Equations de contrainte de la relativité générale

Samuel Pocchiola

18 janvier 2009

Table des matières

1 Introduction

Les équations de contraintes sont des équations aux dérivées partielles elliptiques non linéaires qui interviennent dans la formulation de Cauchy de la théorie de la relativité générale. Ce sont les équations satisfaites par la première et la seconde forme fondamentale d'une hypersurface de type espace d'une variété lorentzienne de dimension 4 à courbure de Ricci nulle (modélisant l'espace-temps en l'absence de matière). Elles sont d'un intérêt central en relativité générale depuis les travaux de Y. Choquet-Bruhat en 1952 qui a montré que si les données initiales du problème de Cauchy pour les equations d'Einstein vérifient les équations de contrainte, alors on peut toujours trouver un espace-temps solution des équations d'Einstein qui contient une hypersurface dont la première et la seconde forme fondamentale s'accordent avec ces données initiales.

Plus précisément, l'espace-temps en relativité générale est décrit par une variété lorentzienne (V, γ) de dimension 4 satisfaisant aux 10 équations d'Einstein

$$\mathrm{Ric}^V_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\,\mathrm{R}^V\,\gamma_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta} \tag{1}$$

où Ric^V est la courbure de Ricci de V, R^V sa courbure scalaire et où T est un tenseur symétrique de type $(2,0)$, appelé tenseur d'énergie-impulsion et qui dépend de la valeur du champ éléctromagnétique. En l'absence de matière, le tenseur T est nul et ces équations se réduisent à

$$\mathrm{Ric}^V = 0. \tag{2}$$

On appelle hypersurface de type espace toute hypersurface M de V dont la premiere forme fondamentale $g = i^*\gamma$ (où i désigne l'inclusion $M \hookrightarrow V$) est définie positive. Notons K la seconde forme fondamentale de M et R^M sa courbure scalaire. Le fait que V soit à courbure de Ricci nulle entraine sur K et g les deux équations suivantes, connues sous le nom d'équations de contraintes de la relativité générale :

$$\mathrm{R}^M + \mathrm{tr_g}^2(K) - |K|^2 = 0 \tag{3}$$

$$\mathrm{div}_g(K) - d\,\mathrm{tr_g}(K) = 0 \tag{4}$$

Le problème de Cauchy consiste, étant donné une variété riemannienne (M, g) et un tenseur symétrique K de type $(2,0)$ sur M, à construire un espace-temps (V, γ) dont M est une hypersurface de type espace, de première forme fondamentale g et de seconde forme fondamentale K. Choquet-Bruhat [14] a montré que cela est toujours possible si les données initiales M, g et K sont de classe C^∞ et vérifient les équations de contraintes. Celles-ci admettent beaucoup de solutions et il est important pour les physiciens de classifier l'ensemble des solutions possibles sur une variété donnée. De ce point de vue, l'approche qui s'est révélée la plus féconde est la méthode dite conforme, qui a été introduite par Lichnerowicz [10], Choquet-Bruhat et York [9]. Elle a abouti, par exemple, à la classification des solutions dont la courbure moyenne est constante (i.e. $d\,\mathrm{tr_g}(K) = 0$) sur les variétés compactes (Isenberg [8]). Le point de départ de la méthode conforme est l'utilisation d'une décomposition orthogonale de l'espace des tenseurs symétriques sans trace introduite par York [4]. Mon travail de master 2 a consisté en partie à montrer que la décomposition de York s'étend au cas des variétés non-compactes possédant un nombre fini de bouts cylindriques ce qui permet d'utiliser la méthode conforme pour étudier les solutions des équations de contrainte sur ce type de variétés.

2 Methode conforme

Dans la suite, (M, g) désigne une variété riemannienne de dimension $n \geq 3$. L'idée de base de l'approche conforme est la décompostion de l'espace $\mathcal{S}$ des tenseurs de type $(2, 0)$ en $\mathcal{S} = \ker \operatorname{div}_g \oplus \operatorname{im} \mathbb{L}$ où $\mathbb{L}$ désigne l'opérateur de killing conforme, défini sur les champs de vecteurs X par

$$\mathbb{L}X = \mathcal{L}_X g - \frac{2}{n} \operatorname{div}_g X g$$

où $\mathcal{L}_X g$ désigne la dérivée de Lie de la métrique g par rapport à X. En coordonnées locales, on a :

$$\mathbb{L}X^{ab} = \nabla^b Y^a + \nabla^a Y^b - \frac{2}{n} \nabla_c X^c g^{ab}.$$

On donne dans la suite un énoncé précis dans le cas des variétés compactes et des variétés avec un nombre fini de bouts cylindriques.

Dans la méthode conforme, étant donné une variété riemmanienne M, une métrique λ, un tenseur symétrique transverse sans trace σ de type $(2, 0)$ (i.e. tel que $\operatorname{tr}_\lambda \sigma = 0$ et $\operatorname{div}_\lambda \sigma = 0$) et une fonction τ sur M, on cherche une solution (M, g, K) aux équations de contraintes de la forme

$$\begin{aligned} g &= \phi^{\frac{4}{n-2}} \lambda \\ K &= \phi^{-2} (\sigma + \mathbb{L}W) + \frac{1}{n} \tau \phi^{-\frac{4}{n-2}} \lambda \end{aligned}$$

où les inconnues sont une fonction strictement positive ϕ et un champ de vecteurs W sur M. En remplaçant K et g par leurs expressions dans les équations (3) et (4) on obtient :

$$\frac{4(n-1)}{n-2} \Delta_\lambda \phi - \mathrm{R}_\lambda \phi = \phi^{-\frac{3n-2}{n-2}} |\sigma + \mathbb{L}W|^2_\lambda + \frac{n-1}{n} \tau^2 \phi^{\frac{n+2}{n-2}} \tag{5}$$

et

$$\Delta_{\mathbb{L}} W = \frac{2}{n} \nabla_\lambda \tau \tag{6}$$

où l'opérateur laplacien vectoriel $\Delta_{\mathbb{L}}$ est défini par $\Delta_{\mathbb{L}} = \operatorname{div}_\lambda \mathbb{L}$, de telle sorte qu'en coordonnées locales :

$$\Delta_{\mathbb{L}} Y^a = \nabla_b \nabla^b Y^a + \nabla_b \nabla^a Y^b - \frac{2}{n} \nabla^a \nabla_b Y^b.$$

L'équation (5) est appelée équation de Lichnerowicz. Elle constitue avec (6) un système couplé d'équations differentielles elliptiques quasi-linéaires sur M. Si ces équations en ϕ et W peuvent être résolues pour des données initiales $(M, \lambda, \sigma, \tau)$, alors on obtient une solution (M, g, K) aux équations de contrainte. Réciproquement, si (M, g, K) est solution des équations de contraintes, alors on peut poser $K = \sigma + \mathbb{L}W + \frac{1}{n} \tau \lambda$, où $\tau = \operatorname{tr_g} K$, ce qui donne une solution $\phi = 1$

à l'équation de Lichnerowicz. Il existe des données initiales $(M, \lambda, \sigma, \tau)$ qui ne donnent pas de solutions aux équations de contrainte. Par exemple si on prend pour M la n-sphere $\mathbb{S}^n$ munie d'une metrique λ dont la courbure scalaire est strictement positive (par exemple la métrique euclidienne standard qui donne la courbure scalaire $n(n-1)$) et si on choisit $\sigma = 0$ et $\tau = 1$ alors l'équation (6) devient

$$\Delta_{\mathbb{L}} W = 0$$

ce qui conduit à $\Delta_{\mathbb{L}} W = 0$ (car $\mathbb{S}^n$ est compacte, mais c'est également vrai si M est asymptotiquement euclidienne ou à bouts cylindriques pourvu que W décroisse suffisamment vite à l'infini). L'équation de Lichnerowicz devient alors :

$$\frac{4(n-1)}{n-2}\Delta_\lambda \phi = \mathrm{R}_\lambda\, \phi + \frac{n-1}{n}\phi^{\frac{n+2}{n-2}}.$$

Elle n'admet pas de solution strictement positive comme on peut le voir en multipliant les deux membres par ϕ et en intégrant sur M. Le problème est donc de déterminer quelles sont les données initiales $(M, \lambda, \sigma, \tau)$ qui donnent des solutions aux équations de contrainte. L'approche conforme s'est révélée surtout utile lorsque l'on recherche des solutions dont la courbure moyenne est constante (solutions CMC), ce qui revient à spécifier des données initiales $(M, \lambda, \sigma, \tau)$ avec τ constant. Comme on vient de le voir sur l'exemple ci-dessus, les deux équations de contrainte sont alors découplées et le problème revient à résoudre l'équation de Lichnerowicz. Notons que l'équation de Lichnerowicz est invariante par changement conforme de métrique dans le sens suivant : si ϕ est une solution de (5) relativement aux données initiales (λ, σ, τ) et si $\gamma = \theta^{\frac{4}{n-2}}\lambda$ appartient à la classe conforme de λ alors $\theta^{-1}\phi$ est une solution de (5) relativement à $(\gamma, \theta^{-2}\sigma, \tau)$. De plus les solutions (g, K) des équations de contrainte qui proviennent des données initiales (λ, σ, τ) et celles qui proviennent des données $(\gamma, \theta^{-2}\sigma, \tau)$ sont les mêmes.

Dans le cas des solutions CMC, la méthode conforme a donné la classification des solutions des équations de contrainte sur les variétés compactes [8], asymptotiquement euclidiennes [15] et asymptotiquement hyperboliques [16]. On présente dans la suite les résultats de Isenberg concernant les variétés compactes.

3 Cas des variétés compactes

Dans cette partie, M désigne une variété compacte de dimension $n \geq 3$. On commence par donner un énoncé précis de la décomposition de York.

3.1 Décomposition de York

Soit $\mathcal{S}_k$ l'espace des tenseurs symétriques sans trace de type $(2,0)$ sur M de classe H^k (i.e. qui possèdent k dérivées dans L^2 au sens des distributions). On note N_k le noyau de l'opérateur div_g défini sur $\mathcal{S}_k$ par $\mathrm{div}_g\, \sigma^b = \nabla_a \sigma^{ab}$ et R_k l'image de l'opérateur de Killing conforme $\mathbb{L}$.

Théorème 1 ([4]). *Pour tout entier $k \geq 1$, $\mathcal{S}_k = N_k \oplus R_k$.*

La preuve de ce théorème repose sur des propriétés élémentaires des opérateurs différentiels elliptiques que l'on donne ici sans démonstration :

Théorème 2 ([6]). *Soit M une variété compacte et soit*

$$\mathrm{T}\, u = \sum_{k=0}^{2} a_k \nabla^k u$$

un opérateur différentiel elliptique d'ordre 2 à coefficients C^∞. Alors il existe une constante C telle que

$$\|u\|_{H^2} \leq C\left(\|\mathrm{T}\, u\|_{L^2} + \|u\|_{L^2}\right).$$

Théorème 3. *Sous les hypothèses du Théorème 2 on a*

1. *L'opérateur T $H^{k+2} \to H^k$ a un noyau de dimension finie et une image fermée.*
2. *Si T est injectif alors il existe une constante C telle que pour tout u dans H^{k+2}*

$$\|u\|_{H^{k+2}} \leq C\|\mathrm{T}\, u\|_{H^k}. \tag{7}$$

Le Théorème 3 se déduit du Théorème 2 en utilisant la compacité des inclusions $H^{k+2} \hookrightarrow H^k$.

3.2 Classification des solutions

Isenberg [8] a décrit les triplets (λ, σ, τ) qui donnent une solution CMC aux équations de contrainte. Ses résultats reposent sur des changements conformes de métrique qui simplifient l'équation de Lichnerowicz et utilisent de façon cruciale le théorème de Yamabe.

Théorème 4 ([2]). *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$. Il existe une métrique h dans la classe conforme de g qui est à courbure scalaire constante.*

Il est aisé de voir que deux métriques à courbure scalaire constante qui sont conformément équivalentes ont une courbure scalaire de même signe. On a donc une partition de l'ensemble des métriques riemanniennes sur M en trois classes dépendant de ce signe et notées respectivement $Y(M)^+$, $Y(M)^-$ et $Y(M)^0$. Le théorème prouvé par Isenberg s'énonce comme suit :

Théorème 5 (Isenberg [8]). *soit M une variété compacte de dimension $n \geq 3$. Les données initiales (g, σ, τ) avec τ constant conduisent à une solution (g, K) des équations de contrainte si et seulement si elles satisfont l'une des conditions suivantes :*

- $g \in Y^0$ *et* $\sigma = 0$ *et* $\tau = 0$
- $g \in Y^0$ *et* $\sigma \neq 0$ *et* $\tau \neq 0$
- $g \in Y^+$ *et* $\sigma \neq 0$
- $g \in Y^-$ *et* $\tau \neq 0$.

Dans ce cas la solution (g, K) obtenue est unique.

Soit $I(M)$ l'ensemble des données initiales (λ, σ, τ) avec τ constant satisfaisant l'une des quatre conditions du Théorème 5 et soit $S(M)$ l'ensemble des solutions (g, K) des équations de contrainte. On définit la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur $I(M)$ par $(\lambda, \sigma, \tau)\mathcal{R}(\gamma, \hat{\sigma}, \hat{\tau})$ si et seulement si $\gamma = \theta^{\frac{4}{n-2}}\lambda$, $\hat{\sigma} = \theta^{-2}\sigma$ et $\hat{\tau} = \tau$. Alors le Théorème 5 assure qu'on a une application bijective :

$$I(M)/\mathcal{R} \longrightarrow S(M).$$

Les principaux outils d'analyse intervenant dans la preuve du Théorème 5 sont le principe du maximum et le théorème des sur et sous-solutions que l'on énonce ici.

Théorème 6. *([2], [8]). Soit (M, g) une variété riemannienne compacte et soit f une fonction C^∞ à valeurs réelles définie sur $M \times \mathbb{R}^+$. On suppose que l'équation*

$$\Delta\psi = f(x, \psi) \tag{8}$$

admet une sous et une sur-solution, i.e. deux fonctions ϕ^- et ϕ^+ telles que $\Delta\psi^+ \leq f(x, \psi^+)$ et $\Delta\psi^- \geq f(x, \psi^-)$. On suppose de plus que ϕ^- et ϕ^+ sont de classe C^∞ et que

$$0 < \phi^-(x) \leq \phi^+(x)$$

pour tout $x \in M$. Alors il existe une fonction ϕ de classe C^∞ solution de l'équation (8) et telle que

$$\phi^-(x) \leq \phi(x) \leq \phi^+(x)$$

pour tout $x \in M$.

A titre d'exemple, on démontre que si g appartient à Y^- et si τ est non nul, alors l'équation de Lichnerowicz admet une solution strictement positive. En effet, quitte à opérer un changement conforme de métrique on peut supposer que celle-ci s'écrit :

$$\frac{4(n-1)}{n-2}\Delta_h\phi = -\phi - |\sigma|^2\phi^{-\frac{3n-2}{n-2}} + \frac{n-1}{n}\tau^2\phi^{\frac{n+2}{n-2}}.$$

Or on voit facilement que cette équation admet des sous et sur-solutions constantes strictement positives, i.e. deux nombres ϕ_- and ϕ_+ tels que

$$-\phi_- - |\sigma|^2\phi_-^{-\frac{3n-2}{n-2}} + \frac{n-1}{n}\tau^2\phi_-^{\frac{n+2}{n-2}} \leq 0$$

et

$$-\phi_+ - |\sigma|^2\phi_+^{-\frac{3n-2}{n-2}} + \frac{n-1}{n}\tau^2\phi_+^{\frac{n+2}{n-2}} \geq 0$$

ce qui permet d'appliquer le Théorème 6.

4 Cas des variétés possédant un nombre fini de bouts cylindriques

4.1 Décomposition de York

Le principal résultat obtenu dans le cas des variétés possédant un nombre fini de bouts cylindriques est que la décomposition de York reste valide à condition que l'on travaille non plus avec des espaces de Sobolev classiques mais avec des espaces de Sobolev à poids. Cela montre que la méthode conforme s'étend à ce type de variétés et que l'étude des équations de contrainte, dans le cas des solutions CMC, se réduit à l'étude de l'équation de Lichnerowicz. Le but de cette partie est de donner une idée des éléments de la preuve de ce résultat. On utilise des résultats concernant les propriétés de Fredholm d' opérateurs elliptiques du second ordre dûs à Lockhart et McOwen [3]. On commence par quelques definitions.

Definition 7. *La variété riemannienne M de dimension n possède p bouts cylindriques si il existe un compact $K \subset M$ et p variétés compactes Ω_i de dimension $n-1$ tels que $M \setminus K$ est l'union disjointe de p ouverts U_i qui sont difféomorphes par un difféomorphisme ϕ_i à $\Omega_i \times \mathbb{R}_+^*$.*

Si pr_i désigne la projection canonique $\Omega_i \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ on pose $z^i = pr_i \circ \phi_i$. On définit la fonction coordonnée z sur M par $z(x) = z^i(x)$ si x appartient à U_i et $z(x) = 0$ si x appartient à K. Soit η_1 et η_2 deux fonctions lisses sur M telles que
- $0 \leq \eta_1 \leq 1$ et $\operatorname{supp} \eta_1 \subset K \cup \{z \leq 2\}$
- $\eta_1 = 1$ sur $K \cup \{z \leq 1\}$
- $\eta_2 = 1 - \eta_1$.

Si δ est un nombre réel et si E est un fibré vectoriel au dessus M, on définit sur $C^k(E)$ les normes $\|\cdot\|_{H^k_\delta}$ par

$$\|f\|^2_{H^k_\delta} = \sum_{i=0}^{k} \int_{K\cup\{z\leq 1\}} \eta_1 |\nabla^i f|^2 dV_g + \int_{\{z>1\}} \eta_2 |\nabla^i f|^2 e^{2\delta\cdot z} dV_g \tag{9}$$

Definition 8. *Pour tout entier naturel k, l'espace de Sobolev à poids $H^k_\delta(E)$ est le complété de $C^k(E)$ pour la norme $\|\cdot\|_{H^k_\delta}$.*

On note $\mathcal{S}_{k,\delta}$ l'espace des tenseurs symétriques sans trace de type $(2,0)$ sur M qui appartiennent à H^k_δ. On note $N_{k,\delta}$ le noyau de l'opérateur div_g défini sur les tenseurs sans trace de classe H^k_δ et par $R_{k,\delta}$ l'image de l'opérateur $\mathbb{L}$ défini sur les champs de vecteurs de classe H^{k+1}_δ. On a alors

Théorème 9. *Il existe $\delta > 0$ tel que $N_{k,\delta} \oplus R_{k,\delta} = \mathcal{S}_{k,\delta}$.*

Pour prouver ce théorème, on montre comme dans le cas des variétés compactes que l'opérateur $\Delta_{\mathbb{L}}$ $H^{k+2}_\delta \to H^k_\delta$ a une image fermée pour un certain $\delta > 0$. L'estimation a priori suivante se déduit facilement du cas compact :

Lemme 10. *Pour tout champ de vecteurs u de classe H^{k+2}_δ sur M on a :*

$$\|u\|_{H^{k+2}_\delta} \leq C\left(\|\Delta_{\mathbb{L}} u\|_{H^k_\delta} + \|u\|_{L^2_\delta}\right).$$

Ce lemme ne suffit pas à prouver le Théorème 9 car les inclusions $H^{k+2}_\delta \to H^k_\delta$ ne sont pas compactes.

4.2 Etude de l'opérateur $\Delta_{\mathbb{L}}$ sur un cylindre

Suivant [3], on effectue une étude de l'opérateur $\Delta_{\mathbb{L}}$ sur un cylindre. Soit donc $N = \Omega \times \mathbb{R}$ le cylindre de base Ω muni de la métrique $g = h + dz^2$ où h

est une métrique riemannienne sur Ω. Pour tout entier k et tout nombre réel δ, on définit la norme $\|\cdot\|_{H^k_\delta}$ et l'espace de Sobolev à poids associé H^k_δ sur N en étendant l'intégration dans l'équation (9) à $z \in \mathbb{R}$. On a le résultat suivant :

Théorème 11. *Il existe un réel $\delta > 0$ tel que $\Delta_{\mathbb{L}}$ soit un isomorphisme $H^{k+2}_\delta \hookrightarrow H^k_\delta$.*

La preuve utilise de façon cruciale la transformation de Fourier. Si T est un champ de tenseurs sur N, on définit la transformée de Fourier de T par

$$\hat{T}(\omega, \lambda) = \int e^{-i\lambda z} T(\omega, z) dz.$$

On cherche à résoudre l'équation

$$\Delta_{\mathbb{L}} X = W.$$

Pour celà, on décompose X et W en composantes tangentielles et normales à Ω, i.e. on écrit $X = Y\partial_\Omega + f\partial z$ et $W = Z\partial_\Omega + g\partial z$. En prenant la transformée de Fourier de chaque composante on obtient les deux équations suivantes :

$$\begin{aligned}
\hat{g}(\omega, \lambda) &= -2\left(1 - \frac{1}{n}\right)\lambda^2 \hat{f}(\omega, \lambda) + \Delta_h \hat{f}(\omega, \lambda) + i\lambda\left(1 - \frac{2}{n}\right)\operatorname{div}_h \hat{Y}(\omega, \lambda) \\
\hat{Z}(\omega, \lambda) &= \widetilde{\Delta_{\mathbb{L}}}\hat{Y}(\omega, \lambda) + i\lambda\left(1 - \frac{2}{n}\right)\nabla_h \hat{f}(\omega, \lambda) - \lambda^2 \hat{Y}(\omega, \lambda).
\end{aligned}$$

où $\widetilde{\Delta_{\mathbb{L}}}$ est l'opérateur différentiel défini sur la variété Ω (qui est de dimension $n-1$) par

$$\widetilde{\Delta_{\mathbb{L}}} Y = \mathcal{L}_Y h - \frac{2}{n}\operatorname{div}_h Y h.$$

Ces équations sont des équations différentielles linéaires elliptiques d'ordre 2 sur Ω. On introduit l'opérateur différentiel A_λ définit pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ par $A_\lambda(f, Y) = (g, Y)$ où

$$\begin{aligned}
g &= -2\left(1 - \frac{1}{n}\right)\lambda^2 f + \Delta_h f + i\lambda\left(1 - \frac{2}{n}\right)\operatorname{div}_h Y \\
Z &= \widetilde{\Delta_{\mathbb{L}}} Y + i\lambda\left(1 - \frac{2}{n}\right)\operatorname{grad}_h f - \lambda^2 Y.
\end{aligned}$$

Supposons qu'il existe $\delta \in \mathbb{R}$ tel que A_λ soit inversible pour tout nombre complexe λ tel que $\Im(\lambda) = \delta$ et notons R_λ son inverse. Si on note $T = (f, Y)$, la formule

$$A_\delta^{-1} T(\omega, z) = \int_{\Im(\lambda)=\delta} e^{i\lambda z} R_\lambda \hat{T}(\omega, \lambda) d\lambda$$

definit un opérateur continu $H^k_\delta \hookrightarrow H^{k+2}_\delta$ qui inverse $\Delta_{\mathbb{L}}$. Le Théorème 11 permet alors de démontrer le résultat suivant, qui implique lui-même le Théorème 9.

Théorème 12. *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte possèdant un nombre fini de bouts cylindriques. Alors il existe $\delta > 0$ tel que $\Delta_{\mathbb{L}}$ $H^{k+2}_\delta \to H^k_\delta$ ait une image fermée et un noyau de dimension finie.*

4.3 Racines indicielles

D'après ce qui précède, le Théorème 11 est démontré pourvu que l'on puisse trouver un nombre $\delta > 0$ tel que A_λ soit inversible pour tout nombre complexe tel $\Im(\lambda) = \delta$. On est conduit à la définition suivante :

DEFINITION 13. *On appelle racine indicielle tout nombre complexe λ tels que A_λ soit inversible.*

On démontre le lemme suivant :

LEMME 14. *Il existe $\delta > 0$ tel qu'il n'existe pas de racine indicielle non-nulle dans la bande du plan complexe delimitée par $|\Im(z)| < \delta$.*

Pour donner une idée de la démonstration, on énonce le résultat suivant que l'on démontre essentiellement à l'aide d'intégrations par parties :

LEMME 15. *Soit λ une racine indicielle non nulle et soient f and Y tels que $A_\lambda(f, Y) = 0$. Alors on a l'identité suivante :*

$$\begin{aligned} -|\imath\overline{\lambda}Y + \nabla_h f|^2 + |\operatorname{grad}_h f|^2(1 - \frac{\overline{\lambda}}{\lambda}) + |Y|^2(|\lambda|^2 - \lambda^2) - \\ 2|\imath\lambda(1 - \frac{1}{n})f - \frac{1}{n}\operatorname{div}_h Y|^2 - \frac{1}{2}|\widetilde{\mathbb{L}}Y - \frac{2\imath\lambda}{n}fh|^2 = 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Dans le cas où la variété transverse est la sphère de dimension $n-1$ munie de sa métrique standard, un calcul explicite permet de spécifier l'ensemble des racines indicielles :

LEMME 16. *Si $\Omega = \mathbb{S}^{n-1}$ munie de la métrique euclidienne, les racines indicielles non nulles sont les nombres complexes :*

$$\sqrt{\frac{1}{2}\mu_j + \frac{1}{2}\sqrt{\mu_j^2 + \frac{(n-2)^2}{n-1}(\mu_j+1)}} + \imath\sqrt{-\frac{1}{2}\mu_j + \frac{1}{2}\sqrt{\mu_j^2 + \frac{(n-2)^2}{n-1}(\mu_j+1)}}$$

et leurs opposés.

5 Remerciements

Je tiens à remercier P.T. Chruściel pour avoir encadré ce travail et pour toute l'aide qu'il m'a apportée.

Références

[1] R. Bartnik, J. Isenberg, *The constraint equations*, arXiv :gr-qc/0405092v1, 17 May 2004.

[2] E. Hebey, *Introduction à l'analyse non linéaire sur les variétés*, Fondations, Diderot Editeur, Paris, 1997.

[3] R.B. Lockhart, R.C. McOwen, *Elliptic differential operators on noncompact manifolds*, Ann. Scuola. Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) 1, no. 3, (1985), p. 409-447.

[4] J.W. York, *Covariant decompositions of symmetric tensors in the theory of gravitation*, Annales de l'I.H.P., section A, tome 21, $n°4$ (1974), p. 319-332.

[5] Y. Choquet-Bruhat, D. Christodoulou, *Elliptic systems in $H_{s,\delta}$ spaces on manifolds which are Euclidean at infinity*, Acta mathematica 146, (1981), p. 129-150.

[6] Y. Choquet-Bruhat, *Einstein constraints on compact n dimensional manifolds*, arXiv :gr-qc/0311029 v1, 8 Nov 2003.

[7] D. Gilbarg, N.S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, Springer-Verlag (1977).

[8] J. Isenberg, *Constant mean curvature solutions of Einstein constraint equations on closed manifolds*, Class. Quant. Grav. 12, 2249-2279.

[9] Y. Choquet-Bruhat, J.W. York, *The Cauchy problem*, General Relativity and Gravitation, A. Held editor, Plenum, New York, 1980.

[10] A. Lichnerowicz, *L'intégration des équations relativistes et le problème des n corps*, J. Maths pures et appl. 23, p 37-63, (1944).

[11] J. Jost, *Riemannian Geometry and Geometric Analysis*, Springer, 2002 (Universitext).

[12] D. Maxwell, *Rough solutions of the Einstein Constraint Equations on Compact manifolds*, J. Hyperbol. Diff. Equat. 2 (2005) 521, arXiv : gr-qc/0506085v1.

[13] D. Maxwell, *Rough solutions of the Einstein Constraint equations*, J. reine. angew. Math. 590 (2006), 1-29.

[14] Y. Choquet-Bruhat, *Théorème d'existence pour certains systèmes d'équations aux dérivées partielles non linéaires*, Acta Math. 88 (1952), 141-225.

[15] M. Cantor, *A necessary condition for York data to specify an asymptotically flat spacetime*, Compositio Math. 43 (1981), no. 3, 317-330.

[16] L. Andersson, P.T. Chruściel, H. Friedriech, *On the regularity of solutions to the Yamabe equations and the existence of smooth hyperboloidal initial data for Einstein's field equations.* Comm. Math. Phys., 149 :587-612, 1992.