Ecole Normale Supérieure Année 2012-2013
ENS **FIMFA**

Examen - processus stochastiques

Durée : trois heures. Pas de document autorisé.
Le barème est 4/4.5/7.5/6.5.

Exercice 1 Soit $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, intégrables, d'espérance $\theta > 0$. On définit la suite X_n par $X_0 = 0$, puis $X_n = \sum_{i=1}^n Y_i$ et on note $\mathcal{F}_n$ la filtration naturelle du processus $(X_n)_{n\geqslant 0}$. Le but de l'exercice est d'étudier, pour $a > 0$, $T = \inf\{n \geqslant 0, X_n > a\}$.

1. On considère la suite $Z_n = X_n - n\theta$. Montrer que $(Z_n)_{n\geqslant 0}$ est une martingale. Montrer que si cette martingale est bornée dans L^1 alors les variables aléatoires Y_n sont p.s. constantes.
2. Quelle est la limite p.s. de $(X_n)_{n\geqslant 0}$? En déduire que T est p.s. fini.
3. On suppose, uniquement dans cette question, qu'il existe $c \in]0, +\infty[$ tel que $Y_n \leqslant c$ pour tout $n \geqslant 1$ presque sûrement. Montrer que l'on a $\theta\mathbb{E}[T \wedge n] \leqslant c + a$ et en déduire que T est intégrable.
4. Si l'on ne suppose plus que les Y_n sont bornés, on définit, pour $c > 0$, les variables aléatoires tronquées $Y_n^{(c)} = Y_n \wedge c$. Montrer qu'il existe $c_0 \in]0, +\infty[$ avec $\mathbb{E}[Y_n^{(c_0)}] > 0$. Montrer que T est intégrable.

Exercice 2 Soit $(B_t)_{t\geqslant 0}$ un mouvement brownien. On note $\mathcal{F}_t = \sigma(B_u, 0 \leqslant u \leqslant t)$. On définit une suite de temps d'arrêt $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $\tau_0 = 0$ et

$$\tau_{n+1} = \inf\left\{t \geqslant \tau_n, |B_t - B_{\tau_n}| \geqslant 1\right\}$$

avec la convention $\inf \emptyset = +\infty$.

1. Montrer que les τ_n sont finis presque sûrement et que la suite $(\tau_{n+1} - \tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est indépendante et identiquement distribuée.

On admet que τ_1 est intégrable et que $\mathbb{E}[\tau_1] = 1$.

2. Montrer que τ_n/n converge presque sûrement quand $n \to \infty$ et identifier la limite.
3. On introduit N_t le processus de comptage :

$$N_t = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\tau_n \leqslant t}$$

Montrer que N_t/t converge presque sûrement quand $t \to \infty$ et identifier la limite.

Exercice 3 Soit $(X_n)_{n\geqslant 0}$ une chaîne de Markov sur un espace E dénombrable. On suppose la chaîne irréductible, récurrente positive, et on note ν sa mesure de probabilité invariante. Soient $x, y \in E$ deux états distincts. On note

$$T_x = \inf\{n \geqslant 1, X_n = x\}, \qquad T_y = \inf\{n \geqslant 1, X_n = y\}, \qquad S = \inf\{n \geqslant T_y, X_n = x\}$$

Les trois premières questions sont indépendantes.

1. Montrer que $\mathbb{E}_x[S] = \mathbb{E}_x[T_y] + \mathbb{E}_y[T_x]$.
2. * Montrer que

$$\mathbb{E}_x\Big[\sum_{n=0}^{S-1} \mathbf{1}_{X_n=y}\Big] = \mathbb{E}_x[S]\nu(y)$$

Indication : On pourra considérer la suite de temps aléatoires $S_1 = S$, $S_{k+1} = \inf\{n \geqslant S_k, X_n = x, \exists m \in [S_k + 1, n-1]\ t.q.\ X_m = y\}$ et invoquer un théorème ergodique.

3. Soit $N = \sum_{j=0}^{T_x-1} \mathbf{1}_{X_j=y}$ (nombre de visites en y avant de revenir en x) et soit $p = \mathbb{P}_y(T_x < T_y)$. Sous $\mathbb{P}_y$, quelle est la loi de N ? En déduire que $\mathbb{E}_y[N] = 1/p$.
4. A partir des résultats des trois questions précédentes, montrer que

$$\mathbb{P}_y(T_x < T_y) = \frac{1}{\nu(y)(\mathbb{E}_x[T_y] + \mathbb{E}_y[T_x])}$$

Remarque : Cette formule donne la probabilité de passer par x entre deux passages en y.

Exercice 4 Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$une suite de variables aléatoire indépendantes de même loi : $\mathbb{P}(X_n = 1) = p = 1 - P(X_n = -1)$, où $p \in]1/2, 1[$. On considère la marche aléatoire $(S_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $S_0 = 0$ et $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ pour $n \geqslant 1$. On note $\mathcal{F}_n$ la filtration naturelle du processus $(S_n)_{n\geqslant 0}$.

On fixe deux entiers $a < -1 < 1 < b$. On note $\tau_{a,b}$ (resp. τ_a, τ_b) le temps de sortie de $]a, b[$ (resp. de $]a, +\infty[$, $]-\infty, b[$) pour la marche aléatoire :

$$\tau_{a,b} = \inf\big\{n \geqslant 0\,,\, S_n = b \text{ ou } S_n = a\big\}, \quad \tau_b = \inf\big\{n \geqslant 0\,,\, S_n = b\big\}, \quad \tau_a = \inf\big\{n \geqslant 0\,,\, S_n = a\big\}$$

avec la convention $\inf \emptyset = +\infty$.

1. Vérifier que $\tau_{a,b} \to \tau_b$ p.s. en croissant quand $a \to -\infty$.
2. Montrer que $\tau_{a,b}$ est p.s. fini. Montrer que $\tau_{a,b}$ n'est pas p.s. borné.
3. Pour $t \geqslant 0$ on note $s := pe^t + qe^{-t}$. Montrer que $M_n := e^{tS_n} s^{-n}$, $n \geqslant 0$, est une martingale. Si $s > 1$, montrer que

$$e^{at}\mathbb{E}\big[s^{-\tau_{a,b}}\mathbf{1}_{S_{\tau_{a,b}}=a}\big] + e^{bt}\mathbb{E}\big[s^{-\tau_{a,b}}\mathbf{1}_{S_{\tau_{a,b}}=b}\big] = 1$$

4. Pour $t \geqslant 0$ soit $s(t) := pe^t + qe^{-t}$. Montrer que $t \to s(t)$ est une bijection croissante de $[0, +\infty[$ dans $[1, +\infty[$ et calculer la fonction inverse.
5. En utilisant la formule trouvée au point 3, calculer la fonction génératrice de τ_b, définie par

$$g_b(s) := \mathbb{E}\big[s^{-\tau_b} 1_{\tau_b<+\infty}\big], \quad s > 1$$

6. Calculer $\mathbb{P}(\tau_b < +\infty)$ et, en dérivant g_b, $\mathbb{E}[\tau_b]$.

Exercice 1 (Corrigé exercice 1)

1. La variable aléatoire Y_{n+1} est indépendante de la tribu $\mathcal{F}_n$ (même pour $n = 0$). Par conséquent :

$$\mathbb{E}[Z_{n+1} - Z_n|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[Y_{n+1} - \theta|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[Y_{n+1}] - \theta = 0$$

   Si la martingale Z_n était bornée dans L_1, alors elle convergerait presque sûrement vers une variable aléatoire intégrable et donc p.s. finie. Il s'en suivrait que $Z_{n+1} - Z_n = Y_{n+1} - \theta$ convergerait p.s., et donc en loi, vers 0. Or la variable aléatoire $Y_{n+1}-\theta$ a une loi indépendante de n et par conséquent ceci ne peut se produire que si $Y_{n+1} = \theta$ p.s.

2. D'après la loi forte des grands nombres la suite X_n/n converge p.s. vers $\theta > 0$ et donc X_n converge p.s. vers $+\infty$. Or $\{T = \infty\} = \{\sup_n X_n \leqslant a\}$, ces ensembles sont donc de probabilité nulle.

3. La suite $Z_{n\wedge T} = X_{n\wedge T} - \theta(n \wedge T)$ est une martingale d'espérance $\mathbb{E}[Z_0] = 0$. Par conséquent $\theta\mathbb{E}[n \wedge T] = \mathbb{E}[X_{n\wedge T}]$. Or pour tout $k \leqslant T$ on a $X_k \leqslant a + Y_k$, donc $X_{n\wedge T} \leqslant a + c$ p.s., d'où la majoration demandée. Il ne reste plus qu'à faire tendre n vers l'infini

   et appliquer le théorème de convergence monotone pour obtenir que $\theta\mathbb{E}[T] \leqslant a + c$, et donc T est intégrable puisque $\theta > 0$.

4. On a $\mathbb{E}[Y] = \lim_{c\to\infty} \mathbb{E}[Y \wedge c]$ par convergence dominée. La limite étant strictement positive, il existe c_0 avec $\mathbb{E}[Y \wedge c_0] > 0$. On en déduit, d'après la question précédente, que le temps d'arrêt $T^{(c_0)}$ associé aux variables aléatoires $Y_n^{(c_0)}$ est intégrable et donc aussi T puisque $T \leqslant T^{(c_0)}$.

Exercice 2 (Corrigé exercice 2)

1. On sait que $\limsup_{t\to\infty} B_t = \infty$ p.s., donc τ_1 est fini p.s.
   On montre le résultat suivant par récurrence sur n : $\tau_n = \sum_{j=1}^n \widetilde{\tau}_j$ où les $\widetilde{\tau}_j$ sont i.i.d. de même loi que $\widetilde{\tau}_1$.
   On a

$$\tau_{n+1} = \inf\{t \geqslant \tau_n, |B^{\tau_n}_{t-\tau_n}| \geqslant 1\} = \tau_n + \widetilde{\tau}_{n+1}, \qquad \widetilde{\tau}_{n+1} = \inf\{t \geqslant 0, |B^{\tau_n}_t| \geqslant 1\}$$

   où $B^{\tau_n}_t = B_{t+\tau_n} - B_{\tau_n}$ est un MB indépendant de $\mathcal{F}_{\tau_n}$.
   Comme $(B^{\tau_n}_t)_{t\geqslant 0}$ est un MB, $\widetilde{\tau}_{n+1}$ est fini p.s. et a même loi que τ_1.
   Comme $(B^{\tau_n}_t)_{t\geqslant 0}$ est indépendant de $\mathcal{F}_{\tau_n}$, et que les $\widetilde{\tau}_j$, $1 \leqslant j \leqslant n$ sont $\mathcal{F}_{\tau_n}$-mesurables, $\widetilde{\tau}_{n+1}$ est indépendant de $(\widetilde{\tau}_j)_{j=1,\dots,n}$.

2. τ_n est la somme de v.a. i.i.d. intégrables, donc τ_n/n converge p.s. d'après la loi des grands nombres vers $\mathbb{E}[\tau_1] = 1$.

3. Le processus $t \to N_t$ est croissant. Si ω est tel que $t \to N_t$ est borné, alors N_t converge vers un N_∞ fini, ce qui veut dire $\tau_n = \infty$ pour tout $n \geqslant N_\infty + 1$, ce qui n'arrive jamais p.s. (pour un tel ω, on n'a pas $\tau_n/n \to 1$). Donc N_t tend en croissant vers $+\infty$ p.s..
   Comme $\tau_{N_t} \leqslant t < \tau_{N_t+1}$, on a

$$\frac{\tau_{N_t}}{N_t} \leqslant \frac{t}{N_t} < \frac{\tau_{N_t+1}}{N_t+1}\frac{N_t+1}{N_t}$$

   et les termes à droite et à gauche convergent vers 1 p.s. (comme $N_t \to \infty$) et donc N_t/t converge aussi vers 1 p.s..

Exercice 3 (Corrigé exercice 3)

1. Pour la chaîne de Markov canonique :

$$\mathbb{E}_x[S] = \mathbb{E}_x\left[T_x \circ \theta_{T_y} + T_y\right] = \mathbb{E}_x\left[T_x \circ \theta_{T_y}\right] + \mathbb{E}_x[T_y]$$

   En appliquant la propriété de Markov forte :

$$\mathbb{E}_x\left[T_x \circ \theta_{T_y}\right] = \mathbb{E}_y\left[T_x\right]$$

   ce qui donne le résultat.

2. On note $T_x^{(k)}$ les temps de passage successifs en x (on a $T_x^{(0)} = 0$ et $T_x^{(1)} = T_x$). Les excursions E_k entre deux passages sont indépendantes et identiquement distribuées.

   Notons que S_1 est le premier des $T_x^{(k)}$ tel que l'excursion précédente passe par y (et on notera K_1 l'indice k correspondant), S_2 est le premier $T_x^{(k)} > S_1$ tel que l'excursion précédente passe par y (on notera K_2 l'indice k correspondant), etc... Alors, les v.a. $C_1, C_2, \dots$ définies par $C_1 = (E_1, E_2, \dots, E_{K_1})$, $C_2 = (E_{K_1+1}, \dots, E_{K_2})$, etc sont elles-mêmes indépendantes et de même loi. Par la loi des grands nombres, sous $\mathbb{P}_x$,

$$\frac{1}{m}\sum_{j=0}^{S_m-1} \mathbf{1}_{X_j=y} = \frac{1}{m}\sum_{l=0}^{m}\sum_{j=S_{l-1}}^{S_l-1} \mathbf{1}_{X_j=y} \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}_x\Big[\sum_{j=0}^{S-1} \mathbf{1}_{X_j=y}\Big]$$

   presque sûrement. Mais on peut aussi écrire le premier terme comme

$$\frac{1}{m}\sum_{j=0}^{S_m-1} \mathbf{1}_{X_j=y} = \frac{S_m}{m} \times \frac{1}{S_m}\sum_{j=0}^{S_m-1} \mathbf{1}_{X_j=y} \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}_x[S]\nu(y)$$

   car d'une part les v.a. $S_l - S_{l-1}$ sont i.i.d. et intégrables, et donc $S_m/m \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}_x[S] (> 0)$ $\mathbb{P}_x$-p.s., et d'autre part $1/N\sum_{j=0}^{N-1} \mathbf{1}_{X_j=y}$ converge vers $\nu(y)$ quand $N \to \infty$ $\mathbb{P}_x$-p.s. (par le théorème ergodique).

3. On a

$$\mathbb{P}_y(N = 0) = \mathbb{P}_y(T_x < T_y) = p$$

   Pour tout $k \geqslant 0$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_y(N \geqslant k+1) &= \mathbb{P}_y\Big(T_y < T_x, \sum_{j=0}^{S-1} \mathbf{1}_{X_j=y} \geqslant k+1\Big) = \mathbb{P}_y\Big(T_y < T_x, \sum_{j=T_y}^{S-1} \mathbf{1}_{X_j=y} \geqslant k\Big) \\
&= \mathbb{P}_y\big(T_y < T_x, N \circ \theta_{T_y} \geqslant k\big) = \mathbb{P}_y\big(T_y < T_x)\mathbb{P}_y(N \geqslant k\big)
\end{aligned}$$

   d'après Markov fort, car $\{T_y < T_x\}$ est $\mathcal{F}_{T_y}$-mesurable (en effet, $\{T_y < T_x\}^c \cap \{T_y \leqslant t\} = \{T_x \leqslant T_y \leqslant t\}$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable pour tout t). Donc

$$\mathbb{P}_y(N \geqslant k) = (1-p)^k$$

   ce qui montre que N suit la loi géométrique de paramètre p. Donc son espérance est $1/p$.

4. On a

$$\mathbb{E}_x\Big[\sum_{j=0}^{S-1} \mathbf{1}_{X_j=y}\Big] = \mathbb{E}_x\Big[\sum_{j=T_y}^{S-1} \mathbf{1}_{X_j=y}\Big] = \mathbb{E}_y\Big[\sum_{j=0}^{T_x-1} \mathbf{1}_{X_j=y}\Big] = \mathbb{E}_y[N]$$

   d'après Markov fort. En utilisant la première et la deuxième question

$$\mathbb{E}_x\Big[\sum_{j=0}^{S-1} \mathbf{1}_{X_j=y}\Big] = \nu(y)\mathbb{E}_x[S] = \nu(y)\big(\mathbb{E}_x[T_y] + \mathbb{E}_y[T_x]\big),$$

   et donc

$$\mathbb{E}_y[N] = \nu(y)\big(\mathbb{E}_x[T_y] + \mathbb{E}_y[T_x]\big)$$

   Le membre de gauche vaut $1/\mathbb{P}_y(T_x < T_y)$ d'après la troisième question. Finalement on obtient

$$\mathbb{P}_y(T_x < T_y) = \frac{1}{\nu(y)\big(\mathbb{E}_x[T_y] + \mathbb{E}_y[T_x]\big)}$$

Exercice 4 (Corrigé exercice 4) 1. Puisque la chaîne fait des sauts de taille 1, pour arriver à a il faut au moins $|a|$ sauts car on part de 0, donc $\tau_a \geqslant |a|$. On peut aussi remarquer que $|S_n| \leqslant n$ et donc $|a| = |S_{\tau_a}| \leqslant \tau_a$. Donc $\tau_a \to +\infty$ si $a \to -\infty$. Or forcément $X_i > a-1$ pour tout $i \leqslant \tau_a$ et donc $\tau_{a-1} > \tau_a$. On obtient que $\tau_{a,b} = \tau_a \wedge \tau_b \to \tau_b$ p.s. en croissant si $a \downarrow -\infty$.

2. Par la loi forte des grands nombres $S_n/n \to 2p-1 > 0$ p.s. quand $n \to \infty$. Donc $\tau_b < +\infty$ p.s. et $\tau_{a,b} \leqslant \tau_b$.
D'autre part, $\tau_{a,b}$ n'est pas p.s. borné car $\mathbb{P}(\tau_{a,b} \geqslant 2n) > 0$ pour tout $n \geqslant 0$, car $\{X_{2i} = 1, X_{2i-1} = -1, i = 1,\dots,n\} \subset \{\tau_{a,b} \geqslant 2n\}$ et $\mathbb{P}(X_{2i} = 1, X_{2i-1} = -1, i = 1,\dots,n)\} = (pq)^n > 0$. Donc il n'existe aucune constante $M > 0$ t.q. $\mathbb{P}(\tau_{a,b} \leqslant M) = 1$.
3. Puisque $\mathbb{E}[e^{tX_1}] = pe^t + qe^{-t} = s$, on a
$$\mathbb{E}[e^{tS_{n+1}} s^{-n-1} | \mathcal{F}_n] = e^{tS_n} s^{-n-1} \mathbb{E}[e^{tX_1}] = e^{tS_n} s^{-n}$$
Soit $s > 1$. Le temps d'arrêt $\tau_{a,b} \wedge n$ est borné, donc par le théorème d'arrêt (version bornée)
$$1 = \mathbb{E}[M_0] = \mathbb{E}[M_{\tau_{a,b}\wedge n}] = \mathbb{E}[e^{S_{\tau_{a,b}\wedge n}} s^{-\tau_{a,b}\wedge n}]$$
Remarquons que $|S_{\tau_{a,b}\wedge n}| \leqslant |a| \vee b$, que $\tau_{a,b}$ est p.s. fini, et que $s > 1$. Par convergence dominée
$$1 = \mathbb{E}[e^{S_{\tau_{a,b}\wedge n}} s^{-\tau_{a,b}\wedge n}] \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}[e^{S_{\tau_{a,b}}} s^{-\tau_{a,b}}]$$
Puisque $S_{\tau_{a,b}} \in \{a, b\}$, on obtient
$$1 = e^{at}\mathbb{E}[s^{-\tau_{a,b}} \mathbf{1}_{S_{\tau_{a,b}}=a}] + e^{bt}\mathbb{E}[s^{-\tau_{a,b}} \mathbf{1}_{S_{\tau_{a,b}}=b}]$$
4. Soit la fonction $s(t) = pe^t + qe^{-t}$. Cette fonction est dérivable et $s'(t) = pe^t - qe^{-t} \geqslant (p-q)e^{-t} > 0$. Comme $s(0) = 1$ et $\lim_{t\to\infty} s(t) = +\infty$, on a bien que la fonction $s(t)$ est une bijection croissante de $[0,\infty[$ sur $[1,\infty[$.
5. Si $s = pe^{t(s)} + qe^{-t(s)}$ alors $pe^{2t(s)} - se^{t(s)} + q = 0$ et donc (noter que $4pq < 1 < s^2$)
$$e^{t(s)} \in \Big\{ \frac{s + \sqrt{s^2 - 4pq}}{2p}, \frac{s - \sqrt{s^2 - 4pq}}{2p} \Big\}$$
La seconde solution possible est inférieure à 1 (car $\sqrt{1 - 4pq/s^2} \geqslant 1 - 4pq/s^2$, donc la seconde solution est inférieure à $2q/s < 1/s$), donc
$$e^{t(s)} = \frac{s + \sqrt{s^2 - 4pq}}{2p}$$
En prenant la limite $a \downarrow -\infty$, on obtient
$$1 = e^{bt(s)} \mathbb{E}[s^{-\tau_b} \mathbf{1}_{\tau_b<\infty}]$$
et donc, pour tout $s > 1$,
$$g_b(s) := \mathbb{E}[s^{-\tau_b} \mathbf{1}_{\tau_b<\infty}] = e^{-bt(s)} = \Big(\frac{s + \sqrt{s^2 - 4pq}}{2p}\Big)^{-b}$$
6. Si on fait tendre $s \downarrow 1$ on obtient par convergence monotone
$$\mathbb{P}(\tau_b < \infty) = \lim_{s\downarrow 1} \mathbb{E}[s^{-\tau_b} \mathbf{1}_{\tau_b<\infty}] = \Big(\frac{1 + \sqrt{1 - 4pq}}{2p}\Big)^{-b} = 1$$
car $1 - 4pq = 1 - 4p(1-p) = (1-2p)^2$ et $p > 1/2$.
En dérivant $g_b(s)$, on trouve pour tout $s > 1$:
$$g_b'(s) = -\frac{1}{s}\mathbb{E}[\tau_b s^{-\tau_b} \mathbf{1}_{\tau_b<\infty}]$$
Si on fait tendre $s \downarrow 1$ on obtient par convergence monotone
$$\lim_{s\downarrow 1} g_b'(s) = -\mathbb{E}[\tau_b]$$
Or
$$g_b'(s) = -b\Big(\frac{s + \sqrt{s^2 - 4pq}}{2p}\Big)^{-b-1}\Big(1 + \frac{s}{\sqrt{s^2 - 4pq}}\Big)\frac{1}{2p}$$
donc
$$\mathbb{E}[\tau_b] = b\Big(\frac{1 + \sqrt{1 - 4pq}}{2p}\Big)^{-b-1}\Big(1 + \frac{1}{\sqrt{1 - 4pq}}\Big)\frac{1}{2p} = \frac{b}{2p-1}$$