

Mémoire de troisième année : le modèle des urnes interagissantes

Nicolas COUDRAY

Directrice de thèse : Vlada LIMIC

11 octobre 2013

Table des matières

1	Introduction	2
2	Le modèle des urnes interagissantes	3
2.1	Définition	3
2.2	Principaux résultats connus	4
3	Quelques mots sur les marches aléatoires renforcées	9
	Références	10

1 Introduction

La théorie des probabilités est une théorie très jeune dans l'histoire des mathématiques, et comme toute théorie, les recherches se sont d'abord concentrées sur les objets les plus simples de ce domaine. Ainsi, les objets probabilistes faisant grandement intervenir l'indépendance sont ceux qui ont été étudiés les premiers, leur simplicité en faisant un très bon point de départ pour parvenir à comprendre le comportement des différents modèles probabilistes. Percolation, marche aléatoire simple, mouvement brownien, processus de Poisson, chaînes de Markov etc... sont autant d'objets bien connus qui ne demandent qu'à pouvoir être généralisés à des classes de modèles plus généraux.

Ainsi, après l'étude des marches aléatoires simples (où à chaque sommet du graphe, le choix de l'arête à emprunter se fait indépendamment du passé), il était naturel de s'intéresser à d'autres types de marches aléatoires. L'une d'entre elles est la marche aléatoire renforcée : à chaque intersection, la probabilité que le "marcheur" choisisse de passer par une arête est d'autant plus grande que l'on a visité de fois cette arête.

Il existe différents types de marches aléatoires renforcées : on peut en effet choisir de compter le nombre de visites de chaque sommet ou de chaque arête, avoir un graphe orienté ou non, etc... mais dans tous les cas, nos connaissances sur le comportement de celles-ci sont pour l'instant assez incomplètes.

Par exemple pour les marches aléatoires affinement renforcées par arête sur \mathbb{Z}^d , on ne sait pas encore pour $d \geq 2$ si la marche aléatoire revient p.s. à l'origine. C'est d'ailleurs une question qui a suscité de nombreuses discussions. (Pour \mathbb{Z}^2 , F.Merkl et W.Rolles [7] ont démontré un résultat assez proche : quitte à "démultiplier" chaque arête du réseau en les remplaçant par un nombre suffisamment grand d'arêtes en série (plus de 130), alors la marche aléatoire renforcée affinement est récurrente sous certaines conditions.)

Bien avant les débuts des marches aléatoires renforcées, George Pólya avait déjà introduit en 1930 [10] le célèbre modèle d'urne portant son nom. Ici, on considère une urne contenant initialement une boule noire et une boule blanche et à chaque étape, on pioche une boule au hasard puis on la remet en place tout en ajoutant une nouvelle boule de la couleur tirée. On voit clairement que ce modèle fait intervenir une forme de renforcement : plus une couleur est présente dans l'urne, plus on a de chances de tirer une boule de cette couleur. D'ailleurs on peut facilement lier le modèle de l'urne de Pólya avec celui d'une marche aléatoire sur un graphe en étoile : en effet, si l'urne possède initialement plusieurs couleurs et que l'on associe chaque couleur à un sommet d'un graphe étoilé, on peut alors considérer la marche aléatoire qui, partant du centre du graphe, se déplace vers le sommet correspondant à la boule tirée, puis revient au centre à l'étape suivante.

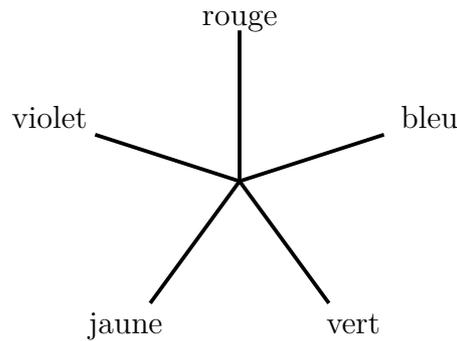


FIGURE 1 – Marche aléatoire renforcée associée à l’urne de Pólya (cas 5 couleurs)

Depuis les travaux de Pólya, son modèle a été largement généralisé. En particulier, dans le modèle couramment étudié, on considère une urne initialement vide et l’on se donne une suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de poids strictement positifs (et généralement croissante) telle que si B_n et W_n sont respectivement le nombre de boules noires et blanches à l’instant n , alors à l’instant $n + 1$, la probabilité de piocher du noir est proportionnelle à w_{B_n} , autrement dit :

$$\mathbb{P}[\text{On tire du noir à l’instant } n + 1 \mid B_n \text{ et } W_n] = \frac{w_{B_n}}{w_{B_n} + w_{W_n}} = \frac{w_{B_n}}{w_{B_n} + w_{n-B_n}}.$$

On ajoute ensuite comme précédemment une boule de la couleur tirée à l’urne.

Enfin, une des dernières généralisations des urnes de Pólya est celle que j’ai étudiée au cours de mon mémoire de M2 : le modèle des urnes interagissantes. Ici, on dispose de plusieurs urnes et à chaque instant elles piochent toutes simultanément de la manière suivante : chaque urne effectue avec probabilité $1 - p$ le tirage du modèle précédent et avec probabilité p un tirage en considérant l’ensemble des boules de toutes les urnes. Ainsi, si $p > 0$, ce que pioche une urne est influencé par le contenu des autres.

Bien évidemment, à chacun des ces modèles d’urnes correspond un modèle similaire de marche aléatoire. En particulier, les urnes interagissantes correspondent à un modèle où plusieurs particules sont en mouvement sur un graphe et où les probabilités de choisir un chemin à chaque instant dépendent à la fois de la mémoire individuelle de la particule, mais aussi d’une mémoire collective.

2 Le modèle des urnes interagissantes

2.1 Définition

Il existe différentes manières de faire interagir des urnes. Le modèle qui nous intéresse est celui introduit par M.Launay [4]. Il est défini de la manière suivante : On se donne une suite de *poids de renforcement* $(w_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telle que $\forall k \in \mathbb{N}, w_k > 0$, deux entiers $U \geq 1$ (le nombre d’urnes considérées) et $C \geq 2$ (le nombre de couleurs différentes de boules), un

paramètre $p \in [0, 1]$ et un ensemble $\mathfrak{C} := \{\mathfrak{c}_1, \dots, \mathfrak{c}_C\}$ (l'ensemble des couleurs de boules). On définit alors pour $1 \leq u \leq U$, $n \in \mathbb{N}$ et $1 \leq k \leq C$, $\mathfrak{c}_{k,n}^u$ le nombre de boules de la couleur \mathfrak{c}_k à l'instant n dans l'urne numéro u . Pour simplifier les notations, on définit également $\mathfrak{c}_{k,n}^* := \sum_{1 \leq u \leq U} \mathfrak{c}_{k,n}^u$ le nombre total de boules de couleur \mathfrak{c}_k dans toutes les urnes. L'évolution des ces variables se fait de la manière suivante :

- À l'instant $n = 0$, toutes les urnes sont vides.
- À un instant $n \geq 1$, l'urne u suit le comportement suivant :
 - Avec probabilité p , elle effectue un tirage "global" : on ajoute alors une boule de couleur \mathfrak{c}_k avec probabilité $\frac{w_{\mathfrak{c}_k,n}^*}{\sum_{1 \leq \ell \leq C} w_{\mathfrak{c}_\ell,n}^*}$ (bien sûr on fait cela de manière exclusive : on ajoute exactement une boule à chaque étape).
 - Avec probabilité $1 - p$, elle effectue un tirage "individuel" : on ajoute alors une boule de couleur \mathfrak{c}_k avec probabilité $\frac{w_{\mathfrak{c}_k,n}^u}{\sum_{1 \leq \ell \leq C} w_{\mathfrak{c}_\ell,n}^u}$.

En d'autres termes, la probabilité d'ajouter une boule de couleur \mathfrak{c}_k est proportionnelle au poids correspondant au nombre de boules de cette couleur déjà présentes, où le nombre de boules comptées correspond soit à toutes les urnes réunies, soit à l'urne seule.

Dans les cas non triviaux ($0 < p < 1$, $U \geq 2$, $C \geq 2$), le comportement de ces urnes est encore assez mal connu. Il a été complètement résolu par Launay dans le cas sur-exponentiel ($\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{w_{n+1}}{w_n} > 1$) [4], mais même pour des poids assez simples comme des poids polynomiaux, on ne sait pas encore quel comportement suivent les urnes. C'est d'ailleurs une petite variation de ce modèle que j'ai étudié au cours de mon mémoire de M2 dans le cas polynomial, en espérant pouvoir trouver des techniques adaptables à celui-ci.

Les modèles que j'ai étudiés au cours de mon mémoire de M2 sont les suivants :

1. On possède une urne déterministe dans laquelle on ajoute une boule noire à chaque instant et une deuxième urne qui, elle, est interagissante et suit le modèle précédent (avec probabilité p elle effectue un tirage global et sinon elle fait un tirage individuel)
2. On possède une urne qui tire toujours du noir, une autre qui tire toujours du blanc et une dernière urne qui suit le modèle de l'urne interagissante.

Dans le cas sur-exponentiel, on peut assez facilement se ramener aux résultats de Launay, mais la simplicité de ces modèles permet aussi d'étudier facilement leur comportement dans le cas polynomial. Les résultats obtenus au cours de mon mémoire vont un peu plus loin et permettent de résoudre le cas polynomial pour toute une classe de modèles d'urnes, tant qu'une seule d'entre elles a un comportement aléatoire.

2.2 Principaux résultats connus

Comme annoncé précédemment, le principal résultat sur les urnes interagissantes correspond au cas sur-exponentiel. On se place donc dans le cas $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{w_{n+1}}{w_n} > 1$ et (en reprenant les notations précédentes) on a alors le théorème suivant :

Théorème 1. (Launay [4])

- Si $p \geq \frac{1}{2}$, p.s. après un temps fini, les urnes piochent toujours la même couleur.
- Si $p < \frac{1}{2}$, p.s. $\exists \mathbf{c}_k \in \mathfrak{C}$ (la couleur globalement majoritaire) tel que $\forall u \leq U$,
 - Soit l'urne u ne pioche que la couleur \mathbf{c}_k après un temps fini (on dit que l'urne u est *conformiste*).
 - Soit il existe une couleur $\mathbf{c}_\ell \neq \mathbf{c}_k$ telle que après un temps fini, l'urne u pioche la couleur \mathbf{c}_k quand elle fait un tirage global, et pioche la couleur \mathbf{c}_ℓ quand elle fait un tirage individuel (on dit que l'urne u est *anticonformiste*). De plus, si on note N_c le nombre d'urnes conformistes et $N_a(\ell)$ le nombre d'urnes anticonformistes qui tirent la couleur \mathbf{c}_ℓ quand elles font un tirage individuel, alors :

$$\forall \ell \neq k, N_a(\ell) < N_c + \frac{p}{1-p}U.$$

(Cette inégalité implique entre autre que \mathbf{c}_k est la couleur majoritaire asymptotiquement.)

La démonstration de ce théorème peut être trouvée dans [4]. L'idée est assez difficile à résumer en quelques lignes : par exemple pour le cas $p > \frac{1}{2}$, on montre essentiellement qu'avec une probabilité uniformément minorée en n_1 , la connaissance des instants où ont lieu les tirages globaux ainsi que de ce qu'il se passe sur ces tirages nous assure que chaque tirage global après l'instant n_1 donne une boule de la couleur qui était majoritaire à l'instant n_1 . Ensuite puisque les tirages globaux sont très fréquents ($p > \frac{1}{2}$), cela nous permet de conclure par des arguments de filtrations que toutes les urnes finissent par ne piocher qu'une seule couleur.

Malheureusement, cette démonstration ne s'adapte pas à des poids moins fort que les poids exponentiels, et le comportement des urnes dans les autres cas nous échappe encore.

Un autre résultat connu correspond au cas $p = 1$ et $C = 2$ (deux couleurs). En effet, dans ce cas particulier, les tirages sont toujours globaux et donc le modèle se comporte comme une seule grande urne dans laquelle on tirerait U boules à chaque instant. On a alors le théorème suivant :

Théorème 2. (Launay [6])

Dans le cas $p = 1$, si $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{w_n} < \infty$ et si w est croissante, alors p.s. après un temps fini, on ne pioche que la même couleur.

Remarques.

1. Les conditions w croissante et $C = 2$ ne sont peut-être pas nécessaires mais le théorème n'a été prouvé qu'avec ces hypothèses.
2. Dans le cas d'une seule urne ($U = 1$), Davis a démontré en 1990 [1] que la condition $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{w_n} < \infty$ est nécessaire et suffisante mais elle ne l'est pas pour $U \geq 2$ (on pourra trouver un contre-exemple dans [6]).

3. On peut se donner rapidement une idée de pourquoi les quantités $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{w_n U + n_0}$ jouent un rôle aussi important dans ce théorème. En effet, si l'on calcule la probabilité de ne tirer toujours que du noir, on obtient ceci :

$$\mathbb{P}(\text{Les urnes ne tirent que du noir}) = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{w_n U}{w_n U + w_0}$$

$$\ln \mathbb{P}(\text{Les urnes ne tirent que du noir}) = - \sum_{n=0}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{w_0}{w_n U}\right).$$

Et bien évidemment, si $w_n U \rightarrow \infty$, alors $\ln\left(1 + \frac{w_0}{w_n U}\right) \sim \frac{w_0}{w_n U}$ et donc la somme précédente sera finie (i.e il est possible de ne piocher que du noir) ssi $(\frac{1}{w_n U})_{n \in \mathbb{N}}$ est sommable.

On peut noter que dans le cas polynomial ($w_n = (n+1)^\rho$ avec $\rho > 0$), la limite pour la condition $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{w_n} < \infty$ correspond au cas linéaire : $w_n = n+1$ qui est presque le modèle originel de Pólya. En effet, l'urne de Pólya correspond au cas $U = 1$ et $C = 2$ pour lequel on démarrerait à l'instant $n = 0$ avec une urne qui contient déjà une boule de chaque couleur et des poids $w_n = n$. C'est bien évidemment le modèle qui se rapproche le plus d'une urne "réelle" où les chances de tirer une couleur sont proportionnelles au nombre de boules de cette couleur présentes dans l'urne. On est capable pour l'urne de Pólya d'exprimer exactement le comportement asymptotique de l'urne. Si à l'instant $n = 0$ l'urne contient $B_0 = b \geq 1$ boules noires et $W_0 = w \geq 1$ boules blanches, et si l'on note $f_n := \frac{B_n}{B_n + W_n}$ la proportion de boules noires dans l'urne à l'instant n , alors on a le théorème suivant :

Théorème 3. *La variable aléatoire f_n converge p.s. vers une variable aléatoire f de distribution $\beta(b, w)$, c'est à dire que f est une variable aléatoire absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$, de densité $Cx^{b-1}(1-x)^{w-1}$ (Et pour que l'on ai une mesure de probabilité, alors $C = \frac{\Gamma(b+w)}{\Gamma(b)\Gamma(w)}$).
(En particulier pour $b = w = 1$, la proportion asymptotique suit la loi uniforme sur $[0, 1]$).*

La démonstration de ce point n'est pas trop compliquée et peut être trouvée dans [8]. Elle repose essentiellement sur la remarque que la probabilité de tirer une certaine séquence de couleurs est invariante par permutation : si on note $\mathbf{c}_n \in \{\mathbf{b}, \mathbf{w}\}$ la couleur piochée à l'instant n (respectivement \mathbf{b} pour noir et \mathbf{w} pour blanc) et si l'on fixe $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) \in \{\mathbf{b}, \mathbf{w}\}^n$ un n -uplet de couleurs qui contient exactement k fois la couleur noire, alors

$$\mathbb{P}[(\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_n) = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)] = \frac{\prod_{i=0}^{k-1} (b+i) \prod_{i=0}^{n-k-1} (w+i)}{\prod_{i=0}^{n-1} (b+w+i)}.$$

Or cette quantité est indépendante de l'ordre dans lequel les différentes couleurs sont piochées et ne dépend que de la configuration à l'instant n , et donc

$$\mathbb{P}[B_n = B_0 + k] = \binom{n}{k} \frac{\prod_{i=0}^{k-1} (b+i) \prod_{i=0}^{n-k-1} (w+i)}{\prod_{i=0}^{n-1} (b+w+i)}.$$

Et il est ensuite assez simple d'en déduire la distribution limite.

Le cas polynomial des urnes interagissantes est encore irrésolu et leur comportement reste inconnu dans ce cas. Néanmoins, on est capable de dire des choses lorsque l'on n'a qu'une seule urne au comportement aléatoire. C'est un théorème qui découle d'un article de B.Hill, D.Lane et W.Sudderth de 1980 [3] (bien qu'il n'avait pas pu l'appliquer précisément au cas des urnes interagissantes puisque le modèle est plus récent) et que j'ai redémontré en partie au cours de mon mémoire de M2 par d'autres méthodes (n'ayant appris l'existence de cet article qu'à la fin du mémoire).

On considère une urne qui ne pioche que deux couleurs (noir et blanc) définie comme suit : on se donne un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sur lequel on dispose d'une suite de variables aléatoires $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ indépendantes et identiquement distribuées selon la loi uniforme. On note $\mathcal{F}_n := \sigma(V_k / 1 \leq k \leq n)$ la filtration associée à cette suite. On note B_n, W_n le nombre de boules respectivement de couleur noire et blanche dans l'urne à l'instant n et on note $f_n := \frac{B_n}{n}$ la proportion de noir à l'instant n . On suppose qu'à l'instant $n+1$, on ajoute une boule noire dans l'urne si et seulement si $V_{n+1} < g_n(f_n)$ (et sinon on ajoute une boule blanche) et que les fonctions g_n sont continues et convergent uniformément quand n tend vers l'infini vers une fonction g . On suppose de plus que les points fixes de g sont tous isolés. Alors on a le théorème suivant :

Théorème 4. *Sous les hypothèses précédentes,*

1. *p.s. f_n converge vers un point fixe de la fonction g .*
2. *Si f est un point fixe de g tel qu'il existe un voisinage ouvert (dans $[0, 1]$) de f , noté V , pour lequel*

$$\forall f' \in V, (f' > f \Rightarrow g(f') < f') \text{ et } (f' < f \Rightarrow g(f') > f'),$$

alors la probabilité que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers f est strictement positive. (Ceci inclue en particulier le cas où g est dérivable en f et $g'(f) < 1$)

Remarque. *L'article [3] démontre également que dans le cas où g est dérivable en f et $g'(f) > 1$, alors f ne peut pas être la limite de f_n .*

Ce théorème nous permet par exemple de connaître en partie le comportement d'une urne suivant le MUI (modèle de l'urne interagissante) accompagnée d'un certain nombre d'urnes au comportement déterministe (en partie seulement, car pour certaines valeurs des paramètres, la fonction g peut avoir un point fixe f avec $g'(f) = 1$ ou des points fixes non

isolés, mais ce n'est le cas que pour quelques valeurs critiques) et l'on peut espérer que ce résultat pourrait un jour être généralisé au cas où plusieurs urnes suivent le MUI.

L'idée derrière ce théorème est en fait assez simple. Considérons pour simplifier le cas où $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et une suite constante ($\forall n \in \mathbb{N}, g_n = g$). Si n est très grand et que f_n est proche d'une certaine proportion f avec $g(f) \neq f$ (prenons par exemple $g(f) > f$), alors intuitivement, f_n va rester dans un voisinage de f pendant suffisamment de temps pour qu'une sorte de loi des grands nombres puisse s'appliquer : pendant quelques coups, la proportion de boules noires tirées sera environ $g(f)$ et donc la proportion totale de noir dans l'urne augmente petit à petit et ne pourra pas rester indéfiniment près d'un point qui ne serait pas fixe. La démonstration que j'ai faite de ce théorème consiste essentiellement à rendre rigoureux cet argument intuitif.

Voici un exemple de fonction que l'on peut obtenir lorsque l'on dispose d'une urne déterministe qui ne pioche que du noir et d'une autre urne qui suit le MUI :

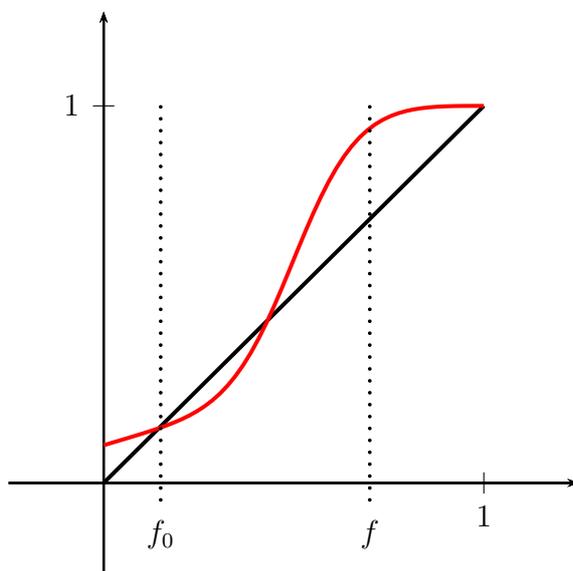


FIGURE 2 – Fonction g dans le cas $p = 0.2$ et $w_n = (n + 1)^3$.

On remarque pour certaines valeurs l'apparition d'un point fixe stable f_0 différent de 1 (1 est toujours point fixe stable dans ce modèle). Cela peut nous donner quelques idées sur ce qu'il pourrait se passer dans des cas plus complexes, comme par exemple celui de deux urnes suivant le MUI. On peut facilement imaginer à partir de ce résultat l'existence de proportions asymptotiques non triviales (i.e. différentes de 0 ou 1) dans le cas de plusieurs urnes.

Il existe bien évidemment d'autres modèles d'urnes interagissantes. L'un d'entre eux par exemple est celui des urnes spatiales : on assigne une urne à chaque sommet d'un graphe et à chaque instant, chaque urne pioche une boule en fonction des boules qu'elle même et toutes ses voisines contiennent. Le sujet a été brièvement étudié par Launay au cours de sa thèse [5] et on pourra y trouver quelques résultats sur la nature des sous graphes aléatoires

correspondants à l'ensemble des sommets des urnes qui se fixent sur une certaine couleur.

Les domaines d'application des urnes sont assez nombreux : économie, biologie, statistiques... On pourra se référer à l'article de Permante [8] où il expose une liste assez conséquente. De manière générale, les processus à renforcement trouvent leur utilité pour modéliser des systèmes à mémoire. Typiquement si l'on dispose de plusieurs "agents" qui font un choix en fonction des choix déjà effectués par d'autres, alors le modèle des urnes interagissantes peut s'avérer utile.

L'urne de Pólya permet par exemple de modéliser le comportement des consommateurs lorsque de nouveaux produits de qualités à peu près similaires sortent sur le marché au même moment. Cette modélisation est due à l'économiste W. Brian Arthur. L'idée est très simple : pour des raisons diverses, les consommateurs ont tendance à acheter les produits qui ont déjà le plus de parts de marché (Par exemple pour les nouveaux formats vidéo comme le cas des Blue-ray et des DVD HD, plus une technologie est répandue, plus l'industrie du cinéma est susceptible de l'utiliser pour ses films. Le catalogue de la technologie qui possède le plus d'adeptes s'étoffe donc plus rapidement ce qui encourage les nouveaux consommateurs à choisir de préférence cette technologie). On constate donc un effet de renforcement qui peut être modélisé de manière très simple et très efficace avec une urne de Pólya.

Le principe des urnes interagissantes trouve son utilité dans des situations un peu plus complexes. Par exemple, si plusieurs individus font des choix en fonction de leurs choix passés ainsi que de ceux des autres individus. On pourra penser par exemple aux fourmières : chaque fois qu'une fourmi choisit un chemin, elle dépose des phéromones et donc les chemins les plus empruntés deviennent par la suite plus probables. Évidemment le modèle des urnes interagissantes ne peut être qu'un modèle grossier pour la fourmière car on ne peut considérer que les cas où un nombre fini de chemins est possible. Pour aller plus loin, il serait nécessaire d'utiliser des marches aléatoires renforcées interagissantes.

3 Quelques mots sur les marches aléatoires renforcées

Le modèle le plus simple qui vient à l'esprit lorsque l'on parle de marches aléatoires renforcées est celui introduit en 1987 par Diaconis [2] : celui des marches aléatoires renforcées par arêtes. Le modèle est très simple : On se donne un graphe $G = (V, E)$ (de degré fini) pour lequel on note $v \sim w$ si les sommets $v \in V$ et $w \in V$ sont voisins. On se donne également un sommet de départ $v_0 \in V$. On pose $X_0 := v_0$ et $\forall e \in E, W(e, 0) = 1$. On définit alors par récurrence les processus aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(W(e, n))_{e \in E, n \in \mathbb{N}}$ et la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de la manière suivante : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{F}_n := \sigma(X_0, \dots, X_n)$, pour $e \in E$, $W(e, n) = W(e, n-1) + \mathbb{1}_{\{X_{n-1}, X_n\} = e}$ et X_{n+1} est défini par :

$$\forall w \sim X_n, \mathbb{P}[X_{n+1} = w | \mathcal{F}_n] = \frac{W(\{X_n, w\}, n)}{\sum_{z \sim X_n} W(\{X_n, z\}, n)}.$$

En d'autres termes, à chaque instant la probabilité que la marche aléatoire aille en w est proportionnelle au nombre de fois qu'elle a visité l'arête $\{X_n, w\}$ par le passé plus 1.

Bien évidemment, ce modèle peut être généralisé comme pour les urnes en utilisant une suite de poids arbitraire $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou en considérant plusieurs "marcheurs" (l'équivalent des urnes interagissantes pour les marches aléatoires) mais de nombreuses questions simples restent encore ouvertes même pour les poids linéaires. Par exemple, on ne sait pas encore si la marche aléatoire linéaire par sommet sur \mathbb{Z}^d ($d \geq 2$) revient à l'origine avec probabilité 1 (Pour $d = 1$, la réponse est non. En effet, Pemantle et Volkov ont démontré en 1988 [9] que la marche aléatoire renforcée par sommet sur \mathbb{Z} est bornée, et Tarrès [11] a ensuite affiné leur résultat en démontrant qu'elle finit par se fixer sur exactement 5 sommets).

Comme expliqué plus haut, l'exemple d'application le plus simple pour ces marches aléatoires est celui des fourmis (et d'autres organismes aux comportements similaires tels que les Myxomycètes) : le modèle des marches aléatoire renforcée avec interaction pourrait permettre d'étudier leur comportement de manière assez simple. Cette modélisation bien que plus compliquée que le MUI est plus précise car elle permet d'étudier des chemins plus complexes qu'avec les urnes.

Références

- [1] Burgess Davis. Reinforced random walk. *Probability Theory and Related Fields*, 84(2) :203–229, 1990.
- [2] Persi Diaconis. Recent progress on de Finetti's notions of exchangeability. In *Bayesian statistics, 3 (Valencia, 1987)*, Oxford Sci. Publ., pages 111–125. Oxford Univ. Press, New York, 1988.
- [3] Bruce M Hill, David Lane, and William Sudderth. A strong law for some generalized urn processes. *The Annals of Probability*, 8(2) :214–226, 1980.
- [4] Mickaël Launay. Interacting Urn Models. *ArXiv e-prints*, January 2011.
- [5] Mickaël Launay. *Urn Interagissantes*. PhD thesis, Aix-Marseille Université, Juin 2011.
- [6] Mickaël Launay. Urns with simultaneous drawing. *ArXiv e-prints*, January 2012.
- [7] Franz Merkl and Silke W. W. Rolles. Recurrence of edge-reinforced random walk on a two-dimensional graph. *Ann. Probab.*, 37(5) :1679–1714, 2009.
- [8] Robin Pemantle. A survey of random processes with reinforcement. *Probab. Surv.*, 4 :1–79, 2007.
- [9] Robin Pemantle and Stanislav Volkov. Vertex-reinforced random walk on \mathbf{Z} has finite range. *Ann. Probab.*, 27(3) :1368–1388, 1999.
- [10] George Pólya. *Sur quelques points de la théorie des probabilités*. Imprimerie de Presses Universitaires de France, 1930.
- [11] Pierre Tarrès. Vertex-reinforced random walk on \mathbb{Z} eventually gets stuck on five points. *Ann. Probab.*, 32(3B) :2650–2701, 2004.