

Etude de la FK percolation et lien avec le modèle d'Ising

Boris Pradel et Adrien de Larrard

Table des matières

1	Introduction	2
2	Présentation du modèle	2
2.1	FK percolation	2
2.2	Modèle d'Ising	2
2.3	Couplage	3
3	FK percolation en volume fini	4
3.1	Comparaisons entre mesures FK	4
3.1.1	Théorème de Holley	4
3.1.2	Petit lemme utile	6
3.1.3	Conséquences du théorème de Holley	6
3.2	Comparaison en fonction du graphe	7
3.2.1	Inégalité FK satisfaite par $P_{p,q}$	7
3.2.2	Conséquences	8
4	FK percolation en volume infini	8
4.1	Mesures P^0 et P^1	8
4.1.1	Définitions	8
4.1.2	Propriété d'invariance des mesures P^0 et P^1	9
4.2	Mesures FK en volume infini	9
4.3	Transition de phase	10
4.3.1	Propriétés et existence du paramètre critique	10
4.3.2	FK percolation et dualité	11
4.3.3	Conséquences dans \mathbb{Z}^2	12
5	Conclusion	13

1 Introduction

Notre exposé se propose d'étudier le modèle de la FK percolation ainsi qu'une de ses applications physique : il s'agit de comprendre certaines propriétés des métaux, et en particulier l'existence d'une température critique, dite de Curie, à partir de laquelle le fer passe de l'état magnétique spontané à l'état démagnétisé. Pour cela, on introduit le modèle d'Ising : on considère le réseau \mathbb{Z}^3 (\mathbb{Z}^2 lorsque l'on considèrera, pour simplifier, que le métal est constitué d'une seule couche d'atomes). Chaque point du réseau représente un électron dont nous regardons le spin σ dans $\{-1, 1\}$. A chaque configuration, on associe l'énergie

$$H = \sum_{x \sim y} \mathbb{1}_{\sigma(x) \neq \sigma(y)},$$

où la somme porte sur l'ensemble des paires non ordonnées de sites voisins. Les états d'énergie minimale sont les plus probables. L'étude des propriétés ferromagnétiques du métal n'est alors rien d'autre que celle des corrélations à grande échelle des spins qui le constituent. Dans un premier temps, nous étudierons le modèle plus général de la FK percolation de paramètres p, q dans le cas du réseau fini, puis en volume infini. Il suffira de constater que le modèle d'Ising est fortement lié au cas particulier $q = 2$. Enfin nous nous placerons dans le cas de la dimension 2 pour y obtenir des résultats plus précis.

L'intérêt de l'étude de ce modèle n'est pas seulement physique : il offre un exemple de transition de phase à une échelle globale, tout en restant assez simple.

2 Présentation du modèle

2.1 FK percolation

Soit G un graphe fini, Λ l'ensemble de ses arêtes, S l'ensemble de ses sommets. On se donne $w : \Lambda \mapsto \{0, 1\}$. Lorsque $w(a) = 1$, on dit que a est ouverte, et fermée dans le cas contraire. On définit ensuite la probabilité associée à la configuration w :

$$P_{p,q}(w) = \frac{1}{Z_{p,q}} p^{o(w)} (1-p)^{f(w)} q^{k(w)}$$

où l'on pose :

- $o(w)$: nombre d'arêtes ouvertes
- $f(w)$: nombre d'arêtes fermées
- $k(w)$: nombre de composantes connexes du graphe formé à partir de w

et où q , réel strictement positif, et $p \in [0, 1]$ sont des paramètres du modèle. Si $q = 1$, c'est la percolation classique : on ouvre chaque arête avec une probabilité p indépendamment de l'état des autres arêtes. Sinon, on choisit de privilégier (si $q > 1$) ou de défavoriser (si $q < 1$) les configurations comportant de nombreuses composantes connexes.

2.2 Modèle d'Ising

On introduit le spin $\sigma : S \mapsto \{-1, 1\}$, et on définit une probabilité sur l'ensemble des configurations possibles :

$$P_\beta(\sigma) = \frac{1}{Z_\beta} \exp(-\beta \sum_{x \sim y} \mathbb{1}_{\sigma(x) \neq \sigma(y)})$$

où Z_β est une constante de normalisation, et β un paramètre positif.

Pour $q = 2$, ces deux modèles sont liés comme nous allons le constater.

2.3 Couplage

Soit C l'ensemble des couples $(w, \sigma) \in \{0, 1\}^\Lambda \times \{-1, 1\}^S$ compatibles, i.e. tels que tous les sites appartenant à une même composante connexe pour w ont une même valeur de spin pour σ .

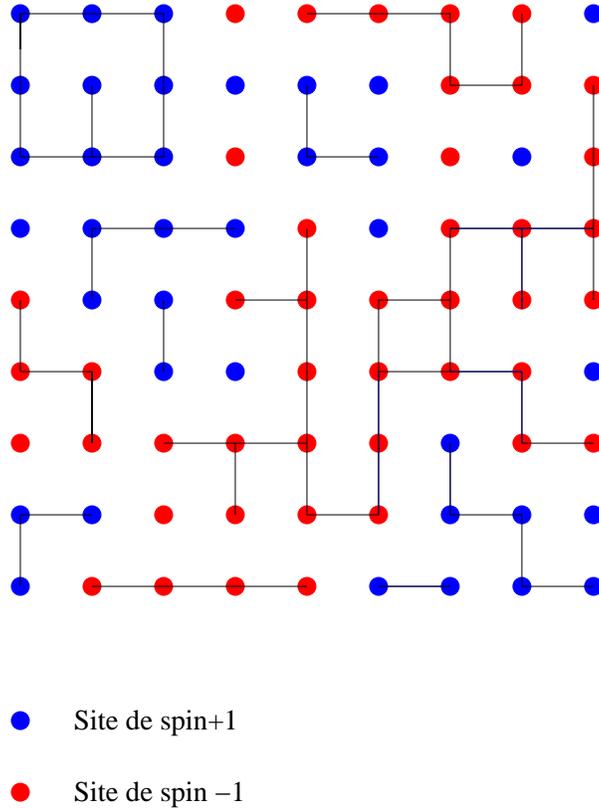


FIG. 1 – Exemple d'une configuration de C

On envisage deux "constructions" possibles de (w, σ) .

- On choisit au hasard w selon la loi $P_{p,q}$, puis on assigne indépendamment à chaque composante connexe une valeur de spin uniforme avec une probabilité $1/2$ pour $+1$ et $1/2$ pour -1 .
- On choisit σ selon la loi P_β , puis on choisit w comme suit : on ferme les arêtes séparant deux voisins de spins différents, et on ouvre les autres avec une probabilité p .

Dans les deux cas, le couple (w, σ) est alors dans C par construction. Chacune de ces constructions définit une probabilité sur C :

$$P_1(w, \sigma) = \frac{1}{Z_{p,2}} p^{o(w)} (1-p)^{f(w)} 2^{k(w)} \frac{1}{2^{k(w)}}$$

$$P_2(w, \sigma) = \frac{1}{Z_\beta} p^{o(w)} (1-p)^{\text{card}(\Lambda) - o(w) - r(\sigma)} \exp(-\beta r(\sigma))$$

avec $r(\sigma)$ désignant le nombre de paires de voisins de spin différent.

On constate que pour $1 - p = \exp(-\beta)$, ces deux probabilités sont égales. Sous cette condition, la loi de σ obtenue par la première construction est $P_{-\ln(1-p)}$, et la loi de w obtenue dans la deuxième est $P_{1-e^{-\exp(-\beta)}, 2}$. De ce couplage, on déduit que les corrélations du modèle d'Ising sont liées à la connectivité pour la FK percolation correspondante. En effet, d'après la première construction,

$$P_\beta(\sigma(x) = \sigma(y)) = P_\beta(x \leftrightarrow y \text{ pour } w) + \frac{1}{2}P_\beta(x \leftrightarrow y \text{ pour } w)$$

où $x \leftrightarrow y$ signifie que x et y peuvent être joints par un chemin ouvert pour w . D'où, sachant que $1 - p = \exp(-\beta)$ et $q = 2$,

$$P_\beta(\sigma(x) = \sigma(y)) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}P_{p,2}(x \leftrightarrow y \text{ pour } w).$$

Les corrélations à grande échelle du spin se traduisent donc par de grandes composantes connexes pour w . Par la suite on focalisera donc l'étude sur le modèle de la FK percolation, plus générale, d'abord dans un cadre fini, puis dans le cas du réseau.

3 FK percolation en volume fini

Dans toute la suite, nous supposons que $q \geq 1$.

Pour généraliser la FK percolation en dimension infinie, nous devons établir certains résultats généraux sur les comparaisons de mesures FK. Commençons par quelques notations et définitions :

- On considère une probabilité produit P sur l'espace $\Omega = \{0, 1\}^\Lambda$ où Λ est un ensemble fini ou dénombrable. Ω est muni d'un ordre partiel naturel : $w \leq w'$ si $w(a) \leq w'(a)$ pour tout $a \in \Lambda$.
- La fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est dite croissante si $f(w) \leq f(w')$ pour tout $w \leq w'$.
- Un évènement A de la tribu produit est dit croissant si $\mathbb{1}_A$ est croissant ; c'est à dire si pour tout w, w'

$$w \in A, w \leq w' \implies w' \in A.$$

- On définit w_{-e} comme étant la configuration w dont on a modifié l'état de l'arête e .
- Lorsque $w \in \{0, 1\}^\Lambda$, et que $e \in \Lambda$, on définit w_e de sorte que $w_e(e) = 1$ et $w_e(a) = w(a)$ pour tout a différent de e et w^e est défini de la même manière sauf que $w^e(e) = 0$.
- Lorsque μ_1 et μ_2 sont deux mesures de probabilité sur $\{0, 1\}^\Lambda$ (pour Λ fini), on dit que $\mu_1 \geq \mu_2$ si pour tout évènement croissant A ,

$$\mu_1(A) \geq \mu_2(A).$$

3.1 Comparaisons entre mesures FK selon les paramètres

3.1.1 Théorème de Holley

Theorem 1. *Supposons que μ_1 et μ_2 sont deux mesures de probabilité sur $\{0, 1\}^\Lambda$, où Λ est fini, telles que pour toute configuration v, w telles que $w \geq v$, et pour tout $e \in \Lambda$,*

$$\mu_1(w_e)\mu_2(v^e) \geq \mu_1(w^e)\mu_2(v).$$

Si on suppose de plus que pour toute configuration u , $\mu_1(u)$ et $\mu_2(u)$ sont strictement positives, alors il est possible de coupler les réalisations w et v de μ_1 et μ_2 sur un même espace de probabilités de sorte que $w \geq v$ p.s. Et donc nous avons en particulier $\mu_1 \geq \mu_2$.

Soit μ une mesure strictement positive. On veut construire une chaîne de Markov $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers μ . Pour cela, nous allons définir la matrice de transition Q de telle manière que μ soit une mesure réversible. On pourra alors appliquer un théorème connu sur les processus aléatoires. On pose

- $Q(w, v) = 0$ si v diffère de w en plus d'un point,
- $Q(w, w_{-e}) = \frac{1}{C} (\frac{\mu(w_{-e})}{\mu(w)} \wedge 1)$, pour C assez grand,
- $Q(w, w) = 1 - \sum_e Q(w, w_{-e})$ ($Q(w, w) > 0$ si C est assez grand).

alors

$$\begin{aligned} Q(w, w_{-e})\mu(w) &= \frac{1}{C} \mu(w) \left(\frac{\mu(w_{-e})}{\mu(w)} \wedge 1 \right) \\ &= \frac{1}{C} (\mu(w_{-e}) \wedge \mu(w)) \\ &= \mu(w_{-e}) Q(w_{-e}, w) \text{ par symétrie} \end{aligned}$$

La chaîne est irréductible (on peut passer d'une configuration à une autre en changeant un nombre fini d'arêtes avec une probabilité strictement positive) récurrente positive (car le graphe est fini) et apériodique (car $Q(w, w)$ strictement positif). Donc μ est l'unique probabilité invariante et ainsi le processus X_n converge en loi vers μ presque sûrement.

Retour à la preuve : nous allons construire une chaîne de Markov $Z_n = (X_n, Y_n)$ sur l'espace des couples de configuration (w, v) tel que $w \geq v$. On suppose que $X_0(e) = Y_0(e) = 1$ pour tout e . Alors on définit la matrice de transition de la chaîne de Markov comme suit :

- $Q((w^e, v^e), (w_e, v_e)) = D \left(\frac{\mu_2(v_e)}{\mu_2(v^e)} \wedge 1 \right)$
- $\begin{cases} Q((w^e, v^e), (w_e, v_e)) = D \left(\frac{\mu_2(v_e)}{\mu_2(v^e)} \wedge 1 \right) \\ Q((w, v), (w, v)) = 1 - \sum_{(w', v') \neq (w, v)} Q((w, v), (w', v')) \end{cases}$ qui est positif par hypothèse
- $\begin{cases} Q((w_e, v^e), (w_e, v_e)) = D \left(\frac{\mu_2(v_e)}{\mu_2(v^e)} \wedge 1 \right) \\ Q((w_e, v^e), (w^e, v^e)) = D \left(\frac{\mu_1(w^e)}{\mu_1(w_e)} \wedge 1 \right) \\ Q((w, v), (w, v)) = 1 - \sum_{(w', v') \neq (w, v)} Q((w, v), (w', v')) \end{cases}$
- $\begin{cases} Q((w_e, v_e), (w^e, v^e)) = D \left(\frac{\mu_1(w^e)}{\mu_1(w_e)} \wedge 1 \right) \\ Q((w_e, v_e), (w_e, v^e)) = D \left(\frac{\mu_2(v^e)}{\mu_2(v_e)} \wedge 1 - \frac{\mu_1(w^e)}{\mu_1(w_e)} \wedge 1 \right) \\ Q((w, v), (w, v)) = 1 - \sum_{(w', v') \neq (w, v)} Q((w, v), (w', v')) \end{cases}$ qui est positif par hypothèse

où D est une constante suffisamment petite pour que toutes les valeurs citées précédemment soient dans $[0, 1]$.

Nous allons expliciter la matrice de transition de la première marginale :

$$\begin{aligned}
Q_1(w^e, w_e) &= \mathbb{P}(X_1 = w_e | X_0 = w^e) \\
&= \frac{\mathbb{P}(X_1 = w_e \cap X_0 = w^e)}{\mathbb{P}(X_0 = w^e)} \\
&= \sum_v \sum_{v'} \frac{\mathbb{P}((X_1, Y_1) = (w_e, v') \cap (X_0, Y_0) = (w^e, v))}{\mathbb{P}(Y_0 = w^e)} \\
&= \sum_v \sum_{v'} \mathbb{P}((X_1, Y_1) = (w_e, v') | (X_0, Y_0) = (w^e, v)) \frac{\mathbb{P}((X_0, Y_0) = (w^e, v))}{\mathbb{P}(Y_0 = w^e)} \\
&= \sum_v \sum_{v'} \mathbb{P}((X_1, Y_1) = (w_e, v') | (X_0, Y_0) = (w^e, v)) \mathbb{P}(Y_0 = v | X_0 = w^e) \\
&= \sum_v D\left(\frac{\mu_1(w_{1e})}{\mu_1(w^e)} \wedge 1\right) \mathbb{P}(Y_0 = v | X_0 = w^e) \\
&= D\left(\frac{\mu_1(w_{1e})}{\mu_1(w^e)} \wedge 1\right)
\end{aligned}$$

De la même façon, on montre que $Q_1(w_e, w^e) = D\left(\frac{\mu_1(w^e)}{\mu_1(w_e)} \wedge 1\right)$. On reconnaît la matrice de transition donnée au début de la preuve donc X converge en loi vers μ_1 . De même, Y converge en loi vers μ_2 .

La chaîne de Markov Z est irréductible, récurrente positive apériodique. Donc elle converge en loi vers une probabilité μ de marginales μ_1 et μ_2 . Or sur l'ensemble d'étude, les couples (w, v) vérifient $w \geq v$. Ce couplage implique $\mu_2 \leq \mu_1$. En effet, soit A un événement croissant

$$\mu_2(A) = \mathbb{P}(v \in A) \leq \mathbb{P}(w \in A) = \mu_1(A).$$

3.1.2 Petit lemme utile

Nous allons démontrer un petit lemme qui sera utile pour la suite :

Theorem 2. *Pour toute configuration $w \geq v$ et pour toute arête a , on a*

$$k(w_a) + k(v^a) \geq k(w^a) + k(v_a).$$

où $k(w)$ désigne le nombre de composantes connexes de w .

Preuve du Théorème 2.

On note que $k(w^a) - k(w_a)$ ne peut être égale qu'à 0 ou 1. Si cette différence prend la valeur 1, alors les extrémités de a ne sont pas reliées dans la configuration w^a . Mais alors, c'est aussi le cas pour v^a (car $w \geq v$). Donc dans tous les cas, on a $k(w^a) - k(w_a) \leq k(v^a) - k(v_a)$.

3.1.3 Conséquences du théorème de Holley

Theorem 3. *L'application $(p, q) \mapsto P_{p,q}$ est croissante par rapport à p et décroissante par rapport à q sur $[0, 1] \times [1, \infty)$. Pour tout $p \geq p'$ et $1 \leq q \leq q'$, on peut coupler des réalisations w et v de $P_{p,q}$ et $P_{p',q'}$ de sorte que $w \geq v$ presque sûrement.*

Preuve du théorème. Soit $w \geq v$ deux réalisations et e une arête. D'après le lemme précédent,

$$\frac{P_{p,q}(w_e)}{P_{p,q}(w^e)} = \frac{p}{1-p} q^{k(w_e)-k(w^e)} \geq \frac{p'}{1-p'} q'^{k(v_e)-k(v^e)} = \frac{P_{p',q'}(v_e)}{P_{p',q'}(v^e)}$$

On peut donc appliquer le théorème de Holley pour $\mu_1 = P_{p,q}$ et $\mu_2 = P_{p',q'}$.

Par le même type de raisonnement, en appliquant plus finement le théorème de Holley, on obtient le théorème suivant.

Theorem 4. Lorsque $q \geq q'$, $q \geq 1$, et $\frac{p}{q(1-p)} \geq \frac{p'}{q'(1-p')}$, on a $P_{p,q} \geq P_{p',q'}$.

Corollaire

Lorsque $q \geq 1$, $P_{p',1} \leq P_{p,q} \leq P_{p,1}$ pour $p' = \frac{p}{p+q(1-p)}$.

3.2 Comparaison des mesures en fonction du graphe

3.2.1 Inégalité FK satisfaite par $P_{p,q}$

Theorem 5. La mesure $P_{p,q}$ vérifie l'inégalité FKG. Ainsi, pour tous événements croissants A et B ,

$$P_{p,q}(A \cap B) \geq P_{p,q}(A)P_{p,q}(B).$$

De manière équivalente, si $P(B) > 0$, alors $P[A|B] \geq P(A)$.

Intuitivement, cette inégalité dit que deux événements croissants A et B sont forcément positivement corrélés pour une percolation. La probabilité conditionnelle de A sachant B est supérieure à la probabilité de A . Ceci est grosso modo dû au fait que B réalisé indique qu'un certain nombre d'arêtes sont ouverts, et ceci aide aussi A à être aussi réalisé.

Preuve du théorème.

Soit A et B deux événements croissants. Nous allons utiliser le théorème de Holley avec $\mu_2(w) = P_{p,q}(w)$ et $\mu_{1,\varepsilon}(w) = \frac{(\mathbb{1}_B(w) + \varepsilon)P_{p,q}(w)}{\int (\mathbb{1}_B(w) + \varepsilon)P_{p,q}(w)dw}$, qui est bien une mesure de probabilité. Donc, lorsque $w \geq v$, on évalue :

$$(\mathbb{1}_B(w^e) + \varepsilon)\mu_{1,\varepsilon}(w_e)\mu_2(v^e) = \mu_{1,\varepsilon}(w^e)\mu_2(v_e)q^{k(w_e)+k(v^e)-k(w^e)-k(v_e)}(\mathbb{1}_B(w_e) + \varepsilon).$$

Evidemment, $0 < \mathbb{1}_B(w^e) + \varepsilon \leq \mathbb{1}_B(w_e) + \varepsilon$. De plus, sachant $q \geq 1$, on peut utiliser le lemme utile pour montrer que $q^{k(w_e)+k(v^e)-k(w^e)-k(v_e)} \geq 1$; on en déduit

$$\mu_{1,\varepsilon}(w_e)\mu_2(v^e) \geq \mu_{1,\varepsilon}(w^e)\mu_2(v_e).$$

Donc d'après le théorème de Holley, $\mu_2(A) \geq \mu_{1,\varepsilon}(A)$; ainsi,

$$P_{p,q}(A) \leq \frac{\int_A (\mathbb{1}_B(w) + \varepsilon)P_{p,q}(w)dw}{\int (\mathbb{1}_B(w) + \varepsilon)P_{p,q}(w)dw}.$$

soit

$$P_{p,q}(A) \int (\mathbb{1}_B(w) + \varepsilon)P_{p,q}(w)dw \leq \int_A (\mathbb{1}_B(w) + \varepsilon)P_{p,q}(w)dw$$

Par convergence dominée, on obtient l'égalité souhaitée en faisant tendre ε vers 0.

3.2.2 Conséquences

Soit p et q fixés; soit $G_1 \subset G_2$ deux graphes. Soit w une configuration de la FK percolation sur G_2 . On définit naturellement la configuration associée sur G_1 , w_{G_1} , obtenue en ne gardant que l'état des arêtes de G_1 ; on obtient ainsi une nouvelle probabilité notée P_{p,q,G_2} sur G_1 que l'on va essayer de comparer avec la FK percolation sur G_1 .

Theorem 6. *Si $q \geq 1$, alors $P_{p,q,G_2} \geq P_{p,q}$.*

Preuve de théorème. Il suffit de voir que la loi de w_{G_1} sachant que toutes les arêtes de $G_2 \setminus G_1$ sont fermées pour w est exactement P_{p,q,G_1} ; l'inégalité FKG permet alors de conclure.

Soit $G_2.G_1$ le graphe obtenu en considérant G_2 dans lequel on a identifié tous les points de G_1 .

Theorem 7. *Si $q \geq 1$, alors $P_{p,q,G_2.G_1} \geq P_{p,q,G_2}$.*

Preuve de théorème.

Le même argument fonctionne puisque la loi P_{p,q,G_2} sachant que les arêtes de G_1 sont ouvertes est exactement $P_{p,q,G_2.G_1}$.

Nous verrons dans le chapitre suivant que ces résultats vont nous permettre de généraliser la FK-percolation à un volume infini.

4 FK percolation en volume infini

On supposera dans toute la suite que $q \geq 1$.

4.1 Mesures P^0 et P^1

4.1.1 Définitions

Nous allons construire deux mesures particulières sur l'ensemble des configurations de $\{0,1\}^A$ (où A désigne l'ensemble des arêtes de \mathbb{Z}^d), par passage à la limite lorsque n tend vers ∞ , de mesures dans les boîtes $\Lambda_n = [-n, n]^d$. L'inégalité FKG permettra de montrer une monotonie par rapport à n et ainsi d'obtenir l'existence des limites.

On note Λ_n^1 le graphe obtenu à partir de Λ_n en identifiant les sites du bord de Λ_n et on note Λ_n^0 le graphe obtenu en effaçant toutes les arêtes du bord de Λ_n (les arêtes joignant deux points du bord de Λ_n).

On définit alors pour tout n et tous p, q , les mesures $P_{p,q,n}$, $P_{p,q,n}^0$ et $P_{p,q,n}^1$ comme étant les mesures FK de paramètres p, q dans Λ_n , Λ_n^0 et Λ_n^1 respectivement. L'inégalité FKG montre que pour tout événement croissant A ne dépendant que des arêtes dans Λ_n , et pour tous p, q fixés,

$$P_n^0(A) \leq P_n(A) \leq P_n^1(A).$$

En outre, comme $\Lambda_n^0 \subset \Lambda_{n+1}^0$, lorsque A est un événement croissant qui ne dépend que de l'état d'un nombre fini d'arêtes, la suite $P_n^0(A)$ est croissante par rapport à n (pour n assez grand). De même, puisque Λ_n^1 peut être obtenu à partir de Λ_{n+1}^1 en contractant des arêtes, la suite $P_n^1(A)$ est décroissante. Ainsi, pour tout événement A croissant ne dépendant que d'un nombre fini d'arêtes, les suites $P_n^0(A)$ et $P_n^1(A)$ convergent vers des limites $\pi^0(A)$ et $\pi^1(A)$.

On admet, en utilisant le théorème de Kolmogorov, qu'il existe une unique mesure de probabilité P^0 sur l'espace produit tel que pour tout e_1, \dots, e_k , la loi de $w(e_1), \dots, w(e_k)$ coïncide avec celle définie par π_0 ; il en va de même pour P^1 .

4.1.2 Propriété d'invariance des mesures P^0 et P^1

Theorem 8. *Les mesures P^0 et P^1 sont invariantes par translation de vecteur à coordonnées entières.*

Preuve du théorème

Supposons que x est un voisin de l'origine. Comme $\Lambda_n^i \subset \Lambda_{n+1}^i + x \subset \Lambda_{n+2}^i$, si A est un événement croissant qui ne dépend que d'un nombre fini d'arêtes, alors

$$P_n^0(A) \leq P_{n+1}^0(A+x) \leq P_{n+2}^0(A).$$

Il en va de même pour P_1 avec des inégalités inversées.

On obtient, de plus, par passage à la limite, $P^i(A) = P^i(A+x)$.

Theorem 9. *Loi du 0 – 1 (admis).*

Si A est un événement invariant par translation, alors $P_{p,q}^i(A) \in \{0, 1\}$.

Conséquence : Soit N le nombre de composantes connexes infinies du graphe.

$$P_{p,q}^i(N=0) = 1 \text{ ou } P_{p,q}^i(N \geq 1) = 1.$$

Preuve L'événement $\{N = k\}$ est invariant par translations donc N est $P_{p,q}^i$ presque sûrement une constante.

On admet que N est presque sûrement à valeur dans $\{0, 1\}$.

4.2 Mesures FK en volume infini

Les mesures P^0 et P^1 donnent une manière de construire une mesure de type FK dans \mathbb{Z}^d . Y a-t-il d'autres mesures FK naturelles en dimension infinie? Pour répondre à cette question il faut introduire quelques définitions et notations : supposons que l'on se donne une relation d'équivalence ξ sur l'ensemble des sites du bord de Λ_n . On identifie alors les sites d'une même classe d'équivalence. Donc, pour toute configuration w sur les arêtes de Λ_n , on peut définir le nombre de composantes connexes $k_\xi(w)$ lorsque l'on identifie tous les points d'une même classe d'équivalence. Alors, on définit la mesure $P_{p,q,n}^\xi$ dite FK dans Λ_n avec condition au bord ξ par

$$P_{p,q,n}^\xi(w) = \frac{1}{Z_{p,q,\xi,n}} p^{o(w)} (1-p)^{f(w)} q^{k_\xi(w)}.$$

Supposons que w est une configuration dans $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$. Et si l'on restreint w au complémentaire de Λ_n , on définit une relation d'équivalence R_ξ entre points du bord de Λ_n

$$xR_\xi y \leftrightarrow (x \leftrightarrow y \text{ dans } \mathbb{Z}^d \setminus \Lambda_n).$$

On note $\xi_n(w)$ la donnée des connexions de w à l'extérieur de Λ_n . Nous disons qu'une probabilité P sur $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$ est une mesure FK en volume infini de paramètres p, q si pour tout n , la loi conditionnelle

de w restreint à Λ_n sachant $w_{\mathbb{Z}^d \setminus \Lambda_n}$ est exactement $P_{p,q,\xi_n(w),n}$. Plus précisément, ceci signifie que si l'on note G_n la tribu engendrée par $w_{\mathbb{Z}^d \setminus \Lambda_n}$, alors pour toute fonction f de w_{Λ_n} , on a presque sûrement

$$E(f(w_{\Lambda_n})|G_n) = P_{p,q,\xi_n(w),n}(f).$$

Theorem 10. (admis) Les mesures $P_{p,q}^0$ et $P_{p,q}^1$ sont des mesures FK en volume infini de paramètres p et q .

Theorem 11. Lorsque P est une mesure FK en volume infini de paramètres p et q , alors pour tout évènement croissant A ne dépendant que d'un nombre fini d'arêtes, on a

$$P_{p,q}^0(A) \leq P(A) \leq P_{p,q}^1(A).$$

Preuve du théorème 12 : Ceci découle directement du fait que pour toute condition au bord ξ de Λ_n , et tout évènement croissant mesurable par rapport à l'état des arêtes dans Λ_n , on a

$$P_n^1(A) \geq P_n^\xi(A) \geq P_n^0(A).$$

Ainsi, pour toute mesure P en volume infini $P_n^1(A) \geq P(A) \geq P_n^0(A)$; il suffit de faire tendre n vers l'infini.

4.3 Transition de phase

4.3.1 Propriétés et existence du paramètre critique

Définition de la valeur critique dans le cas de la percolation ordinaire ($q=1$)

L'ensemble $\{N \geq 1\}$ est croissant. D'après le paragraphe 3.1.3 (conséquences du théorème de Holley), l'application $p \mapsto P_{p,1}(N = 1)$ est croissante. Pour $q = 1$, P^0 et P^1 sont identiques et d'après le dernier théorème de la partie précédente (mesure FK en volume infini), il n'existe qu'une mesure de ce type. D'après la loi du tout ou rien, vraie pour P^0 , et la remarque qui la suit, N est presque sûrement une constante à valeur dans $\{0, 1\}$ et on admet que cette fonction n'est pas constante sur $]0, 1[$: pour p assez petit, il n'y a pas de composante connexe infinie et pour p proche de 1, il y en a une.

Par conséquent il existe une valeur critique p_c telle que la probabilité est nulle sur $[0, p_c[$ et égale à 1 sur $]p_c, 1]$.

Cas de la FK percolation

Theorem 12. Il existe $p_c(q) \in]0, 1[$ tel que

- pour tout $p < p_c(q)$, $P_{p,q}^i(0 \leftrightarrow \infty) = 0$ (il n'existe pas de composante connexe infinie);
 - pour tout $p > p_c(q)$, $P_{p,q}^i(0 \leftrightarrow \infty) = 1$ (il existe au moins une composante connexe infinie).
- En outre, $p_c(1) \leq p_c(q) \leq \frac{p_c q}{1+(q-1)p_c}$.

Preuve. Dans le cas fini, on a vu que $q \leq 1$, $P_{p',1} \leq P_{p,q} \leq P_{p,1}$ pour $p' = \frac{p}{p+q(1-p)}$; cela se généralise aisément en volume infini quitte à se restreindre à des boîtes finies et à passer à la limite. On en déduit que $P_{p,q}^i \leq P_{p,1}^i$. Donc pour tout $p < p_c(1)$, $P^i(0 \leftrightarrow \infty) = 0$ (on a utilisé le fait que $\{0 \leftrightarrow \infty\}$ est croissant). Et par le même type de raisonnement, on montre que $P_{p,q}^i(0 \leftrightarrow \infty)$ vaut 1 sur $] \frac{p_c q}{1+(q-1)p_c}, 1]$.

La fonction $p \mapsto P_{p,q}^i(0 \leftrightarrow \infty)$ étant croissante, on en déduit l'existence de $p_c(q)$.

4.3.2 FK percolation et dualité

Un graphe plan possède un nombre a d'arêtes, un nombre s de sites. On note k le nombre de ses composantes connexes, F le nombre de faces. La formule d'Euler nous dit que

$$a + k + 1 = s + F$$

Le graphe dual est alors défini de sorte que chaque face du graphe initial est un site du graphe dual. Les arêtes du graphe dual sont alors en bijection avec les arêtes du graphe initial (elles s'intersectent). On note e_* l'arête du graphe dual qui intersecte e . On a alors $s_* = F$ et $a_* = a$.

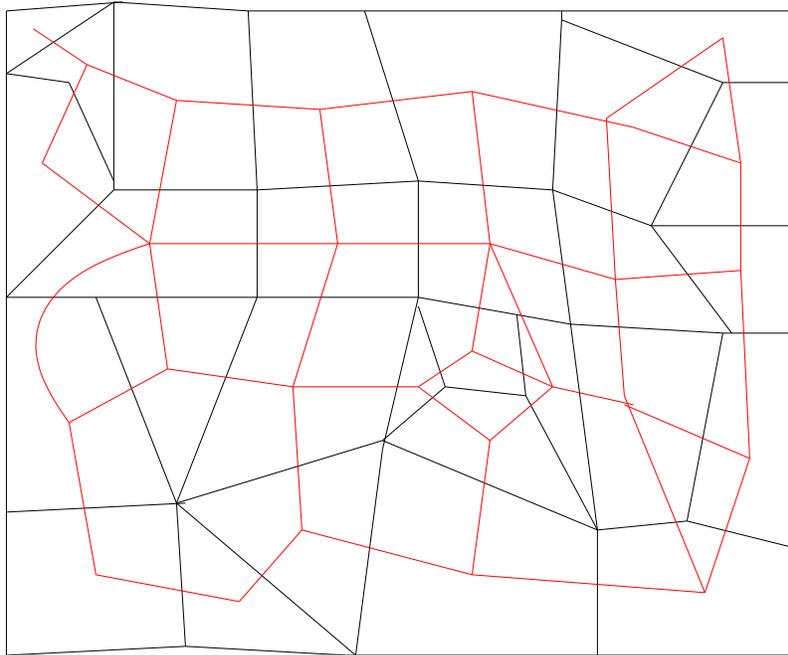


FIG. 2 – Graphe dual

Lorsque l'on a une configuration w de la FK percolation sur le graphe initial, on peut définir la configuration w_* sur le graphe dual par

$$w_*(e_*) = 1 - w(e).$$

Par exemple, dans le plan, le dual du graphe $[-n+1, n]$ est le graphe Λ_n décalé de $(1/2, 1/2)$. Nous avons, dans le cas général, la proposition suivante :

Theorem 13. *Lorsque w suit la loi $P_{p,q,G}$ sur un graphe fini plan G , alors la configuration duale w_* suit la loi P_{p_*,q,G_*} où p et p_* sont reliés par*

$$\frac{p}{1-p} \frac{p_*}{1-p_*} = q.$$

Ainsi, dans le plan, le dual d'une FK percolation est encore une FK percolation pour une même valeur de q .

Preuve

On a clairement $o(w_*) = a - o(w)$, de plus chaque composante connexe pour w^* correspond exactement à une face de w de sorte de $F(w) = k(w_*)$. Ainsi, par la formule d'Euler appliquée au graphe obtenu en ne gardant que les arêtes ouvertes pour w du graphe initial, on a

$$k(w) = -o(w) - 1 + F(w) + s = s - 1 - a + o(w_*) + k(w_*)$$

La loi obtenue pour w_* est donc donnée par

$$\begin{aligned} P_{p,q}(w_*) &= \frac{1}{Z_{p,q}} \left(\frac{p}{1-p}\right)^{o(w)} q^{k(w)} \\ &= \frac{1}{Z_{p,q}} \left(\frac{p}{1-p}\right)^a \left(\frac{1-p}{p}\right)^{o(w_*)} q^{s-1-a+o(w_*)+k(w_*)} \\ &= \left(\frac{1}{Z_{p,q}} \left(\frac{p}{1-p}\right)^a q^{s-1-a}\right) \left(\frac{(1-p)q}{p}\right)^{o(w_*)} q^{k(w_*)}. \end{aligned}$$

4.3.3 Conséquences dans \mathbb{Z}^2

Par passage à la limite du graphe Λ_n défini précédemment, nous déduisons du théorème précédent que si w suit une loi $P_{p,q}^0$ dans \mathbb{Z}^2 , alors la loi de w_* est $P_{p^*,q}^1$ dans le graphe dual.

Définissons la valeur

$$\kappa(q) = \frac{\sqrt{q}}{1 + \sqrt{q}}$$

qui va jouer un rôle important pour la suite (on a $\kappa(q) = \kappa(q)_*$). Le théorème suivant nous donne une inégalité sur $p_c(q)$:

Theorem 14. *Dans le plan \mathbb{Z}^2 , on a $P_{\kappa(q),q}^0(0 \leftrightarrow \infty) = 0$ et par conséquent, $p_c(q) \geq \kappa(q)$.*

Preuve Supposons que $P_{\kappa(q),q}^0(0 \leftrightarrow \infty) > 0$. Par croissance de l'évènement, il en va de même pour $P_{\kappa(q),q}^1(0 \leftrightarrow \infty)$. Alors il y a $P_{\kappa,q}^0$ p.s. une composante connexe infini. On a vu que la composante connexe est unique p.s. $P_{\kappa(q),q}^0(\Lambda_n \leftrightarrow \infty)$, qui désigne la probabilité pour qu'un des côtés de la boîte Λ_n soit relié à l'infini, tend vers 1. Comme les évènements "un côté donné de la boîte est relié à l'infini" sont positivement corrélés (inégalité FKG, admise en volume infini), leur probabilité tend aussi vers 1. Il en sera de même pour la portion du graphe dual car $\kappa(q)$ a été choisi pour que la loi sur Λ_{n^*} soit $P_{p,q,n}^1$. L'évènement A représenté sur la figure aura donc une probabilité strictement positive. Soit B l'évènement : "Toutes les arêtes de l'intérieur de Λ_n sont fermées". Montrons que $P_{\kappa(q),q}^0(A \cap B)$ est strictement positive.

$$P_{\kappa(q),q}^0(A \cap B) = P_{\kappa(q),q}^0(B|A)P_{\kappa(q),q}^0(A) \geq P_{\kappa(q),q}^1(B)P_{\kappa(q),q}^0(A)$$

car le conditionnement par l'évènement A est un conditionnement sur les arêtes extérieures à Λ_n , qui n'intervient donc sur la probabilité de l'évènement B que par les conditions aux bords qu'il impose sur $\partial\Lambda_n$, or la condition Λ_n^1 est extrémale. Or si A et B sont réalisés simultanément, les deux branches infinies qui partent du haut et du bas de la boîte Λ_n ne peuvent se rejoindre dans la boîte (car B est réalisé), ni à l'extérieur, car les composantes connexes infinies du graphe dual vont jouer le rôle de barrières infranchissables. Avec une probabilité strictement positive il y a donc au moins deux composantes connexes infinies ce qui est absurde.

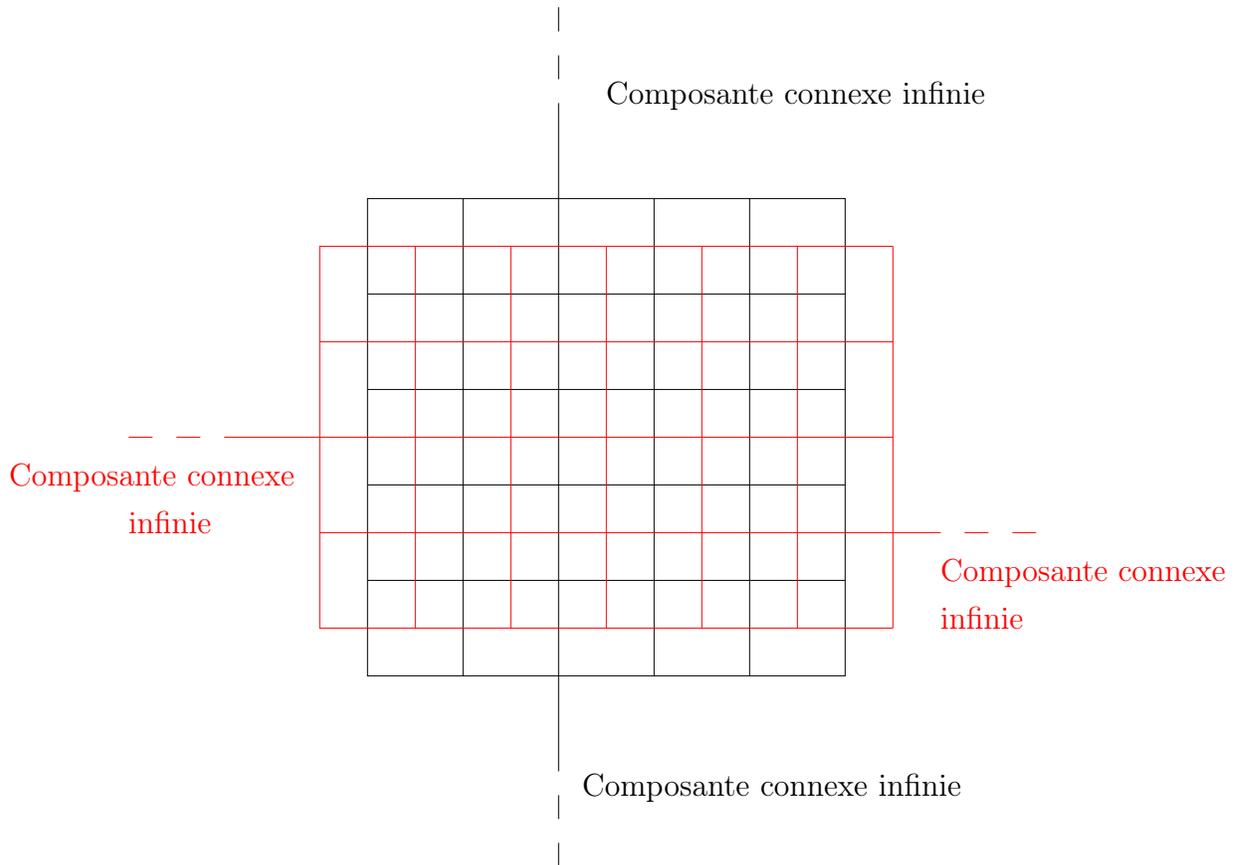


FIG. 3 – representation de l'événement A

5 Conclusion

Pour p assez grand, il y a transition de phase. En s'appuyant sur le couplage entre le modèle de la FK percolation et le modèle d'Ising, et en remarquant que celui-ci n'est valable que si $1 - p = \exp(-\beta)$, on observe donc une démagnétisation du métal pour β assez faible. Or β est justement inversement proportionnel à la température. On a donc justifié théoriquement l'existence de la température de Curie.

La FK percolation ouvre donc de vastes champs d'étude, que ce soit en mathématiques ou en physique statistique. Son intérêt réside dans l'observation des répercussions à grande échelle des modifications locales de son comportement. Bien que sa construction soit relativement simple, les problèmes qu'elle pose peuvent s'avérer très complexe. Ainsi, pour la percolation ordinaire de paramètre $p = p_c$, on ne sait toujours pas montrer que p.s. il n'y a aucune composante connexe infinie en dimension 3. Comme pour l'arithmétique, c'est aussi ce qui fait son charme : ses énoncés simples mais redoutables éveillent notre curiosité, et montrent, une fois de plus, que les mathématiques modernes ne s'enveloppent pas toujours dans un formalisme réhivitoire.

Références

- [1] Geoffrey R. Grimmett. The random cluster model. *Grundlehren der mathematischen wissenschaften*, Springer, Berlin, 1999.
- [2] Wendelin Werner. *Cours de percolation du Master 2 de Paris XI*, non publié.
- [3] Jean-François Le Gall. *Cours d'intégration, probabilités et processus aléatoires de l'E.N.S.*, non publié.