Année 2013–2014

FIMFA – Probabilités

Partiel (2 heures)

Sans document et sans calculatrice.

Cette épreuve comporte 3 questions de cours et 2 problèmes indépendants.

Questions de cours:
1) Enoncez la loi forte des grands nombres.
2) Enoncez le théorème central limite.
3) Enoncez le théorème de Paul Levy (version forte).

Problème 1. On rappelle la formule de Stirling: $n! \sim (n/e)^n\sqrt{2\pi n}$. Soient $p \in]0,1[$ et $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telle que

$$\forall n \geq 1 \qquad P(X_n = -1) = 1 - p, \quad P(X_n = 1) = p\,.$$

Posons alors

$$\forall n \geq 1 \qquad S_n = X_1 + \cdots + X_n\,,$$

et définissons

$$U = \liminf_{n\to\infty} S_n\,, \qquad V = \limsup_{n\to\infty} S_n\,.$$

1) Quelle est la loi de S_n? Donnez son espérance et sa variance.
2) a) Donnez un équivalent, lorsque n tend vers l'infini, de $P(S_{2n} = 0)$.
b) Dans le cas non symétrique où $p \neq 1/2$, en déduire que, avec probabilité 1, la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ visite 0 un nombre fini de fois.
3) Montrez que V est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.
4) a) L'événement $\{\, V \leq 100 \,\}$ est–il un événement asymptotique pour $(X_n)_{n\geq 1}$?
b) Montrez que $P(V = +\infty)$ vaut 0 ou 1.
5) a) Soit k un entier. Que vaut $\lim_{n\to\infty} P(S_n = k)$? Montrez que pour tout a positif, $\lim_{n\to\infty} P(|S_n| \leq a) = 0$.
b) En déduire: $P(\exists a > 0 \quad \forall n \geq 1 \quad |S_n| \leq a) \,=\, 0\,.$
6) Montrez alors que: $\forall b > 0 \quad P(-b \leq U \leq V \leq b) \,=\, 0\,.$
7) Conclure finalement que exactement l'une des 3 probabilités suivantes vaut 1:

$$P(U = V = +\infty)\,, \quad P(U = V = -\infty)\,, \quad P(U = -\infty, V = +\infty)\,,$$

et discuter laquelle selon la valeur de p.
8) Dans le cas symétrique $p = 1/2$, montrez que, avec probabilité 1, la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ visite 0 un nombre infini de fois.

He uses statistics as a drunken man uses lamp posts
– for support rather than illumination.
Andrew Lang (1844-1912).

As far as the laws of mathematics refer to reality, they are not certain;
and as far as they are certain, they do not refer to reality.
Albert Einstein (1879-1955)

Problème 2: *Les "runs" du jeu de pile ou face et la marche aléatoire*
Soit p un nombre réel dans $]0,1[$. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite infinie de v.a. indépendantes qui suivent toutes la loi de Bernoulli de paramètre p:

$$\forall n\in\mathbb{N}\qquad P(X_n=-1)=1-p\,,\quad P(X_n=+1)=p\,.$$

I) Nous définissons

$$\begin{aligned}
N_1 &= \sup\{\, n\geq 1 : X_1=X_2=\cdots=X_n\,\}\,,\\
N_2 &= \sup\{\, n\geq 1 : X_{N_1+1}=X_{N_1+2}=\cdots=X_{N_1+n}\,\}\,,\\
&\cdots\\
N_r &= \sup\{\, n\geq 1 : X_{N_1+\cdots+N_{r-1}+1}=X_{N_1+\cdots+N_{r-1}+2}=\cdots=X_{N_1+\cdots+N_{r-1}+n}\,\}\,,\\
&\cdots
\end{aligned}$$

1) Que se passe–t–il si $N_k=+\infty$ pour un certain $k\in\mathbb{N}$?
2) Calculer $P(N_1=+\infty)$.
3) Montrer que $P(\forall k\geq 1\quad N_k<+\infty)\ =\ 1$.
4) Calculer la loi de N_1.
5) Calculer la loi jointe de N_1 et N_2.
6) Que pouvez–vous dire de la suite de v.a. $(N_n)_{n\geq 1}$?

Dans la suite, nous considérons la marche aléatoire

$$S_0=0\,,\qquad \forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}\qquad S_n\ =\ X_1+\cdots+X_n\,.$$

II) Dans le cas symétrique $p=1/2$, calculer pour $k,m,n\in\mathbb{N}$, la probabilité

$$P\big(\max(S_1,\cdots,S_n)=m,\ S_n=k\big)\,.$$

III) Nous revenons au cas général où $p\in]0,1[$.
A) Posons pour $\lambda\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}$

$$F_n(\lambda)\ =E(\exp(\lambda S_n))\,.$$

1) Calculer $F_n(\lambda)$.
2) Montrer que F_n est indéfiniment dérivable et calculer ses dérivées de 2 manières.
3) En déduire une formule donnant $E(S_n^k)$ pour $k,n\in\mathbb{N}$.

B)1) Soit $n\leq N_1$. Exprimer S_n en fonction de X_1 et de n.
2) Soit n tel que $N_1<n\leq N_1+N_2$. Exprimer S_n en fonction de X_1, N_1 et de n.
3) Montrer que la donnée de la suite $(N_n)_{n\geq 1}$ et de X_1 permet de reconstruire toute la marche aléatoire $(S_n)_{n\geq 1}$.

Life is a school of probability. Walter Bagehot

How dare we speak of the laws of chance? Is not chance the antithesis of all law?
Bertrand Russell (1872-1970)