Examen de processus stochastiques (FIMFA, première année), 27 mai 2009, durée 3h. Les notes de cours et les calculatrices ne sont pas autorisées. Barème indicatif: Mini-exercices sur 3,5 points, le dernier exercice sur 6 points.

Mini-exercice 1. *"Quand faut-il ouvrir la deuxième caisse de la supérette?")*
On se donne un entier strictement positif j_0 et on définit la fonction de transition Q sur l'espace des entiers naturels telle que:

•$Q(0,0) = Q(0,1) = 1/2$.

•Pour tout $j \in \{1, \dots, j_0\}$, $Q(j, j+1) = Q(j, j-1) = 1/2$.

•Pour tout $j \geq j_0 + 1$, $Q(j, j+1) = 1/3$ et $Q(j, j-1) = 2/3$.

1) Est-elle irréductible? Est-elle apériodique?
2) Existe-t-il une loi stationaire réversible à l'équilibre? Q définit-elle des chaînes récurrentes positives?
3) On suppose que $(X_n, n \geq 0)$ est une chaîne de Markov de fonction de transition Q. Que peut-on dire du comportement asymptotique de $P(X_n = 0)$ lorsque $n \to \infty$?

Mini-exercice 2. *(Variation simple autour de l'urne de Pólya).*
On a une urne contenant au début trois boules rouges et une boule bleue. A chaque instant entier strictement positif, on tire une boule au hasard dans l'urne, on regarde sa couleur et on la remet dans l'urne, puis on repioche une boule dans l'urne, on regarde encore sa couleur et on la remet dans l'urne:

•Si on a pioché 2 boules bleues, on rajoute dans le sac 2 boules bleues.

•Si on a pioché 2 boules rouges, on rajoute dans le sac 2 boules rouges.

•Si on a pioché une boule de chaque couleur, on rajoute une rouge et une bleue.
Ainsi, à chaque instant $n \geq 0$, il y a $N_n = 4 + 2n$ boules dans l'urne, on note respectivement R_n et B_n les nombres de boules rouges et bleues dans le sac, et on pose $X_n = R_n / N_n$. On définit aussi la tribu $\mathcal{F}_n = \sigma(R_0, R_1, \dots, R_n)$.

1) a) Montrer que pour tout $n \geq 0$, $E(R_{n+1} - R_n \mid \mathcal{F}_n) = 2X_n$.
b) En déduire que $(X_n, n \geq 0)$ est une martingale dans la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$.
c) Que peut-on dire de X_n lorsque $n \to \infty$?
4) a) Soit T un temps d'arrêt (par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_n)$) qui est presque sûrement fini. A-t-on forcément $E(X_T) = 3/4$?
b) Montrer qu'avec probabilité strictement positive, la proportion de boules rouges dans le sac reste toujours supérieure ou égale à $3/4$.

Mini-exercice 3. On se donne un mouvement brownien $(B_t, t \geq 0)$ réel standard issu de $B_0 = 0$. Pour tout $a > 0$, on pose $T_a = \inf\{t > 0 \ : \ B_t = a\}$.
1) Justifier rapidement le fait que presque sûrement, T_a est fini pour tout $a > 0$.
2) Montrer que pour tout $a > 0$ et tout λ réel, $T_{\lambda a}$ et $\lambda^2 T_a$ ont même loi.
3) Soit $b > 0$. On se donne une variable aléatoire $\tilde{T}_b$ indépendante de $(B_t, t \geq 0)$ et de même loi que T_b. Montrer que T_{a+b} et $T_a + \tilde{T}_b$ ont même loi.
4) On pose pour tout λ réel, $f(\lambda) = E(\exp(-\lambda^2 T_1))$.
a) Montrer que pour tous λ et λ' positifs, $f(\lambda + \lambda') = f(\lambda) f(\lambda')$.
b) Justifier rapidement le fait que $\lambda \mapsto f(\lambda)$ est dérivable sur $(0, \infty)$.
c) En conclure qu'il existe $u > 0$ tel que pour tout λ positif, $f(\lambda) = \exp(-\lambda u)$.

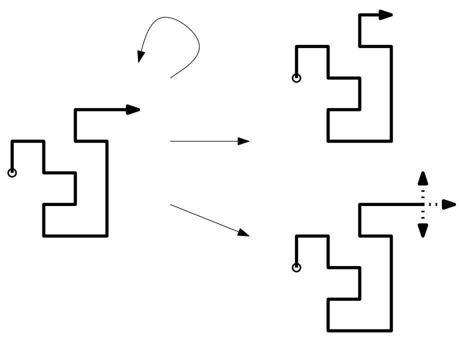
Mini-exercice 4. On considère une chaîne de Markov définie sur l'espace $\mathcal{S}$ des chemins finis auto-évitants sur le réseau carré $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ issu de l'origine. Un élément de $\mathcal{S}$ sera donc une suite finie $S = (S(0), S(1), \dots, S(\tau))$ de points de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, où $\tau \geq 0$ tels que:

•$S(0) = 0$.

•Pour tout $i \neq j$ dans $\{0, \dots, \tau\}$, $S_i \neq S_j$

•Pour tout $i \in \{1, , \dots, \tau\}$, $d(S_i, S_{i-1}) = 1$.

Notons que la valeur $\tau = 0$ est permise (le chemin de longueur nulle est aussi dans $\mathcal{S}$).
On définit une fonction de transition Q de la manière suivante sur $\mathcal{S}$: Supposons que S soit de longueur τ strictement positive. Alors, on définit $S- = (S(0), \dots, S(\tau - 1))$, et $Q(S, S-) = 1/2$. Lorsque s est un site voisin de $S(\tau)$ tel que $S + s := (S(0), S(1), \dots, S(\tau), s)$ est auto-évitant (et donc dans $\mathcal{S}$), on définit $Q(S, S + s) = 1/8$. On note n_S le nombre de tels sites s. On pose finalement, $Q(S, S) = 1/2 - n_S/8$.
Par exemple, le chemin S de gauche sur le dessin ci-dessous peut rester inchangé avec probabilité 1/8, il peut perdre sa dernière arête avec probabilité 1/2 et il peut grandir dans chacune des trois directions possibles avec probabilité 1/8:



Lorsque S est le chemin O de longueur nulle, on définit $Q(O, (0, s)) = 1/8$ pour chacun des quatre voisins s de l'origine, et $Q(0, 0) = 1/2$.

1) La fonction de transition est-elle irréductible? Est-elle apériodique?
2) Existe-t-il une loi de probabilité stationaire sur $\mathcal{S}$ qui est réversible à l'équilibre (on pourra noter que le nombre A_n de chemins dans $\mathcal{S}$ tels que $\tau = n$ est inférieur à $4 \times 3^{n-1}$ lorsque $n \geq 1$).
3) Que peut-on dire du comportement asymptotique de $\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} 1_{X_j = O}$ lorsque $(X_n)_{n \geq 0}$ est une chaîne de Markov de fonction de transition Q?

Exercice plus long.
Soit G un graphe infini localement fini (chaque site du graphe n'a qu'un nombre fini de voisins) connexe (il n'y a qu'une seule composante connexe). On se donne un site A de G. On suppose que H est une fonction harmonique sur le graphe (la valeur de H en chaque site x est égale à la moyenne de la valeur de H en ses voisins) qui est bornée (il existe une constante $M > 0$ telle que pour tout site

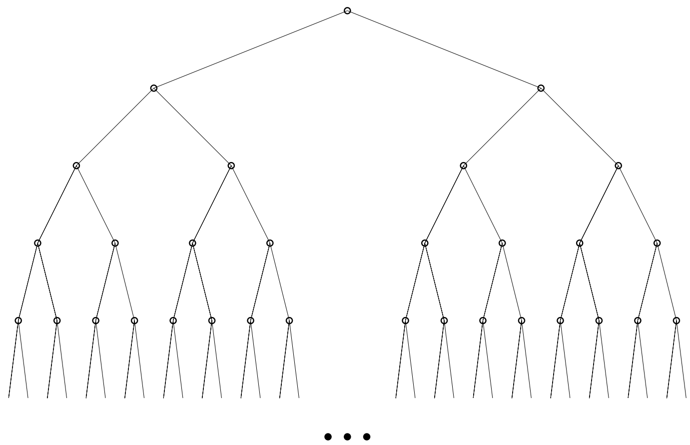
z, $|H(z)| \leq M$). Le but de cet exercice est de voir dans certains cas particuliers si une telle fonction H est nécessairement constante.

On définit une marche aléatoire $(X_n, n \geq 0)$ sur G, issue de $X_0 = A$ (c'est une chaîne de Markov qui à chaque pas choisit uniformément X_{n+1} au hasard parmi les voisins de X_n).

1) Vérifier que $(H(X_n), n \geq 0)$ est une martingale dans une filtration que l'on précisera. Que peut-on en déduire lorsque $n \to \infty$?

2) On suppose que la marche $(X_n, n \geq 0)$ est récurrente. Montrer qu'alors H est nécéssairement constante.

3) On suppose que G est l'arbre binaire infini c'est à dire le graphe ci-dessous:



a) Montrer que la marche aléatoire sur ce graphe est transitoire (on pourra montrer que la distance à la racine est une marche aléatoire avec biais).
b) On définit pour tout $x \in G$, la probabilité $h(x)$ pour qu'une marche aléatoire issue de x ne passe qu'un temps fini dans la moitié droite de G. Montrer que h est une fonction harmonique bornée. Montrer que h n'est pas constante.

4) On suppose que G est le graphe $\mathbb{Z}^d$ avec $d \geq 3$. On note G' le sous-ensemble de l'ensemble des sites $x = (x_1, \ldots, x_d)$ tels que $x_1, x_2, \ldots, x_d$ sont tous pairs.

a) On se donne $x = (0, 0, \ldots, 0)$ et $x' = (2, 0, \ldots, 0)$. Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^d$ issue de x. On pose $X'_n = (2 - X_n^1, X_n^2, \ldots, X_n^d)$. Montrer que presque sûrement, il existe $T > 0$ tel que $X_T = X'_T$. En déduire (en justifiant soigneusement) que $H(x) = H(x')$.
b) Montrer que pour tous x et x' dans G' tels que $\sum_j |x_j - x'_j| = 2$, on a $H(x) = H(x')$. En déduire que H est en fait constante sur G'.
c) Montrer que H est constante sur $\mathbb{Z}^d$.

Question bonus, si jamais vous avez trouvé le sujet trop court (!): Décrire toutes les fonctions harmoniques bornées sur l'arbre binaire infini G de la question 3).