Introduction au domaine de recherche : variétés presque rationnelles et leurs points rationnels

Alena Pirutka
(sous la direction de Jean-Louis Colliot-Thélène)

17 mars 2009

Dans ce texte je voudrais introduire les notions de variétés rationnellement connexes et de R-équivalence, annoncer quelques résultats connus ainsi que quelques conjectures et donner un exemple de méthode utilisée pour obtenir des résultats à ce sujet.

1 Introduction

Une des questions fondamentales en arithmétique est la suivante :

> *Étant donné un système d'équations polynomiales sur un corps k, décrire ses solutions, et en particulier déterminer s'il en existe, sur le corps k lui-même ou sur des extensions de k.* (*)

En particulier, on s'intéresse aux solutions sur $\mathbb{Q}$ d'un système d'équations à coefficients rationnels. Pour étudier cette question, on va utiliser le langage des variétés algébriques[1] :

Définition 1.1. Soit k un corps. On appelle *variété algébrique affine* sur k une partie de $\mathbb{A}^n_{\bar{k}} = \bar{k}^n$ définie par des équations polynomiales, i.e. l'ensemble

$$V(f_1, \ldots, f_m) \stackrel{\text{def}}{=} \{(x_1, \ldots, x_n) \in \bar{k}^n \,|\, f_i(x_1, \ldots, x_n) = 0,\, i = 1, \ldots m\}$$

pour $f_1, \ldots, f_m \in k[x_1, \ldots, x_n]$.

Une *variété algébrique projective* sur k est une partie de $\mathbb{P}^n_{\bar{k}}$ définie par des équations polynômiales homogènes :

$$V_+(g_1, \ldots, g_s) \stackrel{\text{def}}{=} \{(x_0 : x_1 : \ldots : x_n) \in \mathbb{P}^n(\bar{k}) \,|\, g_i(x_0, x_1, \ldots, x_n) = 0,\, i = 1, \ldots s\}$$

pour $g_1, \ldots, g_s \in k[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ homogènes.

Reformulons la question (*) avec les notations précédentes. Si X une variété algébrique affine ou projective sur k et K/k une extension de corps, on note $X(K)$ la partie

[1] On idèntifie ici une k-variété X avec l'ensemble de ses points $X(\bar{k})$. Cela n'est pas tout à fait correct, par exemple, on ne distingue pas ainsi les variétés définies par l'équation $f(x) = 0$ et l'équation $f(x)^2 = 0$. Néanmoins l'approche présentée nous suffira pour ce texte.

de $\mathbb{A}^n_K$ (resp. $\mathbb{P}^n_K$) qui correspond aux points de X à coordonnées dans K. On appelle les éléments de $X(k)$ *les points rationnels* de X. Le problème est donc de décrire $X(k)$ ou, autrement dit, de décrire les points rationnels de X, et en particulier de savoir si $X(k)$ est non vide.

Introduisons quelques autres notions. On peut munir les variétés algébriques affines (resp. projectives) d'une topologie que l'on appelle *la topologie de Zariski*. C'est la topologie induite par la topologie de Zariski sur $\mathbb{A}^n_{\bar{k}}$ (resp. $\mathbb{P}^n_{\bar{k}}$). Cette dernière est la topologie dont les parties fermés sont les variétés algébriques affines $V(f_1, \dots, f_m)$ pour $f_1, \dots, f_m \in k[x_1, \dots, x_n]$. (resp. $V_+(g_1, \dots, g_s)$). Les ouverts qui sont des variétés affines forment une base d'ouverts pour cette topologie. Une variété *quasi-projective* est un ouvert d'une variété projective.

Les morphismes de variétés algébriques affines (resp. projectives) sont les applications données (resp. données localement) par des fonctions polynomiales (resp. polynomiales homogènes) en des coordonnées. Si $f : X \to Y$ est un morphisme de variétés et $y \in Y(\bar{k})$ est un point alors on peut voir la fibre X_y comme une variété sur $\bar{k}$. En effet on ajoute les équations qui signifient que la valeur de f est égale à y aux équations définissant X. Si $y \in Y(K)$ où K/k est une extension de corps, alors X_y est une variété définie sur K.

Dans la suite, on va considérer des variétés *irréductibles*, i.e. qui ne sont pas réunions de deux fermés stricts non vides. Dans le cas contraire, il existe une décomposition $X = \bigcup Y_i$ avec Y_i fermés irréductibles de X tels que $Y_i \nsubseteq Y_j$ si $i \neq j$. On appelle les Y_i les *composantes irréductibles* de X. La *dimension* $\dim X$ de la variété X est la longueur maximale n d'une chaine $U_0 \subsetneq U_1 \subsetneq \dots \subsetneq U_n$ de fermés irréductibles de X. On dit que la variété algébrique affine (resp. projective) X définie par les équations $f_1, \dots, f_m \in k[x_1, \dots, x_n]$ (resp. par les équations homogènes $f_1, \dots, f_m \in k[x_0, x_1, \dots, x_n]$) sur un corps k est *lisse* au point $P \in X$ si

$$\operatorname{rang} \|(df_i/\partial x_j)(P)\| = n - \dim X,$$

où l'on voit la matrice $\|(df_i/\partial x_j)(P)\|$ comme une matrice à coefficients dans $\bar{k}$. On dit que X est *lisse* si elle est lisse en tout point $P \in X$.

2 Exemples

Considérons quelques exemples.

1. Corps finis

Soit k un corps fini. Soit $f \in k[x_0, x_1, \dots, x_n]$ un polynôme homogène. Supposons que $d = \deg f \leq n$. Soit $X = V_+(f)$ une hypersurface de l'espace projectif.

Théorème 2.1 (Chevalley-Warning)**.** *L'ensemble des points rationnels de X est non vide. Plus précisément,*

$$\#X(k) \equiv 1 \bmod p,$$

où p est la caractéristique de k.

Démonstration. Posons

$$N = \#\{(x_0, x_1, \dots, x_n) \in k^{n+1},\ f(x_0, x_1, \dots, x_n) = 0\}.$$

On a $\#X(k) = \frac{N-1}{q-1}$, où q est le cardinal de k. Il suffit de voir donc que $N \equiv 0 \bmod p$.

Posons $F = 1 - f^{q-1}$. Alors $f(\underline{x}) = 0$ ssi $F(\underline{x}) = 0$ et $f(\underline{x}) \neq 0$ ssi $F(\underline{x}) = 1$ pour $\underline{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_n) \in k^{n+1}$. Écrivons $F(x_0, \ldots, x_n) = \sum_i c_i x_0^{\alpha_{i,0}} \ldots x_n^{\alpha_{i,n}}$. On obtient

$$N \equiv \sum_{\underline{x} \in k^{n+1}} F(\underline{x}) \equiv \sum_i \sum_{(x_0, x_1, \ldots, x_n) \in k^{n+1}} c_i x_0^{\alpha_{i,0}} \ldots x_n^{\alpha_{i,n}} \bmod p.$$

Cela implique que $N \equiv 0 \bmod p$. En effet,

$$\sum_{(x_0, x_1, \ldots, x_n) \in k^{n+1}} x_0^{\alpha_{i,0}} \ldots x_n^{\alpha_{i,n}} \equiv 0 \bmod p \text{ si } \min_j \alpha_{i,j} < q-1,$$

et on a $\alpha_{i,0} + \cdots + \alpha_{i,n} \leq d(q-1) < (n+1)(q-1)$, ce qui implique que $\min_j \alpha_{i,j} < q-1$. $\square$

Ce théorème vaut aussi pour des corps suivants :

Théorème 2.2 (Tsen)**.** *Soit k une extension de type fini de degré de transcendance 1 d'un corps algébriquement clos. Alors toute hypersurface de $\mathbb{P}^n_k$ définie sur k de degré au plus n admet un point rationnel.*

2. Le cas des courbes

Comme autre exemple, étudions les $\mathbb{Q}$-points d'une conique lisse plane. Considérons l'équation :

$$y^2 = ax^2 + bx + c,$$

où $b^2 - 4ac \neq 0$.

Remarquons que l'équation $y^2 = ax^2 + bx + c$ peut ne pas avoir de solutions rationnelles. Par exemple, $y^2 = -x^2 - 1$ n'a pas de solutions, même sur $\mathbb{R}$; $y^2 = -x^2 + 3$ possède des solutions réelles, mais pas rationnelles, ce que l'on voit en réduisant modulo 3. Néanmoins s'il existe une solution rationnelle, il en existe une infinité. Considérons par exemple l'équation $y^2 + 2x^2 = 3$. Elle possède une solution rationnelle $(1, 1)$. Soit L_t la droite passant par des points $(1, 1)$ et $(1 + t, 0)$. En faisant les calculs, on voit que L_t intersecte l'ellipse $y^2 + 2x^2 = 3$ en 2 points, dont le premier est $(1, 1)$. Les coordonnées du deuxième point donnent un paramétrage des points rationnels par la formule

$$t \mapsto \left(\frac{-2t^2 + 2t + 1}{2t^2 + 1}, \frac{2t^2 + 4t - 1}{2t^2 + 1} \right).$$

3. Le cas des quadriques

Considérons ensuite le cas des quadriques lisses dans $\mathbb{P}^3_k$ définies sur k. Soit Q une telle quadrique. On peut la définir par une équation du type

$$a_0 x_0^2 + \cdots + a_3 x_3^2 = 0, \text{ où } a_0 \ldots a_3 \neq 0.$$

On a les possibilités suivantes :

(a) Sur $\mathbb{C}$ on peut définir Q par l'équation $y_0^2 + \cdots + y_3^2 = 0$ en posant $y_i = \sqrt{a_i} x_i$.

(b) De même, sur $\mathbb{R}$ on a trois classes d'isomorphisme de quadriques données par les équations $y_0^2 \pm \cdots \pm y_3^2 = 0$.

(c) Sur $\mathbb{Q}$ on a beaucoup plus de possibilités. Par exemple, si $p_1 \dots p_m$ sont des nombres premiers deux à deux distincts, la classe d'isomorphisme de la quadrique $Q(p_1, \dots p_m) : x_0^2 - x_1^2 + x_2^2 - \prod p_i x_3^2 = 0$ détermine les nombres $p_1 \dots p_m$. Néanmoins, même si les quadriques $Q(p_1, \dots p_m)$ sont deux à deux non isomorphes, elles «ressemblent» beaucoup au plan projectif. Plus précisément, posons $Q = Q(p_1, \dots p_m)$. Remarquons que $P = (1 : 1 : 0 : 0)$ est un point de Q. Considérons la projection à partir du point P sur le plan $x_0 = 0$.

$$\pi : (x_0 : x_1 : x_2 : x_3) \mapsto (\frac{x_1 - x_0 - x_3}{x_3} + 1 : \frac{x_2}{x_3} : 1).$$

L'application inverse est la suivante :

$$\rho : (u + 1 : v : 1) \mapsto (1 - t : 1 + ut : vt : t),\, t = \frac{2(1 + u)}{1 - u^2 + v^2 - \prod p_i}.$$

Remarquons que π et ρ ne sont pas inverses l'un de l'autre. En effet, π n'est pas définie en P et envoie les droites $L_\pm \stackrel{\text{def}}{=} (1 : 1 : \pm t\sqrt{\prod p_i} : t)$ sur un seul point $(0 : \pm\sqrt{\prod p_i} : 1)$. De même, ρ n'est pas définie aux points $(0 : \pm\sqrt{\prod p_i} : 1)$ et envoie la droite $M = (0 : u : 1)$ sur le point P. Néanmoins π et ρ donnent un isomorphisme entre les ouverts $Q \setminus L\pm$ et $\mathbb{P}^2 \setminus M\pm$. Cela justifie que Q «ressemble» à un plan projectif.

Cet exemple nous amène à la définition suivante :

Définition 2.3. Soit k un corps. Soient X, Y des variétés sur k. On dit qu'elles sont *birationnelles* s'il existe des ouverts non vides $X_0 \subset X$ et $Y_0 \subset Y$ tels que X_0 est isomorphe à Y_0 sur k (i.e. l'isomorphisme $X_0 \simeq Y_0$ est donné localement par des polynômes à coefficients dans k). Si l'on peut trouver des ouverts isomorphes sur K pour une extension K de k on dit que X et Y sont *K-birationnelles*. On dit qu'une variété définie sur k est *rationnelle* si elle birationnelle à l'espace projectif $\mathbb{P}^n_k$. On dit qu'une variété X est *unirationnelle* s'il existe un morphisme dominant, i.e. d'image dense, d'un ouvert de l'espace projectif dans X.

3 Variétés rationnellement connexes

Pour généraliser les exemples donnés au paragraphe précédent et pour essayer de répondre à la question (*) on peut espérer trouver des variétés pour lesquelles on peut avoir des résultats analogues aux théorèmes de Tsen et Chevalley-Warning. Il est intéressant d'étudier à quel point la géométrie de ces variétés conditionne leur arithmétique.

La géométrie de l'espace projectif est assez riche, on peut donc supposer qu'il est possible d'établir certains résultats pour des variétés qui «ressemblent» à l'espace projectif. On peut par exemple considérer les variétés rationnelles. Le problème de cette approche est qu'en dimension supérieure les variétés rationnelles forment une classe très particulière de variétés. En particuler la variété $U \subset \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ donnée par une équation à coefficients rationnels $q(x, y) = f(z)$ avec q un polynôme quadratique est rationnelle sur $\mathbb{R}$ seulement si f à un petit degré. En plus, il est en général assez difficile de déterminer si une variété donnée est rationnelle ou pas. Néanmoins on peut utiliser une autre propriété de l'espace projectif : le fait qu'il possède beaucoup de courbes rationnelles. Cela nous amène à l'étude des variétés rationnellement connexes. Ce sont des variétés qui possèdent dans certain sens beaucoup de courbes rationnelles définies sur une clôture algébrique de k.

Supposons désormais pour simplifier que $\operatorname{car} k = 0$ et k est non dénombrable.

Définition 3.1. Soit X une variété projective lisse sur k. On dit que X est *rationnellement connexe* si elle vérifie une des propriétés équivalentes suivantes :

1. Il existe un ouvert non vide $U \subset X$ tel que pour tous $x_1, x_2 \in U(\bar{k})$ il existe un morphisme $f : \mathbb{P}^1 \to X$ défini sur $\bar{k}$ tel que $x_1, x_2 \in f(\mathbb{P}^1)$.
2. Pour tous $x_1, x_2 \in X(\bar{k})$ il existe un morphisme $f : \mathbb{P}^1 \to X$ défini sur $\bar{k}$ tel que $x_1, x_2 \in f(\mathbb{P}^1)$.
3. Pour tous $x_1, \ldots, x_n \in X(\bar{k})$ il existe un morphisme $f : \mathbb{P}^1 \to X$ défini sur $\bar{k}$ tel que $x_1, \ldots, x_n \in f(\mathbb{P}^1)$.

Remarque 3.2. La classe des variétés rationnellement connexes contient les variétés unirationnelles. La question de savoir si ces classes sont différentes reste ouverte.

Voici la réponse à une partie de la question (*) dans le cas d'un corps de degré de transcendance 1 sur un corps algébriquement clos de caractéristique zéro, en particulier pour $\mathbb{C}(t)$ (cf. [Gr-Ha-St]).

Théorème 3.3 (Graber, Harris, Starr, 2003)**.** *Soit k une extension de type fini de degré de transcendance 1 d'un corps algébriquement clos de caractéristique zéro. Soit X une variété rationnellement connexe sur k. Alors $X(k) \neq \emptyset$.*

4 R-équivalence sur les variétés rationnellement connexes

La relation d'équivalence suivante à été introduite dans [Ma]. Elle consiste à organiser les points rationnels d'une variété en classes à l'aide de courbes rationnelles.

Définition 4.1. Soit k un corps. Soit X une variété projective sur k. Deux points $x, x' \in X(k)$ sont dits *R-liés* s'il existe un morphisme $p : \mathbb{P}^1 \to X$ défini sur k tel que $p(0:1) = x$ et $p(1:0) = x'$. La relation d'équivalence ainsi engendrée est la R-équivalence. On note $X(k)/R$ l'ensemble des classes de R-équivalence.

La géométrie des variétés rationnellement connexes est caractérisée par le fait que celles-ci contiennent beaucoup de courbes rationnelles. C'est pourquoi il peut être intéressant d'étudier la R-équivalence sur les variétés rationnellement connexes. La question de la finitude de $X(k)/R$, ainsi que des questions proches, ont été beaucoup étudiées ces dernières années et l'on connaît plusieurs résultats sur des corps différents ([Ma], [SD] pour les hypersurfaces cubiques, [CT-Sa] [CT-Co],[CT], [CT-Sk] pour les surfaces rationnelles, etc.). Néanmoins beaucoup de questions restent ouvertes.

Voici un des résultats récents (cf. [Ko99]) :

Théorème 4.2. *Soit k un corps p-adique, i.e. une extension algébrique finie de $\mathbb{Q}_p$*[2] *ou $\mathbb{R}$, et soit X une k-variété projective lisse rationnellement connexe. Alors la R-équivalence sur $X(k)$ est une relation ouverte. En particulier, l'ensemble $X(k)/R$ est*

[2] On peut voir les éléments du corps $\mathbb{Q}_p$, où p est un nombre premier, comme suit. Un élément r de $\mathbb{Q}_p$ s'écrit de manière unique sous la forme $r = \sum_{i=k}^{\infty} a_i p^i$, où $k \in Z$, les a_i sont des nombres entiers compris entre 0 et $p-1$ et $a_k \neq 0$. On définit ainsi une valuation (une norme miltiplicative) sur $\mathbb{Q}_p$ en posant $|r| = p^{-k}$. Si E est une extension algébrique finie de $\mathbb{Q}_p$, cette valuation prolonge de manière unique et définit une topologie sur E qui le rens localement compact.

fini.

Remarque 4.3. 1. Précisons la topologie considérée sur $X(k)$. Remarquons d'abord que $\mathbb{P}^n_k$ possède une topologie définie sur les parties affines $A_i = \{(x_0 : \ldots : x_n), \mid x_i \neq 0\} \simeq k^n$ par la topologie[3] de k^n. On voit $X(k)$ comme une partie de $\mathbb{P}^n_k$ définie par des équations homogènes, ce qui donne un fermé de l'espace projectif puisque les polynômes sont des applications continues pour la topologie considérée sur $\mathbb{P}^n_k$. On munit ainsi $X(k)$ de la topologie induite et on l'appelle la *k-topologie.* Puisque $X(k)$ est en fermé dans $\mathbb{P}^n_k$ et $\mathbb{P}^n_k$ est compact, $X(k)$ est compact.

2. Ce théorème à été démontré pour les corps locaux pas forcément de caractéristique zéro, ce qui nécessite d'employer la notion de variété séparablement rationnellement connexe. Ici, pour simplifier, on se restreint au cas où $\operatorname{car} k = 0$. En ce qui concerne d'autres résultats en caractéristique non nulle, par exemple dans le cas des corps finis, on a démontré ([Ko-Sza]) que si X est une k-variété projective lisse séparablement rationnellement connexe sur un corps fini k et si l'ordre de k est plus grand qu'une certaine constante qui dépend seulement de la géométrie de X ($\dim X$ et $\deg X$) alors $X(k)/R$ est réduit à un point.

Corollaire 4.4. *Soit X une variété projective lisse sur $\mathbb{R}$, rationnellement connexe. Alors les classes de R-équivalence sont précisément les composantes connexes de $X(\mathbb{R})$.*

Démonstration. Puisque les classes de R-équivalence sont ouvertes et fermées dans $X(\mathbb{R})$ elles sont des unions de composantes connexes de $X(\mathbb{R})$. D'autre part, $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ est connexe, donc chaque classe de R-équivalence est connexe elle-aussi. Le résultat en découle. □

Ce résultat permet d'étudier la situation suivante plus générale : étant donné un morphisme à fibres rationnellement connexes $f : X \to Y$ de variétés sur un corps p-adique k, que peut-on dire de la variation de l'ensemble $X_y(k)/R$ quand $y \in Y(k)$? La propriété suivante a été démontrée dans [Ko04] :

Théorème 4.5. *Soit k un corps p-adique ou $\mathbb{R}$ et soit $f : X \to Y$ un k-morphisme projectif et lisse[4] de variétés lisses à fibres rationnellement connexes. L'application $Y(k) \to \mathbb{N}$, $y \mapsto |X_y(k)/R|$ est semi-continue supérieurement.*

Il m'intéresserait de savoir si cette application est continue (i.e. localement constante). On ne connaît pas de résultats dans cette direction et il serait déjà intéressant d'en obtenir dans des cas particuliers, par exemple pour les surfaces de Châtelet.

Dans une autre direction, on peut se demander dans quels cas l'ensemble $X(k)/R$ est réduit à un point. D'autre part, il serait intéressant de donner des exemples de variétés qui ont un nombre infini de classes de R-équivalence et, plus précisement, de variétés unirationnelles ou rationnelles qui ont un nombre infini de classes de R-équivalence. On connaît de tels exemples sur les corps $\mathbb{Q}(t)$, $\mathbb{R}(t)$, $\mathbb{R}((t))$ (cf. [Ko04]) : ce sont des hypersurfaces quartiques en un nombre assez grand de variables. Il me semblerait intéressant de trouver des exemples qui sont des intersections de deux quadriques ou des exemples sur $\mathbb{Q}$.

[3] La topologie sur $\mathbb{R}$ est définie par la valeur absolue usuelle.

[4] On dispose des notions de morphismes projectifs et de morphismes lisses. Les fibres d'un morphisme projectif (resp. lisse) sont des variétés projectives (resp. lisses).

Références

[CT] J.-L. Colliot-Thélène, *Hilbert's theorem 90 for K_2, with application to the Chow groups of rational surfaces*, Invent. Math. **71** (1983), pp. 1-20.

[CT-Co] J.-L. Colliot-Thélène, D.Coray, *L'équivalence rationnelle sur les points fermés des surfaces rationnelles fibrées en coniques*, Compositio Math. **39** (1979), pp. 301–332.

[CT-Sa] J.-L. Colliot-Thélène, J.-J. Sansuc, *La R-équivalence sur les tores*, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. **10** (1977), pp. 175–230.

[CT-Sa-SD] J.-L. Colliot-Thélène, J.-J. Sansuc, H.P.F. Swinnerton-Dyer, *Intersection of two quadrics and Châtelet surfaces I and II*, J. Reine Angew. Math. **373** (1987), pp. 37–107 et **374** (1987), pp. 72–168.

[CT-Sk] J.-L. Colliot-Thélène, A. Skorobogatov, *R-equivalence on conic bundles of degree 4*, Duke Math. J. **54** (1987), pp. 671–677.

[Gi] Ph. Gille, *La R-équivalence sur les groupes algébriques réductifs définis sur un corps global*, Publ. Math. I.H.E.S. **86** (1997), pp. 199–235.

[Gr] A. Grothendieck, *Techniques de construction et théorèmes d'existence en géométrie algébrique IV : les schémas de Hilbert*, Séminaire Bourbaki, 1960/61, Exp. 221, Astérisque hors série **6**, Soc. Math. Fr. (1997).

[Gr-Ha-St] T. Graber, J. Harris, J. Starr, *Families of rationally connected varieties*, J. Amer. Math. Soc. **16** (2003), 57–67.

[Ko96] J. Kollár, *Rational curves on algebraic varieties*, Springer-Verlag (1996).

[Ko99] J. Kollár, *Rationally connected varieties over local fields*, Annals of Math. **150** (1999), pp. 357–367.

[Ko04] J. Kollár, *Specialization of zero cycles*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **40** (2004), pp. 689–708.

[Ko-Mi-Mo] J. Kollár, Y. Miyaoka, S. Mori *Rationally connected varieties*, J. Alg. Geom. **1** (1992), pp. 429–448.

[Ko-Sza] J. Kollár, E. Szabó, *Rationally connected varieties over finite fields*, Duke Math. J. **120** (2003), pp. 251–267.

[Ma] Yu. Manin, *Cubic forms*, Izdat. "Nauka", Moscow, 1972 (en Russe) ; Version angl. : North-Holland Publ., Co., London, 1974.

[SD] H.P.F. Swinnerton-Dyer, *Universal equivalence for cubic surfaces over finite and local fields*, Symposia Math. **24** (1981), 111-143.