcal{F} .
4. Si la droite $\Psi(\mathcal{F})$ est tangente à \mathbb{P} , on se trouve dans la situation d'un faisceau à points limites dont les deux points limites sont confondus, ou dans celle d'un faisceau à sphère de base dont la sphère de base est réduite à un point. On parle de *faisceau tangent*.

Diagramme de Voronoi. Considérons un point y de E (encore une fois confondu avec la sphère de rayon nulle correspondante), et notons H_y l'hyperplan tangent au paraboloïde \mathbb{P} au point $\Psi(y)$. L'équation de H_y est donné par :

$$t = 2\langle x | y \rangle - \|y\|^2.$$

Par conséquent, si y et z sont deux points fixés de E , un point x de E est plus proche de y que de z si et seulement si au point d'abscisse x , l'hyperplan H_y est au-dessus de l'hyperplan H_z . On en déduit le théorème suivant (fig. 3) :

Théorème 1. *Le diagramme de Voronoi d'un ensemble S de points de E est obtenu par projection verticale sur E de l'intersection des demi-espaces supérieurs de \tilde{E} délimités par les hyperplans H_x , $x \in S$.*

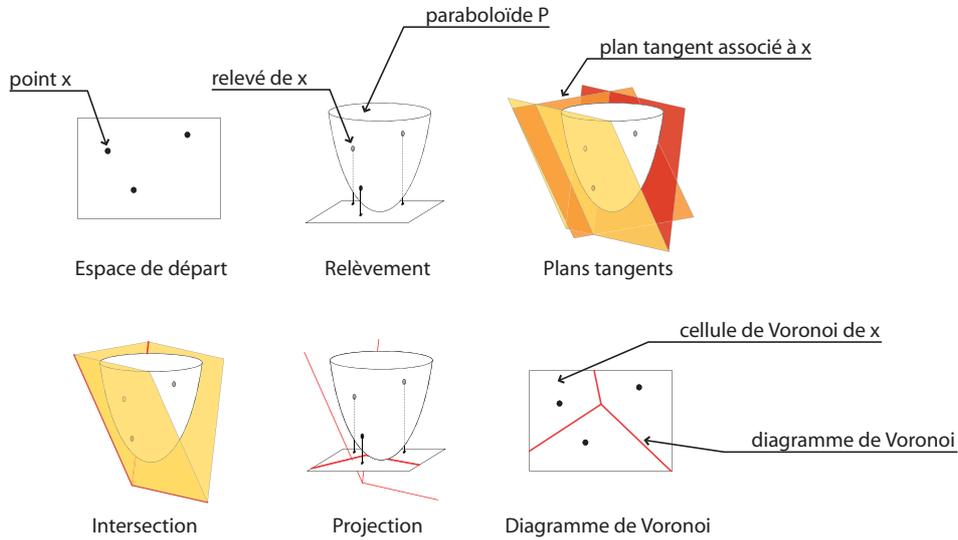


FIG. 3 – Diagramme de Voronoi par projection

Cette linéarisation permet d'appliquer les propriétés combinatoires connues des polytopes aux diagrammes de Voronoi. Commençons par traiter le cas de la dimension 2. Un diagramme de Voronoi de n points du plan est la projection d'un polytope de \mathbb{R}^3 à n faces. Or quitte à ajouter un sommet à l'infini, le graphe d'un polytope de \mathbb{R}^3 vérifie le lemme suivant :

Lemme 1 (Euler). *Soit s le nombre de sommets, a le nombre d'arêtes et f le nombre de faces d'un polyèdre de \mathbb{R}^3 . Alors $s - a + f = 2$.*

Ce polytope ayant n faces, on en déduit que $(s + 1) - a + n = 2$. Or chaque arête ayant exactement deux sommets, et chaque sommet étant incident à au moins trois arêtes, on a

$$2a = \text{card}\{(s, a) \in S \times A \mid s \in a\} \geq 3(s + 1).$$

On en déduit une borne sur la complexité d'un diagramme de Voronoi d'un ensemble de points du plan :

Proposition 1. *Le nombre de sommets (resp. d'arêtes) du diagramme de Voronoi d'un ensemble S de n points du plan est borné par $2n - 5$ (resp. $3n - 6$). La complexité du diagramme de Voronoi est donc bornée par $6n - 11$.*

Notons que l'on aurait pu obtenir directement cette borne en considérant le graphe sommets-arêtes d'un diagramme de Voronoi de \mathbb{R}^2 qui est lui même planaire (voir par exemple [BKOS, 1997]). Cependant, la borne sur la complexité du diagramme de Voronoi obtenue par linéarisation se généralise au cas de la dimension supérieure grâce au théorème de la borne supérieure que l'on admet ici :

Théorème 2 (de la borne supérieure). *La complexité d'un polytope de \mathbb{R}^m ayant n facettes (ie. faces de codimension 1) est en $O(n^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor})$.*

On en déduit ainsi par le théorème de projection du diagramme de Voronoï :

Proposition 2. *La complexité du diagramme de Voronoï de n points de \mathbb{R}^m est en $O(n^{\lceil \frac{m}{2} \rceil})$.*

Triangulation de Delaunay. Notons $\tilde{S} = \{(x, \|x\|^2) \mid x \in S\}$ l'ensemble des relevés des points de S sur le parabolôïde \mathbb{P} . Soit R une partie de S . Supposons qu'il existe un hyperplan H_R tel que tous les points de \tilde{S} soient situés au-dessus de H_R , ou autrement dit tel que H_R soit un hyperplan d'appui de l'enveloppe convexe inférieure de \tilde{S} , alors la boule obtenue par projection verticale de l'intersection de \mathbb{P} et du demi-espace inférieur délimité par H_R ne contient aucun point de S (exceptés ceux de R). Réciproquement, si R admet une boule circonscrite ne contenant aucun autre point de S , cette boule est la projection de l'intersection de \mathbb{P} par un demi-espace inférieur. L'hyperplan délimitant ce demi-espace est alors un hyperplan d'appui de l'enveloppe convexe inférieure de \tilde{S} . On en déduit le théorème suivant (fig. 4) :

Théorème 3. *La triangulation de Delaunay d'un ensemble S de points de E est obtenue par projection verticale de l'enveloppe convexe inférieure des points de $\tilde{S} = \{(x, \|x\|^2) \mid x \in S\}$.*

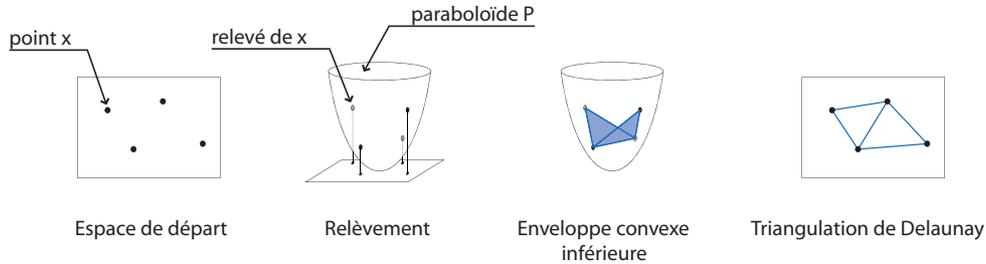


FIG. 4 – Triangulation de Delaunay par projection

Ce théorème a une conséquence importante en dimension 2. Considérons un ensemble S de points du plan et une triangulation complète T de S (c'est-à-dire une triangulation dont l'ensemble des sommets est exactement S). On associe à cette triangulation l'application $f_T : \text{conv}(S) \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

1. $\forall x \in S, f_T(x) = \|x\|^2$,
2. f_T est affine sur tout simplexe de la triangulation T .

Le graphe de cette application est une surface, et même un complexe simplicial dont la projection verticale est exactement T . On définit alors un ordre partiel sur les triangulations complètes de S correspondant à l'ordre sur les surfaces associées : si T et T' sont deux triangulations complètes de S ,

$$T \prec T' \Leftrightarrow f_T \geq f_{T'}.$$

La triangulation de Delaunay de S étant obtenue par projection de l'enveloppe convexe inférieure des relevés des points de S sur le parabolôïde \mathbb{P} , elle est maximale pour cet ordre.

Soit T une triangulation complète de S , $a = \{s_1, s_2\}$ une arête de T , t_1, t_2 les deux triangles de T qui contiennent a et s_3, s_4 leurs sommets libres respectifs. On dit que l'arête a est *flippable* si $[s_3, s_4]$ est contenu dans le quadrilatère $s_1s_3s_2s_4$ (fig. 5). Le flip de cette arête est un *flip de Delaunay* si la triangulation T' obtenue par ce flip est supérieure à la triangulation T (fig. 5). Le théorème permet d'affirmer que si l'on se donne une triangulation complète T de S et une série maximale de flips de Delaunay de cette triangulation, on obtient la triangulation de Delaunay. En particulier, une triangulation *localement Delaunay*, c'est-à-dire dont aucune arête n'est flippable, est la triangulation de Delaunay.

Cette caractérisation permet d'établir les propriétés de la triangulation de Delaunay en étudiant uniquement les propriétés d'une paire de simplexes contigus, et l'effet d'un flip sur ces simplexes. On montre par exemple que la triangulation de Delaunay est celle qui optimise la *séquence angulaire* (si T est une triangulation avec t triangles, on appelle séquence angulaire de T la suite $A_T = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{3t})$ de ses angles intérieurs rangés dans l'ordre croissant ; l'ordre lexicographique sur les séquences angulaires donne un ordre sur les triangulations, pour lequel la triangulation de Delaunay est maximale).

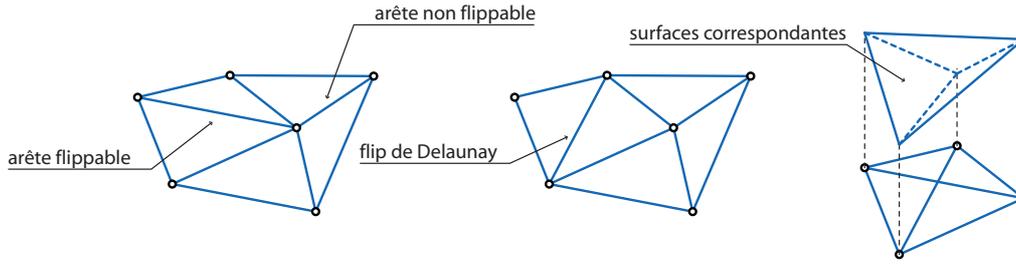


FIG. 5 – Flips dans une triangulation

1.3 Calcul dans le plan

On a donné une interprétation du diagramme de Voronoi et de la triangulation de Delaunay d'un ensemble S de points de \mathbb{R}^m comme projections de polytopes de \mathbb{R}^{m+1} déterminés par les relevés des points de S sur le paraboloïde \mathbb{P} . Il en résulte en particulier que tout algorithme permettant de calculer ces polytopes (c'est-à-dire de déterminer les sommets et les relations d'incidences entre les faces de ces polytopes) permet de calculer le diagramme de Voronoi et la triangulation de Delaunay de S . On a vu aussi que la triangulation de Delaunay peut être obtenue en partant d'une triangulation complète de S et en effectuant une chaîne maximale de flips de Delaunay. Le calcul de la triangulation de Delaunay ne nous intéressant pas pour la suite, on renvoie à [Fort, 1997] pour une présentation d'un algorithme incrémental en temps optimal $O(n \ln n)$.

Dans ce paragraphe, on présente l'algorithme de Fortune permettant de calculer le diagramme de Voronoi d'un ensemble de n points en temps optimal $O(n \ln n)$ par une technique de balayage du plan.

Le plan E étant le plan horizontal de l'espace, on appelle *cône d'influence* d'un point P de E le cône C_P d'angle $\pi/4$, d'axe vertical et de sommet P (donc d'équation $t = d(M, P)$). Le diagramme de Voronoi de S est la projection verticale sur le plan $t = 0$ de l'enveloppe convexe inférieure de l'union des cônes d'influence $\bigcup_{P \in S} C_P$ (fig. 6).

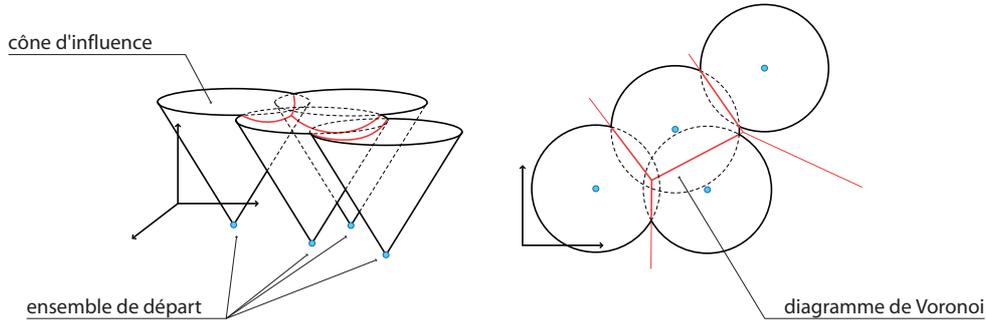


FIG. 6 – Cônes d'influence et diagramme de Voronoi

L'algorithme de balayage va calculer une projection sur le plan $t = 0$ de cette enveloppe convexe inférieure, mais au lieu de calculer la projection verticale, ce sera la projection parallèlement à la direction $(0, 1, -1)$ (fig. 7). Cette dernière projection va pouvoir être calculée par balayage, et on pourra déduire du diagramme $\text{Vor}'(S)$ ainsi obtenu le diagramme de Voronoi $\text{Vor}(S)$.

On définit donc l'application

$$\alpha : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$M = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ y + \min_{P \in S} d(M, P) \end{pmatrix}.$$

Cette application est continue. De plus, si D est une droite parallèle à l'axe (Oy) , alors

- si $D \cap S = \emptyset$, alors pour tout $P \in S$, et tous points $M_1 = (x, y_1)$ et $M_2 = (x, y_2)$ de D , avec $y_1 < y_2$, l'inégalité triangulaire donne

$$d(M_1, P) < d(M_1, M_2) + d(M_2, P).$$

Ainsi, les applications $y \mapsto y + d(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, P)$ sont toutes strictement croissantes, donc par passage au minimum, α est strictement croissante sur D , donc injective.

- si $P \in D \cap S$, α prend la même valeur sur tous les points de D situés avant P , mais reste injective après P .

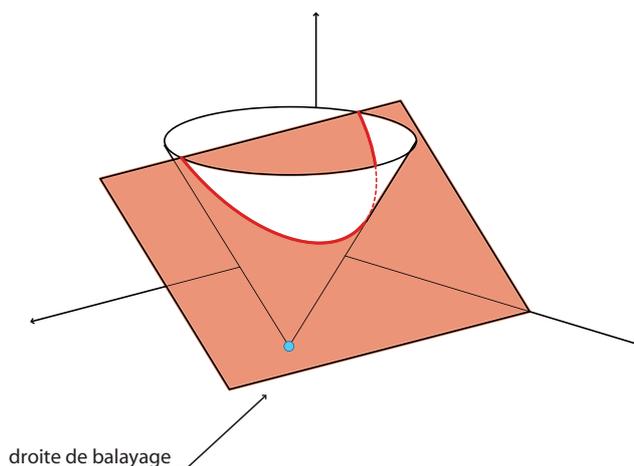


FIG. 7 – Projection parallèlement à une génératrice des cônes

On en déduit que α est injective et continue sur les arêtes du diagramme de Voronoi de S . Ainsi, α transforme le diagramme $\text{Vor}(S)$ en un diagramme $\text{Vor}'(S)$ ayant la même structure combinatoire :

1. la cellule $\text{Vor}_S(P)$ de $\text{Vor}(S)$ est envoyée sur une cellule $\text{Vor}'_S(P)$ de $\text{Vor}'(S)$,
2. l'arête $\text{Vor}_S(\{P, Q\})$ séparant deux cellules adjacentes $\text{Vor}_S(P)$ et $\text{Vor}_S(Q)$, et portée par la médiatrice de P et Q est envoyée sur une arête $\text{Vor}'_S(\{P, Q\})$ qui sépare les deux cellules $\text{Vor}'_S(P)$ et $\text{Vor}'_S(Q)$, et est portée par l'hyperbole projection (parallèlement à la direction $(0, 1, -1)$) de l'intersection des deux cônes C_P et C_Q .
3. le sommet $\text{Vor}_S(\{P, Q, R\})$ à l'intersection des trois cellules $\text{Vor}_S(P)$, $\text{Vor}_S(Q)$ et $\text{Vor}_S(R)$ est envoyé sur le sommet $\text{Vor}'_S(\{P, Q, R\})$ intersection de $\text{Vor}'_S(P)$, $\text{Vor}'_S(Q)$ et $\text{Vor}'_S(R)$.

Pour retrouver le diagramme $\text{Vor}(S)$ à partir du diagramme $\text{Vor}'(S)$, il suffit donc de suivre la structure combinatoire du second et de calculer les coordonnées des points $\text{Vor}_S(\{P, Q, R\})$.

On s'intéresse donc maintenant au calcul effectif de $\text{Vor}'(S)$. Le balayage est effectué par une droite Δ parallèle à l'axe (Ox) , qui se déplace dans le sens des ordonnées croissantes. À chaque instant, on garde en mémoire deux structures fondamentales :

1. un dictionnaire D qui représente les arêtes de $\text{Vor}'(S)$ qui intersectent Δ , triées par abscisses croissantes, et les cellules que ces arêtes séparent.
2. une queue de priorité qui représente les événements qui nécessitent une mise à jour, triés par ordonnées croissantes. Ces événements sont de deux types :
 - (a) lorsque Δ atteint un point P de S . Dans ce cas, une nouvelle région $\text{Vor}_S(P)$ est créée et deux arcs sont insérés dans D .
 - (b) lorsque Δ atteint un point d'intersection de deux arcs. Dans ce cas, les deux arcs $\text{Vor}'_S(\{P, Q\})$ et $\text{Vor}'_S(\{Q, R\})$ sont remplacés par un unique arc $\text{Vor}'_S(\{P, R\})$ et la région $\text{Vor}_S(Q)$ est supprimée de D .

Dans ces deux cas, chaque fois que deux arcs deviennent consécutifs, on teste s'ils se rencontrent, et si tel est le cas, on insère l'ordonnée de leur intersection dans la queue de priorité.

On parcourt ainsi toute la queue de priorité, et on a construit le diagramme $\text{Vor}'(S)$.

1.4 Applications

Les diagrammes de Voronoi et les triangulations de Delaunay ont de nombreuses interprétations et applications. On présente ici les exemples du problème du bureau de poste, des problèmes de croissance et des arbres couvrants minimaux. On renvoie à [Edel, 1987] pour d'autres applications.

Problème du bureau de poste. Soit S un ensemble de points dans le plan représentant les localisations des bureaux de poste dans une ville. Les habitants de cette ville ont pour habitude de se rendre au bureau de poste le plus proche de chez eux, la notion de proximité d'un bureau de poste étant mesurée par la distance euclidienne. Il est clair que la répartition des utilisateurs des bureaux de poste suit le diagramme de Voronoi de S . La connaissance des diagrammes de Voronoi permet alors de répondre à deux problèmes :

- étant donné un point, quel est le bureau de poste le plus proche. La réponse naïve (consistant à tester à chaque fois tous les points de S) requiert un temps linéaire pour chaque demande, tandis que si le calcul du diagramme de Voronoi est effectué comme prétraitement, on peut répondre en temps $O(\ln n)$.
- quelle va être la répercussion de l'installation d'un nouveau bureau de poste sur la répartition des utilisateurs.

Problème de croissance. Lorsqu'on dispose des échantillons de bactéries sur une planche nutritive, on observe une croissance centrifuge qui s'arrête lorsque deux échantillons se rejoignent. Si toutes les bactéries se développent à la même vitesse, on obtient ainsi le diagramme de Voronoi des points correspondant à l'emplacement initial des échantillons (fig. 6). On observe le même phénomène sur la carapace des tortues ou dans le cou des girafes réticulés (fig. 8).



FIG. 8 – Giraphe réticulée et tortue

Arbres couvrants minimaux. Soit S un ensemble de sommets. On dit qu'un arbre est un *arbre couvrant* pour S si l'ensemble de ses sommets est S . On appelle *arbre couvrant minimal* tout arbre couvrant dont la somme des longueurs des arêtes est minimale (parmi tous les arbres couvrants). On peut construire un arbre couvrant minimal de manière incrémentale : on initialise l'algorithme en choisissant un sommet arbitraire, puis à chaque étape, on ajoute l'arête la plus courte reliant un sommet déjà couvert à un sommet non couvert. En maintenant à chaque étape et pour chaque sommet non couvert la connaissance du sommet couvert le plus proche, on effectue cet algorithme en temps $O(n^2)$. De plus, en remarquant qu'une arête ne peut être ajoutée que si c'est une arête de la triangulation de Delaunay de S , on peut diminuer le nombre de candidats pour le nouvel arc ajouté. On obtient ainsi un algorithme de complexité $O(n \ln n)$.

2 Revêtements

Dans cette partie, on présente les revêtements de l'espace euclidien qui nous intéressent ensuite. Ces revêtements ont été initialement introduits pour calculer l'enveloppe convexe [HaPo, 2004] et une pseudo-triangulation initiale [HaPo, 2006] d'un ensemble de disques. Nous présentons ici (§ 2.2) leur utilisation dans deux situations :

- le calcul d'enveloppe convexe par la marche de Jarvis sans donnée initiale d'une droite d'appui de l'enveloppe convexe,
- l'étude des problèmes géométriques (enveloppe convexe, diagramme de Voronoi et triangulation de Delaunay) en présence d'obstacles.

2.1 Définition

On fixe deux entiers non nuls m et ν . Soit \mathbb{R}^m l'espace euclidien orienté de dimension m .

On considère un complexe polyédral pur de codimension 1 plongé dans \mathbb{R}^m que l'on note C . On appelle *facettes* les faces de dimension $m - 1$ de C . On associe à chaque facette f de C une permutation π_f de $\{1, \dots, \nu\}$ et une orientation transverse u_f .

On découpe l'espace \mathbb{R}^m euclidien suivant les facettes du complexe C et on note \mathbb{X} le résultat obtenu et $q : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}^m$ la projection canonique. Pour chaque facette f de C , on appelle *relevé droit de f* (resp. *relevé gauche de f*) le relevé de f pointé par le vecteur u_f (resp. $-u_f$). On considère ensuite ν copies $(\mathbb{X}_i)_{i \in \{1, \dots, \nu\}}$ de \mathbb{X} . On note \mathbb{E} l'espace obtenu en recolant le relevé droit dans \mathbb{X}_i de chaque facette f de C avec le relevé gauche dans $\mathbb{X}_{\pi_f(i)}$ de f via l'application $q_{\pi_f(i)}^{-1} \circ q_i$ (fig. 9). On note $p : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}^m$ la projection canonique.

L'espace \mathbb{E} est muni de la structure plate avec singularités : on remonte la structure euclidienne de \mathbb{R}^m dans \mathbb{E} . Une *droite* (resp. *demi-droite*, resp. *segment*) de \mathbb{E} est une partie de \mathbb{E} homéomorphe à une droite (resp. demi-droite, resp. segment) de \mathbb{R}^m via la projection p . En particulier, on dit qu'une partie A de \mathbb{E} est *convexe* si tout segment dont les extrémités sont contenues dans A est inclus dans A , et on définit l'*enveloppe convexe* d'un ensemble A comme le plus petit convexe (au sens de l'inclusion) contenant A .

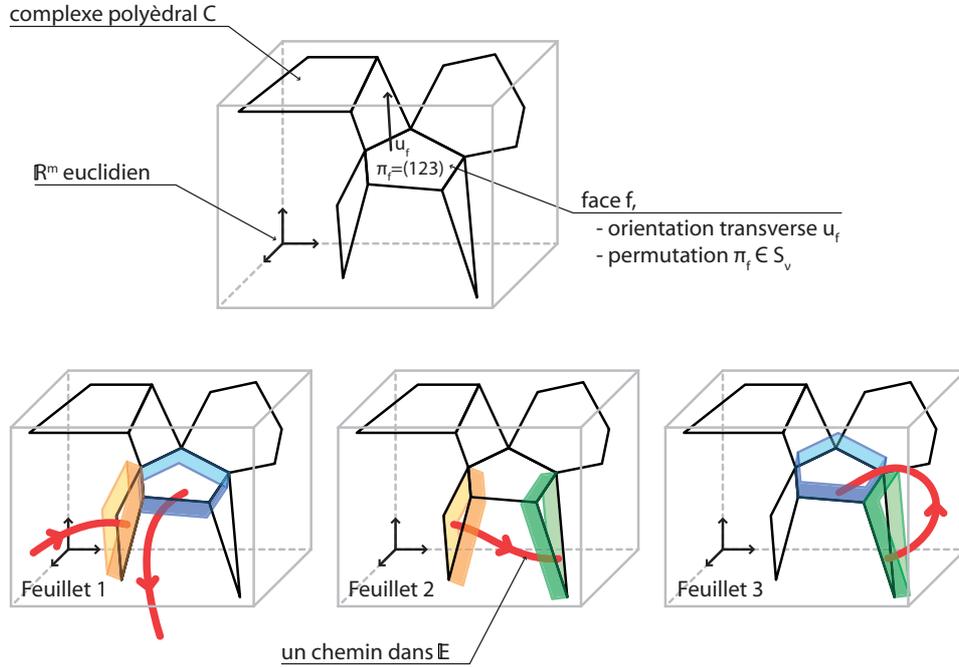


FIG. 9 – Revêtement de \mathbb{R}^m

2.2 Motivations

Marche de Jarvis. Soit S un ensemble de points de \mathbb{R}^2 en position générale. On suppose donnée une droite d'appui de l'enveloppe convexe de S en un point $p \in S$. L'algorithme de la marche de Jarvis consiste à trouver le point q suivant p sur le bord de l'enveloppe convexe de S (c'est le point de S dont l'angle avec la droite d'appui de l'enveloppe convexe de S en p est minimal) puis à recommencer jusqu'à ce que l'on retombe sur le point p . On obtient alors un cycle d'arêtes qui forme le bord de l'enveloppe convexe de S (fig. 10) en temps $O(nh)$, où n désigne le nombre de points de S et h le nombre de sommets de l'enveloppe convexe de S .

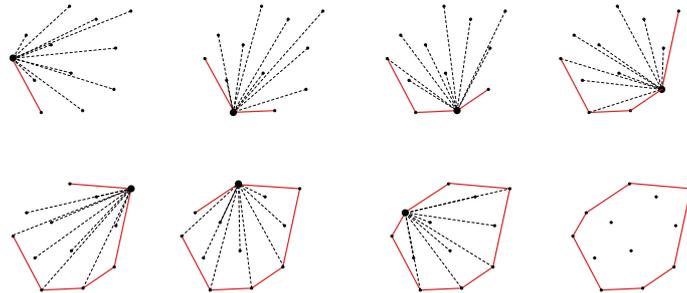


FIG. 10 – Étapes successives de la marche de Jarvis dans le plan

Cependant, on ne peut pas toujours supposer connaître une droite d'appui initiale de l'enveloppe convexe de S (par exemple lorsque le seul prédicat autorisé est le chirotope des points). Ce problème d'initialisation de l'algorithme motive l'introduction d'un revêtement du plan : on choisit arbitrairement un point p de S et une demi-droite Δ issue de p , et on construit le revêtement obtenu par découpage, copie et recollages le long du complexe polyédral $C = (m, \Delta)$, pour lequel on a associé à Δ la permutation (12) et une orientation arbitraire. On relève alors les points de S situés à gauche de Δ sur les deux feuillets, et ceux situés à droite sur le premier feuillet uniquement (fig. 11). On obtient une configuration \tilde{S} de points dans le revêtement pour laquelle le point p est un sommet de l'enveloppe convexe. On

a ainsi construit une configuration dans laquelle on connaît une droite d'appui initiale. On peut alors effectuer une marche de Jarvis dans le revêtement pour obtenir le bord de l'enveloppe convexe de \tilde{S} . On en déduit ensuite le bord de l'enveloppe convexe de l'ensemble S initial (c'est la projection de la partie du bord de l'enveloppe convexe de \tilde{S} située entre deux relevés d'un même point).

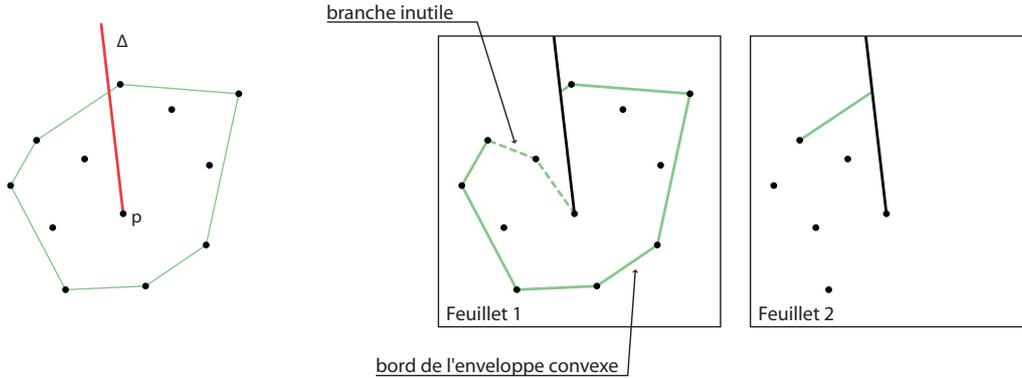


FIG. 11 – Revêtement rendant m extrémal

Problèmes contraints. On considère l'espace \mathbb{R}^m euclidien dans lequel est plongé un complexe polyédral pur C de codimension 1 que l'on appelle *complexe des contraintes* et que l'on s'interdit de traverser. Étant donné un ensemble de points S de cet espace, on peut s'intéresser à différents objets géométriques qui lui sont associés :

1. ENVELOPPE CONVEXE - la plus petite partie convexe (au sens de la visibilité) contenant S .
2. DIAGRAMME DE VORONOI - le diagramme de Voronoi de S au sens de la longueur visible

$$lv(x, y) = \begin{cases} d(x, y) & \text{si } x \text{ et } y \text{ sont visibles} \\ \infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

3. TRIANGULATION DE DELAUNAY - la triangulation de Delaunay de S au sens de la longueur visible.

Ces trois objets géométriques en présence de contraintes peuvent être interprétés par la construction d'un revêtement de l'espace \mathbb{R}^m . On note f_1, \dots, f_ν les facettes du complexe des contraintes, et on associe à la face f_i une orientation transverse arbitraire et la permutation $\pi_{f_i} = (1, i + 1)$. On construit alors le revêtement de \mathbb{R}^m à $\nu + 1$ feuillets associé au complexe C , et on relève tous les objets que l'on veut étudier sur le premier feuillet \mathbb{X}_1 . Intuitivement, si l'on assimile la présence de contraintes à l'existence de murs, cette opération revient à remplacer les murs par des escaliers donnant sur d'autres étages : comme tout se passe au premier niveau, passer dans un niveau supérieur revient à se déplacer dans un univers parallèle.

Ainsi, l'étude de ces objets dans les revêtements et l'élaboration d'algorithmes pour les déterminer permet en particulier de traiter les problèmes géométriques en présence d'obstacles : on aura remplacé les obstacles par des points de ramification.

3 Diagrammes de Voronoi et triangulation de Delaunay dans les revêtements

Dans cette partie, on s'intéresse au diagramme de Voronoi et à la triangulation de Delaunay d'un ensemble de points dans un revêtement obtenu par découpage, copie et recollements le long d'un complexe polyédral. Les méthodes utilisées ici sont très similaires avec celles de la première partie : on veut généraliser les résultats connus dans le cadre d'un espace euclidien. On montrera cependant les limites de la généralisation dans ces revêtements.

3.1 Définitions

Soit \mathbb{E} un revêtement obtenu par découpage, copie et recollements le long d'un complexe polyédral C , et p la projection associée. Dans ce revêtement, la notion d'éloignement est mesurée par la longueur visible

$$lv(x, y) = \begin{cases} d(p(x), p(y)) & \text{si } x \text{ et } y \text{ sont visibles} \\ \infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Notons que cette fonction ne définit pas une distance puisqu'elle ne vérifie pas l'inégalité triangulaire. On peut cependant définir le lv -diagramme de Voronoi et la lv -triangulation de Delaunay de la même façon que dans l'espace \mathbb{R}^m : soit S un ensemble de points de \mathbb{E} . On définit la fonction $\phi_S^{lv} : E \mapsto \wp(S)$ qui à un point $x \in E$ associe $\{y \in S \mid lv(x, y) = \min_{z \in S} lv(x, z)\}$, c'est-à-dire l'ensemble de ses plus proches voisins dans S au sens de la longueur visible.

Définition 3 (*lv*-diagramme de Voronoi). *Pour toute partie R de S , on appelle lv -cellule de Voronoi de R (dans S) l'image réciproque de R par ϕ_S^{lv} , que l'on note $\text{Vor}_S^{lv}(R)$.*

On appelle lv -diagramme de Voronoi de S l'ensemble $\text{Vor}^{lv}(S)$ des cellules de Voronoi non vides de parties de S .

Notons que dans les revêtements, il peut arriver qu'un point n'ait aucun plus proche voisin (si tous les points de S sont cachés par des contraintes). On peut donc avoir des lv -cellules correspondant à l'ensemble vide. Par ailleurs, la lv -cellule de Voronoi d'une partie R de S n'est plus nécessairement connexe.

Définition 4 (*lv*-triangulation de Delaunay). *Pour toute partie R de S telle qu'il existe une lv -boule circonscrite à R qui ne contient aucun site de S autre que les points de R , on définit la lv -face de Delaunay $\text{Del}_S^{lv}(R)$ comme l'enveloppe convexe de R .*

On appelle lv -triangulation de Delaunay de S l'ensemble $\text{Del}^{lv}(S)$ des lv -faces de Delaunay de S .

Notons que la lv -triangulation de Delaunay n'existe pas toujours comme c'était le cas dans l'espace euclidien \mathbb{R}^m . En effet, à partir de la dimension 3, il existe des configurations de contraintes qui ne sont pas triangulables (donc en particulier, il existe des ensembles de points dans certains revêtements qui ne sont pas triangulables). Citons l'exemple du polyèdre de Schönhart obtenu en faisant tourner légèrement l'une des bases d'un prisme à base triangulaire et en imposant les contraintes internes obtenues (fig. 12).

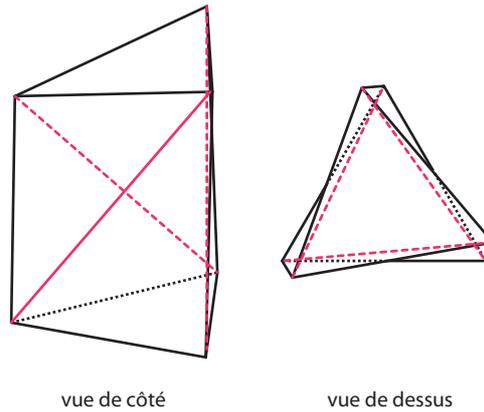


FIG. 12 – Polyèdre de Schönhart

Dans ce qui suit, nous supposons donc toujours l'existence de la lv -triangulation de Delaunay, pour pouvoir en étudier les propriétés.

Notons encore que le lv -diagramme de Voronoi et la lv -triangulation de Delaunay de S , même quand elle existe, ne sont plus des complexes cellulaires duaux l'un de l'autre.

3.2 Linéarisation

L'espace $\tilde{\mathbb{E}}$. On rappelle que l'on s'est donné un complexe polyédral pur C de codimension 1 dans \mathbb{R}^m dont on a muni chaque facette f d'une orientation transverse u_f et d'une permutation π_f de $\{1, \dots, \nu\}$, et que l'on a construit un revêtement $p : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}^m$ par découpage, copie et recollement le long du complexe polyédral C .

On considère maintenant le produit cartésien $\mathbb{E} \times \mathbb{R}$. On note q la projection canonique de $\mathbb{E} \times \mathbb{R}$ sur \mathbb{E} .

En fait, ce produit se construit comme un revêtement de \mathbb{R}^{m+1} de la manière suivante. On considère l'espace \mathbb{R}^{m+1} euclidien, et on note $\tilde{q} : \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}^d$ la projection canonique. L'ensemble

$$\tilde{C} = \{ \tilde{f} = f \times \mathbb{R} \mid f \in C \}$$

est un complexe polyédral pur de dimension m de \mathbb{R}^{m+1} . On munit chaque facette $\tilde{f} = f \times \mathbb{R}$ de l'orientation transverse $u_{\tilde{f}} = (u_f, 0)$ et de la permutation $\pi_{\tilde{f}} = \pi_f$. On note $\tilde{\mathbb{E}}$ l'espace obtenu par découpage, copie et recollements de \mathbb{R}^{m+1} le long de \tilde{C} et $\tilde{p} : \tilde{\mathbb{E}} \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$ le revêtement correspondant. L'espace $\tilde{\mathbb{E}}$ est alors le produit $\mathbb{E} \times \mathbb{R}$.

Pour résumer, on a le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathbb{E}} & \xrightarrow{\tilde{p}} & \mathbb{R}^{m+1} \\ q \downarrow & & \downarrow \tilde{q} \\ \mathbb{E} & \xrightarrow{p} & \mathbb{R}^m \end{array}$$

L'interprétation du produit $\mathbb{E} \times \mathbb{R}$ par un revêtement $\tilde{\mathbb{E}}$ construit par découpage, copie et recollages permet de ne pas redéfinir la convexité dans $\mathbb{E} \times \mathbb{R}$.

Paraboloïde dans $\tilde{\mathbb{E}}$. On se place dans l'espace $\tilde{\mathbb{E}} = \mathbb{E} \times \mathbb{R}$ et on considère le paraboloïde P de \mathbb{R}^{m+1} d'équation

$$P : x_{m+1} = \sum_{i=1}^m x_i^2.$$

On appellera *paraboloïde* de \mathbb{E} son image réciproque \mathbb{P} par \tilde{p}

***lv*-diagramme de Voronoi.** Comme dans les espaces euclidiens, le *lv*-diagramme de Voronoi d'un ensemble de points du revêtement va s'interpréter comme projection d'une intersection de demi-espaces en dimension supérieure. Donnons d'abord la définition des demi-espaces utilisés dans les revêtements.

Définition 5 (Demi-espace supérieur tangent associé à un point). *Soit $x \in \mathbb{E}$. On appelle relevé de x sur le paraboloïde \mathbb{P} le point $\tilde{x} = (x, \|p(x)\|^2) = q^{-1}(x) \cap \mathbb{P}$. On appelle demi-espace supérieur tangent associé à x la partie*

$$\mathbb{D}_x = \tilde{p}^{-1}(D_{\tilde{p}(\tilde{x})}) \cap \text{vis}(\tilde{x}),$$

où D_y désigne le demi-espace supérieur de \mathbb{R}^{m+1} délimité par l'hyperplan tangent à P en y (pour $y \in P$) et $\text{vis}(\tilde{x})$ désigne l'ensemble des points de $\tilde{\mathbb{E}}$ visibles par \tilde{x} .

On obtient alors le théorème suivant, similaire au théorème 1 (fig. 13).

Théorème 4. *Le *lv*-diagramme de Voronoi d'un ensemble de points S de \mathbb{E} est la projection de l'intersection des demi-espaces supérieurs tangents associés aux points de S .*

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{E}$.

Si x n'est visible d'aucun point de S , alors il n'est dans aucune *lv*-cellule de Voronoi de S . Or, $q^{-1}(x)$ n'est visible d'aucun relevé \tilde{y} d'un point de S , donc $q^{-1}(x) \cap (\bigcap_{y \in S} \mathbb{D}_y) = \emptyset$, donc la projection de l'intersection des demi-espaces supérieurs tangents associés aux points de S ne rencontre pas x .

Si $\text{vis}(x) \cap S \neq \emptyset$, alors

$$\begin{aligned} \inf\{lv(x, y) \mid y \in S\} &= \inf\{lv(x, y) \mid y \in \text{vis}(x) \cap S\} \\ &= \inf\{d(p(x), p(y)) \mid y \in \text{vis}(x) \cap S\}. \end{aligned}$$

Or dans \mathbb{R}^m , le point $p(y)$ qui réalise cette borne inférieure est celui tel que l'hyperplan tangent à P en son relevé est au-dessus des hyperplans tangents à P en les relevés de tous les autres points. Par conséquent, le demi-espace supérieur tangent \mathbb{D}_y associé à y est au-dessus de tous les autres demi-espaces supérieurs tangents associés aux points de S , et la *lv*-cellule de Voronoi qui contient x est bien la projection de la facette de l'intersection des demi-espaces supérieurs tangents associés aux points de S qui se trouve au-dessus de x . \square

Notons que contrairement au cas de l'espace euclidien, nous n'avons pas ici de borne sur la complexité l'intersection des demi-espaces supérieurs tangents au paraboloïde. On n'obtient donc pas de borne sur la complexité d'un *lv*-diagramme de Voronoi dans le revêtement. C'est une question qu'il reste à traiter.

***lv*-triangulation de Delaunay.** On suppose ici que l'ensemble de départ S contient tous les points de ramification. On obtient alors le théorème suivant, similaire au théorème 3 (fig. 14).

Théorème 5. *La *lv*-triangulation de Delaunay d'un ensemble de points $S \subset \mathbb{E}$ (lorsqu'elle existe) est la projection de l'enveloppe convexe inférieure des relevés des points de S .*

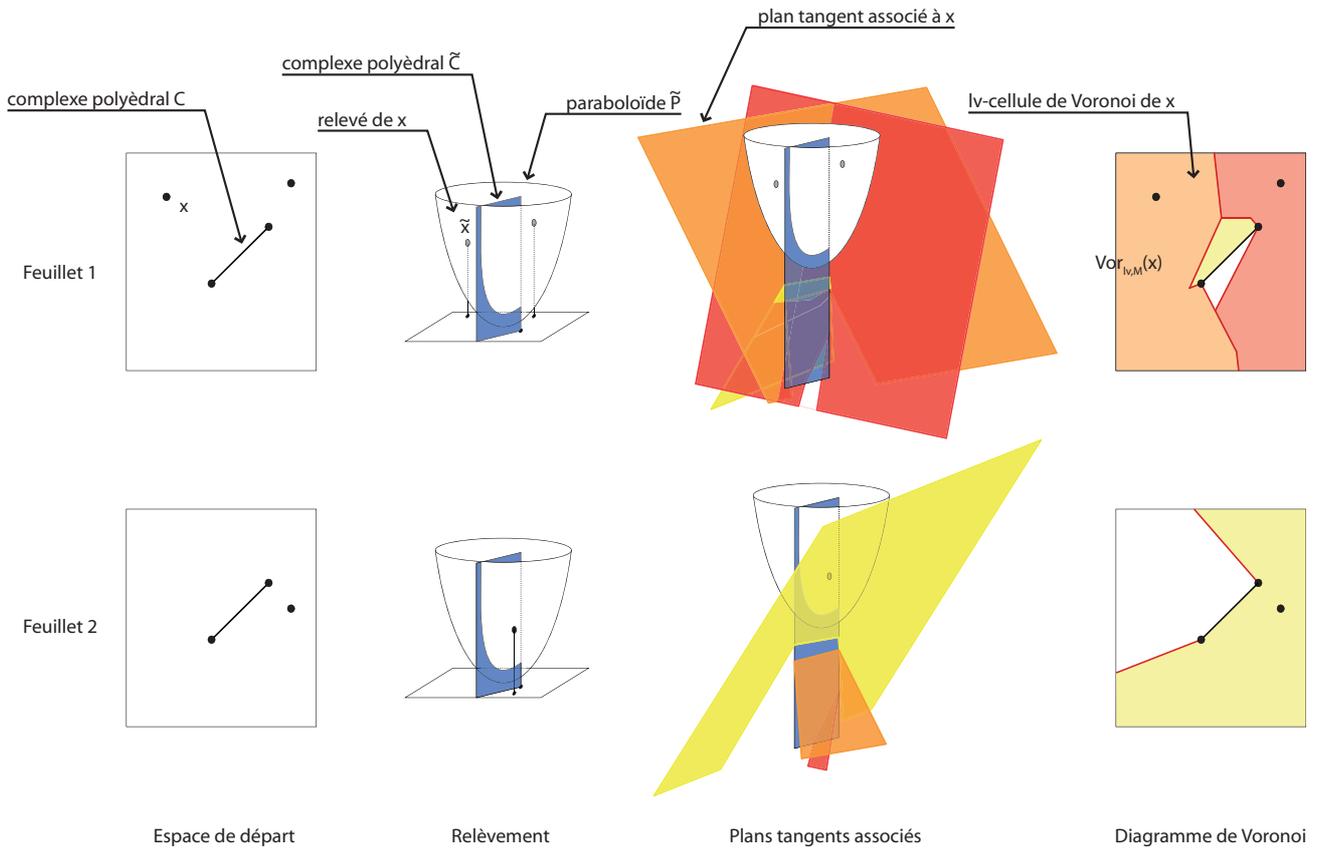


FIG. 13 – Diagramme de Voronoi par relèvement sur le paraboloid

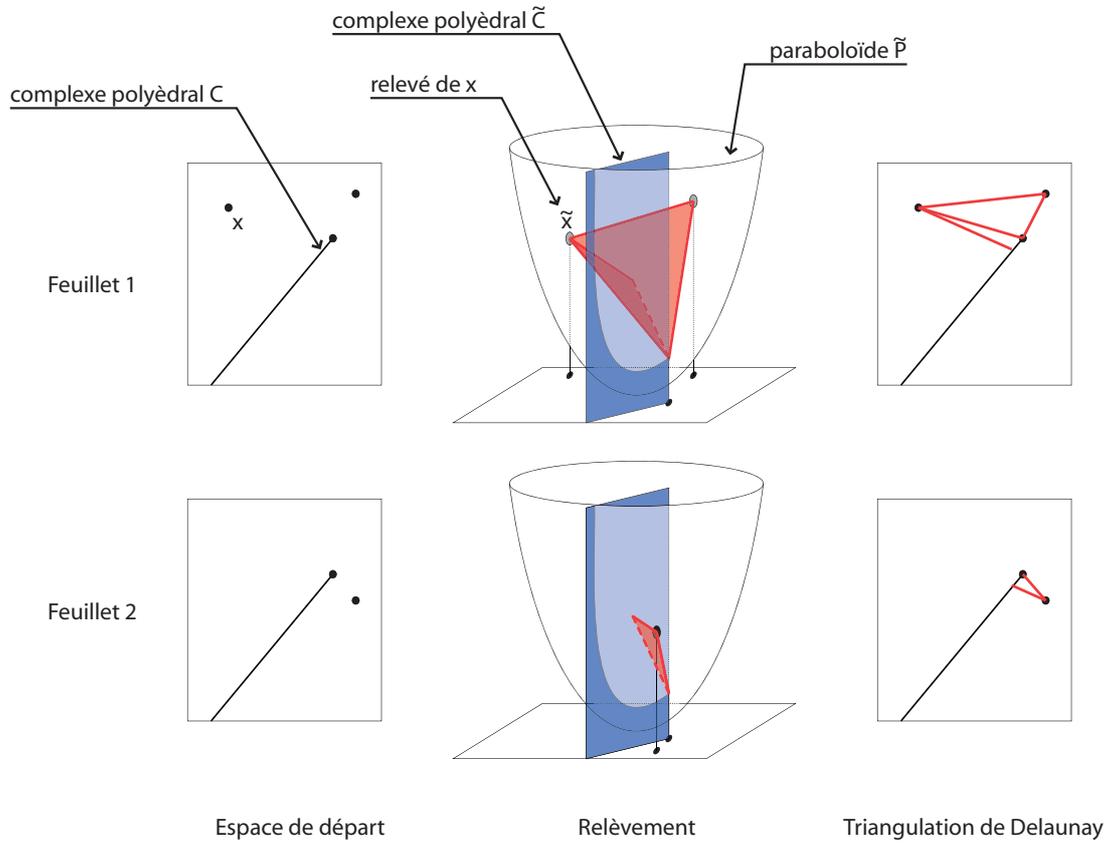


FIG. 14 – Triangulation de Delaunay par relèvement sur le paraboloid

Démonstration. Les ensembles $\mathbb{A} = \text{Del}^{lv}(S)$ et $\mathbb{B} = \{q(f) \mid f \text{ face de } \text{conv}^-(\tilde{S})\}$ sont deux complexes simpliciaux dont le domaine est l'enveloppe convexe de S . Il suffit donc de vérifier qu'un simplexe de \mathbb{B} est un simplexe de \mathbb{A} . Soit s un simplexe de l'enveloppe convexe inférieure de \tilde{S} et $\text{Vert}(s)$ l'ensemble de ses sommets. Soit $\tilde{g} \in \mathbb{R}^{m+1}$ le centre du cercle circonscrit à l'ensemble $\tilde{p}(\text{Vert}(s))$ et r son rayon. On note $\tilde{G} \in \tilde{\mathbb{E}}$ un point de $\tilde{p}^{-1}(\tilde{g}) \cap \bigcap_{\tilde{x} \in \text{Vert}(s)} \text{vis}(\tilde{x})$, $g = \tilde{q}(\tilde{g})$ et $G = q(\tilde{G}) \in \mathbb{E}$. Résumons ces notations sur le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathbb{E}} & \xrightarrow{\tilde{p}} & \mathbb{R}^{m+1} \\ \tilde{G} & & \tilde{g} \\ q \downarrow & & \downarrow \tilde{q} \\ \mathbb{E} & \xrightarrow{p} & \mathbb{R}^m \\ G & & g \end{array}$$

Soit $x \in \tilde{S}$ et \tilde{x} son relevé sur \mathbb{P} . Si x est un point de la lv -boule (de \mathbb{E}) de centre G et de rayon r , alors $p(x)$ est dans la boule (de \mathbb{R}^m) de centre g et de rayon r . Il en résulte classiquement que $q^{-1}(p(x)) \cap P$ est situé en-dessous de l'hyperplan de \mathbb{R}^{m+1} passant par les points $\tilde{p}(z)$, z sommet de s . Mais $\tilde{q}^{-1}(p(x)) = \{\tilde{p}(\tilde{x})\}$, donc pour ne pas oublier le point \tilde{x} , le simplexe s ne peut pas être un simplexe de l'enveloppe convexe inférieure de \tilde{S} .

Par conséquent, la sphère de centre G et de rayon r est une lv -sphère de Delaunay de $q(s)$, donc $q(s) \in \text{Del}_{lv}(M)$ ce qui montre le résultat. \square

Notons que comme dans le cas du plan euclidien, on peut définir un ordre sur les triangulations complètes de S , correspondant à l'ordre sur les surfaces associées aux triangulations. On montre ainsi de la même manière que dans le cas du plan que la triangulation de Delaunay est caractérisée par une condition locale : c'est la triangulation dont aucune arête n'admet un flip de Delaunay.

3.3 Cônes d'influence et algorithme de balayage

On propose ici une généralisation de l'algorithme de calcul du diagramme de Voronoi par balayage de Fortune.

Pour cela, on donne d'abord une généralisation de la notion de cône d'influence d'un point du plan. On rappelle que l'on a appelé cône d'influence d'un point P de \mathbb{R}^m le cône C_P de \mathbb{R}^{m+1} d'angle $\pi/4$, de direction verticale et de sommet P .

Définition 6 (*lv*-cône d'influence). Soit P un point du revêtement \mathbb{E} . On appelle *lv*-cône d'influence de P la partie de $\tilde{\mathbb{E}}$ définie par

$$\tilde{C}_P = \tilde{p}^{-1}(C_{\tilde{p}(P)}) \cap \text{vis}(P).$$

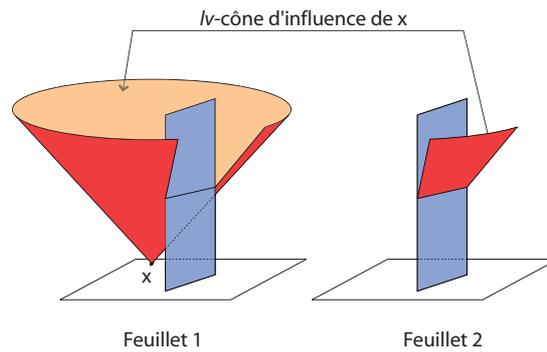


FIG. 15 – *lv*-cône d'influence dans un revêtement

Le *lv*-diagramme de Voronoi d'un ensemble S de points dans le revêtement est alors la projection verticale de l'enveloppe convexe inférieure de l'union des *lv*-cônes d'influence des points de S . De la même manière que dans le cas du plan, on peut alors mettre en place un algorithme de calcul du *lv*-diagramme de Voronoi d'un revêtement du plan par balayage. On va calculer la projection de l'enveloppe convexe inférieure des *lv*-cônes d'influence des points de S parallèlement à la direction $(0, 1, -1)$ en balayant par un revêtement de droite (on balaie \mathbb{R}^m par une droite δ et \mathbb{E} par $\Delta = \tilde{p}^{-1}(\delta)$).

Certains points restent à vérifier :

- le lv -diagramme de Voronoi de S et le lv -diagramme obtenu par projection parallèlement à la direction $(0, 1, -1)$ doivent avoir la même structure combinatoire de sorte qu'il puisse être possible d'obtenir le lv -diagramme de Voronoi à partir de cette projection.
- la projection de l'enveloppe convexe inférieure des lv -cônes d'influence des points de S parallèlement à la direction $(0, 1, -1)$ peut s'obtenir par balayage. Ici, les opérations élémentaires du balayage seront non seulement la rencontre des points de S et l'intersection de deux arcs en cours, mais aussi la rencontre de points de ramification.

Par ailleurs, il reste à étudier la complexité d'un tel algorithme. Cette question est à rapprocher de la question concernant la complexité combinatoire d'un lv -diagramme de Voronoi dans un revêtement.

Conclusion

Les diagrammes de Voronoi et les triangulations de Delaunay sont des objets largement étudiés en géométrie combinatoire et algorithmique. On a vu que certaines de leurs propriétés peuvent être étendues au cas des revêtements ramifiés de l'espace euclidien et on a soulevé certaines questions qui restent à mettre au point : complexité du lv -diagramme de Voronoi, algorithme de balayage, étude des applications aux problèmes contraints,...

La démarche que l'on a présentée a été le fil directeur de mon travail de master : étudier de manière systématique la généralisation des résultats classiques de géométrie combinatoire et algorithmique au cas des revêtements. Dans cette optique, d'autres questions sont encore à traiter : calcul efficace de l'enveloppe convexe dans les revêtements (en utilisant uniquement le prédicat du chirotope), énumération des triangulations,...

Bibliographie

[BKOS, 1997] M. DE BERG, M. VAN KREVELD, M. OVERMARS & O. SCHWARZKOPF, *Computational Geometry, Algorithms and Applications*, Springer, 1997.

[Edel, 1987] H. EDELSBRUNNER, *Algorithms in Combinatorial Geometry*, Springer-Verlag, 1987.

[Fort, 1997] S. FORTUNE, *Voronoi diagrams and Delaunay Triangulation*, in J.E. GOODMAN & J. O'ROURKE, *Handbook of Discrete and Computational Geometry*, CRC, 1997.

[HaPo, 2004] L. HABERT & M. POCCHIOLA, Computing the Convex Hull of Disks Using only their Chirotope, *Abstracts 10th European Workshop Computational Geometry*, p. 111-114, 2004.

[HaPo, 2006] L. HABERT & M. POCCHIOLA, Computing Pseudo-Triangulation via Branched Coverings of the Euclidean Plane, *en préparation*, 2006.

[Klei, 1989] R. KLEIN, *Concrete and Abstract Voronoi Diagrams*, Lecture Notes in Computer Science, Springer-Verlag, 1989.

[YvBo, 1995] M. YVINEC & J.-D. BOISSONNAT, *Géométrie algorithmique*, Ediscience International, 1995.