Convolution libre et partitions non croisées

Nicolas Provost, Sabine Mengin-Lecreulx

Mémoire encadré par
Thierry Lévy

20 juin 2007

Table des matières

Introduction

Nous définirons des espaces de probabilité dits non commutatifs. Dans lesdits espaces, nous chercherons à obtenir la loi de $a+b$ avec a et b deux variables aléatoires "libres" (c'est-à-dire vérifiant certaines relations). Pour cela nous chercherons une transformation linéarisante, c'est-à-dire un équivalent, dans le cadre des probabilités non commutatives, du logarithme de la fonction caractéristique pour les probabilités classiques. En effet, pour deux variables aléatoires à valeur dans $\mathbb{R}^d$ indépendantes X et Y, on a, en posant $Z = X + Y$:

$$log(\hat{\mu_Z}) = log(\hat{\mu_X}) + log(\hat{\mu_Y}).$$

1 Probabilité libre

1.1 Espace de probabilité non commutatif

Définition 1. *Un espace de probabilité non commutatif est une algèbre unitaire $\mathcal{A}$ sur $\mathbb{C}$ munie d'une forme linéaire $\varphi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ telle que $\varphi(1) = 1$.*

Si de plus on munit $\mathcal{A}$ d'une norme $\|.\|$ et d'une involution $x \mapsto x^*$ vérifiant pour tout $x, y \in \mathcal{A}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$: $(x+y)^* = x^* + y^*$, $(\lambda x)^* = \overline{\lambda} x^*$, $(xy)^* = y^* x^*$ et $\|xx^*\| = \|x\|^2$, alors on dit que $(\mathcal{A}, \varphi)$ est un C^*-espace de probabilité.

Définition 2. *Soit $(\mathcal{A}, \varphi)$ un espace de probabilité non commutatif. On appelle variable aléatoire tout éléments $a \in \mathcal{A}$. La distribution de a, notée μ_a, est alors la forme linéaire sur $\mathbb{C}[t]$ définit par :*

$$\mu_a : P \mapsto \varphi(P(a))$$

Définition 3. *Soit $(\mathcal{A}, \varphi)$ un espace de probabilité non commutatif. On dit que l'état φ est fidèle si :*

$$\forall a \in \mathcal{A}, \varphi(aa^*) = 0 \Rightarrow a = 0$$

Exemple 1. *1/ L'algèbre $L^\infty(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ munie de l'état $\varphi(X) = \mathbb{E}(X)$ et de l'involution $X^* = \bar{X}$ est un espace de probabilité non commutatif et l'état est fidèle.*
La distribution de $X \in L^\infty(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, une variable aléatoire auto-adjointe (i.e. X réelle), est donnée par le k-ième moment de la variable X :

$$\mu_X(t^k) = \mathbb{E}(X^k).$$

Cette distribution est associée à $\mathbb{P} \circ X^{-1}$, une mesure sur $\mathbb{R}$, puisqu'elles ont les mêmes moments qui les déterminent totalement.

2/ Soient K un espace topologique compact et ν une mesure de probabilité borélienne sur K. Alors $C^0(K)$ munie de $\varphi(f) = \int_K f d\nu$ et de la conjugaison complexe est un espace de probabilité non commutatif muni d'un état fidèle.

La distribution d'une application $f \in C^0(K)$ auto-adjointe est associée à la mesure $\nu \circ f^{-1}$. Elle est déterminé par :

$$\mu_f(t^k) = \int_K f^k d\nu.$$

3/L'algèbre des matrices $M_n(\mathbb{C})$ munie de $\varphi = \frac{1}{n}Tr$ et de l'adjonction est un espace de probabilité non commutatif muni d'un état fidèle.
La distribution d'une matrice hermitienne A est donnée par :

$$\mu_A(t^k) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k$$

où $\lambda_1, ..., \lambda_n$ sont les valeurs propres (réelles) comptées avec ordres de multiplicité. Cette distribution est associée à la mesure $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} \delta_{\lambda_i}$.

4/Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ la sous-algèbre des applications linéaires continues sur $\mathcal{H}$. On dispose de $\varphi(a) =< a(h), h >$ pour un h fixé tel que $\|h\| = 1$ et de a^* l'adjoint de a. Alors $(\mathcal{A}, \varphi)$ est un C^*-espace de probabilité munie de la norme des opérateurs. L'état n'est pas fidèle car il existe $a \neq 0$ tel que $h \in ker(a)$.

5/L'algèbre des matrices aléatoires $M_n(\mathbb{C}) \otimes L^\infty(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ munie de l'état $\varphi(A) = \mathbb{E}(\frac{1}{n}Tr(A))$ et de l'adjonction est un espace de probabilité non commutatif muni d'un état fidèle.
La distribution d'une variable A auto-adjointe est donnée par :

$$\mu_A(t^k) = \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k\right)$$

où les λ_i sont les variables aléatoires de $L^\infty(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ définit comme les valeurs propres réelles de A ordonnées (i.e. $\forall \omega \in \Omega, Sp(A(\omega)) = \{\lambda_1(\omega) \leq \lambda_2(\omega) \leq ... \leq \lambda_n(\omega)\}$).

Ainsi la distribution de A est associée à $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P} \circ \lambda_i^{-1}$ qui est une mesure positive sur $\mathbb{R}$ ayant pour k-ième moment $\mu_A(t^k)$.

Proposition 1. *Soit $(\mathcal{A}, \varphi)$ un C^*-espace de probabilité.*

Pour toute variable auto-adjointe $a \in \mathcal{A}$, il existe une unique mesure de probabilité positive sur $\mathbb{R}$ de moments $(\varphi(a^k))_{k \geq 0}$.

Remarque 1. *On admet cette proposition (voir [6]). Lorsque que l'algèbre est seulement un *-espace (munie d'une involution seulement), il y a existence d'une telle mesure mais pas nécessairement unicité.*

Ainsi on préfèrera désormais le cas des C^*-espaces, on étudira essentiellement les distributions des variables auto-adjointes et on identifiera celle-ci avec la mesure de probabilité associée.

1.2 Liberté

Définition 4. *Soient $\mathcal{A}_1, ..., \mathcal{A}_n$ des sous-algèbres unitaires (qui contiennent 1) de $\mathcal{A}$.*

On dit que $\mathcal{A}_1, ..., \mathcal{A}_n$ sont libres si :
$\forall k \in \mathbb{N}, \forall j(1), ..., j(k) \in \{1, ..., n\}, \forall a_i \in \mathcal{A}_{j(i)}$ *telles que* $\varphi(a_i) = 0$,

$$j(1) \neq j(2) \neq ... \neq j(k) \Rightarrow \varphi(a_1 ... a_k) = 0.$$

Des variables aléatoires $a_1, ..., a_n \in \mathcal{A}$ sont dites libres si les sous-algèbres unitaires $Alg(1, a_1), ..., Alg(1, a_n)$ sont libres.

Exemple 2. *On prend $\mathcal{A} = \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ et $\varphi = \frac{1}{2}Tr$. Alors $a = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ et $b = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ sont des variables aléatoires libres.*

En effet, on a $Alg(1, a) = \{\lambda I + \mu a\}$ et $Alg(1, b) = \{\lambda I + \mu b\}$ (car $a^2 = 0$ et $b^2 = I$). Donc un élément de trace nulle dans $Alg(1, a)$ (resp. dans $Alg(1, b)$) est un multiple de a (resp. un multiple de b).

Mais $ab = -ba = a$. Donc tout produit alterné donne un multiple de a ou de b qui sont des matrices de traces nulles.

Proposition 2. *Soit $(\mathcal{A}, \varphi)$ un espace de probabilité non commutatif tel que φ soit fidèle. Alors si $a, b \in \mathcal{A}$ auto-adjoints sont libres et commutent alors a ou b est scalaire.*

Démonstration:

On a $\varphi([a - \varphi(a)][b - \varphi(b)][a - \varphi(a)][b - \varphi(b)]) = 0$ par liberté. D'où :

$$\varphi(abab) = \varphi(a^2)\varphi(b)^2 + \varphi(a)^2\varphi(b^2) - \varphi(a)^2\varphi(b)^2$$

Puis on a $\varphi(a^2b^2) = \varphi(a^2)\varphi(b^2)$ par liberté. Or $abab = a^2b^2$ donc :

$$\varphi(a^2)\varphi(b)^2 + \varphi(a)^2\varphi(b^2) - \varphi(a)^2\varphi(b)^2 = \varphi(a^2)\varphi(b^2)$$

Puis $(\varphi(a^2) - \varphi(a)^2)(\varphi(b^2) - \varphi(b)^2) = 0$. On peut supposer alors que $\varphi(a^2) - \varphi(a)^2 = 0$. Mais $\varphi([a - \varphi(a)1][a - \varphi(a)1]^*) = \varphi(a^2) - \varphi(a)^2 = 0$. Donc $a = \varphi(a)1$ car φ est fidèle.

Proposition 3. *Si les sous-algèbres unitaires $\mathcal{A}_1, ..., \mathcal{A}_n$ sont libres et engendrent $\mathcal{A}$, alors φ est entièrement déterminé par ses restrictions à $\mathcal{A}_i$.*

Démonstration:

En effet tout élément $a \in \mathcal{A}$ peut s'écrire $a = a_1 ... a_k$ où $a_i \in \mathcal{A}_{j(i)}$. On peut supposer $j(1) \neq ... \neq j(k)$ sinon on prend le produit des termes voisins encore dans un $\mathcal{A}_j$. On pose alors $a_i^0 = a_i - \varphi(a_i)1$. On a clairement $\varphi(a_i^0) = 0$.

Ainsi :

$$\begin{aligned} \varphi(a) &= \varphi((a_1^0 + \varphi(a_1)1)...(a_k^0 + \varphi(a_k)1)) \\ &= \varphi(a_1^0 ... a_k^0) + R \\ &= R \end{aligned}$$

où R est une somme de termes de la forme $\varphi(b_1)...\varphi(b_q)\varphi(b_{q+1}...b_k)$ avec $q \geq 1$. Donc les termes sont des images par φ de produit d'au plus $k-1$ éléments alternés des $\mathcal{A}_i$.

On démontre ainsi la proposition par récurrence sur k.

Définition 5. *Soient $(\mathcal{A}, \varphi)$ un espace de probabilité non commutatif et $a, b \in \mathcal{A}$ des variables libres. La proposition montre que $(\varphi((a+b)^k))_{k\geq 0}$ est déterminé par $(\varphi(a^k))_{k\geq 0}$ et $(\varphi((b^k))_{k\geq 0}$. Donc on détermine μ_{a+b} à partir de μ_a et μ_b. On note $\mu_a \boxplus \mu_b = \mu_{a+b}$ l'opération ainsi définie, appelée convolution libre.*

Remarque 2. *On cherche désormais à étendre cette opération de convolution libre sur l'ensemble des mesures de probabilité à support compact. Il faut notamment vérifier que cela ne dépend pas du choix de l'espace de probabilité non commutatif et de la variable aléatoire choisie.*

2 Espaces de probabilité et convolutions

Dans le cas commutatif, on considère $X, Y \in L^\infty(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ réelles indépendantes. On a $\mu_{X+Y} = \mu_X * \mu_Y$ où on a définit $\mu_Z = \mathbb{P} \circ Z^{-1}$ comme une mesure sur $\mathbb{R}$ lorsque Z est réelle.

On note $L_\nu(z) = \int_{\mathbb{R}} e^{zx} d\nu(x) = \sum\limits_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!} m_n(\nu)$ avec $m_n(\nu)$ le n-ième moment de νune mesure à support compact sur $\mathbb{R}$. On a alors $L_{\mu_{X+Y}} = L_{\mu_X} L_{\mu_Y}$ et donc $Log(L_{\mu_{X+Y}}) = Log(L_{\mu_X}) + Log(L_{\mu_Y})$. D'où la définitions des cumulants :

Définition 6. *On définit les cumulants $(c_n)_{n\geq 0}$ d'une mesure de moments $(m_n)_{n\geq 0}$ par l'égalité formelle :*

$$Log\left(\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!} m_n\right) = \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!} c_n.$$

On obtient $c_n(\mu_{X+Y}) = c_n(\mu_X) + c_n(\mu_Y)$.

Proposition 4. *On note $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des partitions de $\{1, ..., n\}$.*
Pour $\pi = \{P_1, ..., P_k\} \in \mathcal{P}_n$, on note $c_\pi = \prod\limits_{i=1}^{k} c_{Card(P_i)}$.
On a alors :

$$m_n = \sum_{\pi \in \mathcal{P}_n} c_\pi.$$

Démonstration:
On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 0}\frac{z^n}{n!}m_n &= exp\left(\sum_{n\geq 1}\frac{z^n}{n!}c_n\right)\\
&= \sum_{k\geq 0}1/k!\left(\sum_{n\geq 1}\frac{z^n}{n!}c_n\right)^k\\
&= 1+\sum_{n\geq 1}\frac{z^n}{n!}\sum_{\substack{k\geq 0\\ n_1,...,n_k\geq 1\\ n_1+...+n_k=n}}\frac{n!}{n_1!...n_k!k!}c_{n_1}...c_{n_k}.
\end{aligned}$$

Il suffit donc de montrer que :

$$\sum_{\substack{k\geq 0\\ n_1,...,n_k\geq 1\\ n_1+...+n_k=n}}\frac{n!}{n_1!...n_k!k!}c_{n_1}...c_{n_k}=\sum_{\pi\in\mathcal{P}_n}c_\pi$$

On cherche d'abord à ordonner les indices $(n_1,...,n_k)$.

On note alors $s_i = Card(\{j\in\{1,...,k\}|n_j=i\}$. Le groupe des permutations S_k agit sur les indices ordonnées $(n_1,...,n_k)$ et le stabilisateur est $S_{s_1}\times...\times S_{s_n}$. Donc :

$$\sum_{\substack{k\geq 0\\ n_1,...,n_k\geq 1\\ n_1+...+n_k=n}}\frac{n!}{n_1!...n_k!k!}c_{n_1}...c_{n_k}=\sum_{\substack{k\geq 0\\ 1\leq n_1\leq...\leq n_k\\ n_1+...+n_k=n}}\frac{k!}{s_1!...s_n!}\frac{n!}{n_1!...n_k!k!}c_{n_1}...c_{n_k}.$$

Puis S_n agit sur $\{\{1,...,n_1\},\{n_1+1,...,n_1+n_2\},...,\{n_1+...+n_{k-1}+1,...,n\}\}$ et le stabilisateur est $(S_{n_1}\times...\times S_{n_k})\rtimes(S_{s_1}\times...\times S_{s_n})$ où le premier facteur échange au sein d'une même parties et le second échange les parties de même cardinal. Ainsi :

$$\sum_{\substack{k\geq 0\\ 1\leq n_1\leq...\leq n_k\\ n_1+...+n_k=n}}\frac{n!}{n_1!...n_k!s_1!...s_n!}c_{n_1}...c_{n_k}=\sum_{\pi\in\mathcal{P}_n}c_\pi.$$

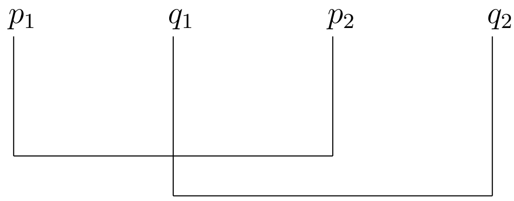
Remarque 3. *On a ainsi construit une suite de cumulants qui caractérise les variables aléatoires et qui est additive. On obtient ainsi très facilement l'opération de convolution dans les espaces commutatifs. On a alors cherché à définir de manière intrinsèque ces cumulants qui étaient définis grâce à l'intégration. On obtient une formule de combinatoire qui relie cumulants et moment. Il est ainsi intéressant d'étudier plus en détail les partitions et d'en détacher une certaine classe : les partitions non croisées.*

3 Partitions non croisées

3.1 Partitions non croisées

Définition 7. *Une partition* $P = \{P_1, ..., P_r\}$ *de* $\{1, ..., n\}$*, avec* $n \leq 1$*, est dite non croisée s'il n'existe pas* $i \neq j$*,* $p_1, p_2 \in P_i$ *et* $q_1, q_2 \in P_j$ *tel que* $p_1 < q_1 < p_2 < q_2$*.*

On note $NC(n)$ *l'ensemble des partitions non croisées de* $\{1, ..., n\}$*.*



Proposition 5. *Soient* $P = \{P_1, ..., P_p\}$ *et* $Q = \{Q_1, ..., Q_q\}$ *des partitions non croisées de* $\{1, ..., n\}$*.*

On munit $NC(n)$ *de l'ordre défini par* $P \leq Q$ *si pour tout* $j \in \{1, ..., q\}$*, il existe* $\{P_{i_1}, ..., P_{i_k}\} \subset P$ *partition de* Q_j*.*

On peut définir $P \wedge Q$ *la plus grande partition non croisée* R *telle que* $R \leq P$ *et* $R \leq Q$*, en posant :* $P \wedge Q = \{P_i \cap Q_j | 1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq q\}$*.*

On peut ainsi définir de manière analogue $P \vee Q$ *la plus petite partition non croisée* R *telle que* $R \geq P$ *et* $R \geq Q$*.*

Exemple 3. *On a :* $\{(1,2); (3); (4)\} \leq \{(1,2); (3,4)\}$*.*

Car $\{(1,2)\}$ *est un partition de* $\{1; 2\}$*.*

Et $\{(3); (4)\}$ *est une partition de* $\{3; 4\}$*.*

Démonstration:

La réfléxivité de l'ordre est claire.

On suppose que $P \leq Q$ et $Q \leq P$, on dispose d'une partition $\{P_{i_1}, ..., P_{i_k}\}$ de Q_j puis d'une partition $\{Q_{j_1}, ..., Q_{j_l}\}$ de P_{i_1}. En particulier $Q_{j_1} \subset Q_j$ donc $Q_{j_1} = Q_j$ puis $k = l = 1$ et $Q_j = P_{i_1}$. Donc $P = Q$ donne l'antisymétrie.

On suppose désormais $P \leq Q \leq R$, où $R = \{R_1, ..., R_r\}$. Pour $R_k \in R$, on dispose d'une partition $\{Q_{j_1}, ..., Q_{j_l}\}$ de R_k. Soit $\tilde{P}_{j_i} \subset P$ une partition de Q_{j_i}. Alors $\bigcup_{i=1}^{l} \tilde{P}_{j_i}$ est une partition de R_k. Ainsi $P \leq Q$, la relation est transitive.

$P \wedge Q = \{P_i \cap Q_j | 1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq q\}$ définit clairement une partition plus fine que P et Q. Soient $p_1 < q_1 < p_2 < q_2$ avec $p_1, p_2 \in P_i \cap Q_{i'}$ et $q_1, q_2 \in P_j \cap Q_{j'}$ avec $P_i \cap Q_{i'} \neq P_j \cap Q_{j'}$. Ainsi $P_i \neq P_j$ ou $Q_{i'} \neq Q_{j'}$ donne un croisement dans P ou Q, ce qui est absurde. Ainsi $P \wedge Q$ est non croisée plus fine que P et Q.

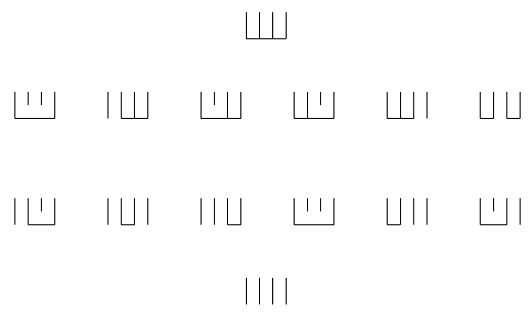
Soit désormais R non croisée telle que $R \leq P$ et $R \leq Q$. Pour P_i (resp Q_j), on dispose d'une partition $\{R_{i_1}, ..., R_{i_k}\} = R'$ (resp. $\{R_{j_1}, ..., R_{j_l}\} = R''$). Alors $R' \cap R'' \subset R$ est une partition de $P_i \cap Q_j$. On a ainsi $R \leq P \wedge Q$, ce qui définit bien

$P \wedge Q$ comme la plus grande partition non croisée plus fine que P et Q.

La description explicite de $P \vee Q$ n'étant pas simple (bien qu'il existe des algorithmes efficaces de calcul). On remarque que $\wedge$ est clairement associatif $(P \wedge Q) \wedge R = P \wedge (Q \wedge R)$. Donc on peut définir la plus petite partition moins fine que P et Q grâce à $\{A_1, ..., A_k\} = \{A \in NC(n) | P \leq A \text{ et } Q \leq A\}$ en posant $P \vee Q = A_1 \wedge A_2 \wedge ... \wedge A_k$. Cette partition est non croisée et on montre facilement par récurrence sur k que $A_1 \wedge ... \wedge A_k$ est moins fine que P et Q. En effet par définition de $\wedge$: $P \leq A$ et $P \leq B \Rightarrow P \leq A \wedge B$.

Remarque 4. *On a ainsi muni $NC(n)$ d'une structure de treillis.*

Exemple 4. *On peut représenter ainsi $NC(4)$ par :*



Notation :

On préfèrera désormais les lettres $\sigma, \pi, \tau, ...$ pour désigner des partitions non croisées.

On notera 1_n la partition la moins fine des partitions non croisées de $NC(n)$ formée d'un seul bloc et 0_n la partition la plus fine formée de n blocs.

Pour une partie finie $S \subset \mathbb{N}$, on définie $NC(S)$ l'ensemble des partitions non croisées de S.

Pour $S_1 \cup S_2 = \{1, ..., n\}$, $\sigma_1 \in NC(S_1)$ et $\sigma_2 \in NC(S_2)$, on définit la partition $\sigma_1 \cup \sigma_2$ de $\{1, ..., n\}$ qui a pour blocs ceux de σ_1 et σ_2. Cette partition n'est pas toujours non croisées.

Pour W une union de bloc de $\pi \in NC(n)$, on note $\pi|_W$ la restriction de π à W :

$$\pi|_W = \{V \in \pi | V \subset W\} \in NC(W)$$

3.2 Inversion de Möbius

On considère désormais un ensemble ordonné $(E, \leq)$ ayant la propriété $\mathcal{P}$: $\forall a \in E, \{b | b \leq a\}$ est fini. On remarque qu'en particulier tout ensemble fini vérifie cette condition. On a alors les exemples $(NC(n), \leq)$ et plus classique $(\mathbb{N}, |)$.

Théorème 1. *Soient $f, g : E \to \mathbb{C}$. Il existe $\mu : E^2 \to \mathbb{Z}$ ne dépendant que de $(E, \leq)$ tel que nous ayons l'équivalence entre :*

$$\forall a \in E, f(a) = \sum_{b \leq a} g(b)$$

$$\forall a \in E, g(a) = \sum_{b \leq a} \mu(a,b) f(b)$$

De plus si l'on impose $\mu(a,b) = 0$ pour $b > a$ alors μ est unique.

Démonstration:

On raisonne par induction sur l'ordre ce qui est justifié grâce à $\mathcal{P}$.

Tout élément minimal a_0 de E (il en existe au moins un, mais n'est pas nécessairement unique) donne $\sum\limits_{b \leq a_0} g(b) = g(a_0)$.

D'où $\mu(a_0, a_0) = 1$ est l'unique choix qui convient.

Soit alors $a \in E$ tel que l'on ait déja construit μ pour les couples dans $\{b | b < a\}$.

On a :

$$\begin{aligned} g(a) &= f(a) - \sum_{b<a} g(b) \\ &= f(a) - \sum_{b<a} \sum_{c \leq b} \mu(b,c) f(c) \\ &= f(a) - \sum_{c<a} \sum_{c \leq b < a} \mu(b,c) f(c) \end{aligned}$$

Donc l'unique choix possible est $\mu(a,a) = 1$ et $\mu(a,b) = -\sum\limits_{b \leq c < a} \mu(c,b)$.

Remarque 5. *En pratique pour déterminer μ on retiendra les formules :*

$$\mu(a,a) = 1$$

$$\mu(a,b) = -\sum_{b \leq c < a} \mu(c,b)$$

Exemple 5. *Si $\forall a \in \mathbb{N}, f(a) = \sum\limits_{b|a} g(b)$ alors $\forall a \in \mathbb{N}, g(a) = \sum\limits_{b|a} \mu(a/b) f(b)$ où μ est donné par :*

$$\mu(n) = \begin{cases} 0 & \textit{si } n \textit{ admet un facteur carré} \\ (-1)^r & \textit{si } n \textit{ est produit de } r \textit{ nombres premiers distincts} \end{cases}$$

Proposition 6. *Sur les partitions non croisées, la fonction de Möbius μ est multiplicative, i.e pour $\sigma \leq \pi \leq \omega$ on a :*

$$\mu(\sigma, \pi) = \prod_{V \in \omega} \mu(\sigma|_V, \pi|_V).$$

Démonstration:
On raisonne par induction sur la longueur de l'intervalle $[\sigma, \pi]$.
On a déjà $\mu(\pi, \pi) = 1 = \prod_{V \in \omega} \mu(\pi|_V, \pi|_V)$.
Puis pour $\sigma < \pi$:

$$\begin{aligned}
\mu(\sigma, \pi) &= -\sum_{\sigma \leq \tau < \pi} \mu(\sigma, \tau) \\
&= -\sum_{\sigma \leq \tau < \pi} \prod_{V \in \omega} \mu(\sigma|_V, \tau|_V) \\
&= -\sum_{\sigma \leq \tau \leq \pi} \prod_{V \in \omega} \mu(\sigma|_V, \tau|_V) + \prod_{V \in \omega} \mu(\sigma|_V, \pi|_V) \\
&= -\prod_{V \in \omega} \sum_{\sigma|_V \leq \tau' \leq \pi|_V} \mu(\sigma|_V, \tau') + \prod_{V \in \omega} \mu(\sigma|_V, \pi|_V) \\
&= \prod_{V \in \omega} \mu(\sigma|_V, \pi|_V)
\end{aligned}$$

Car $\mu(\sigma|_V, \pi|_V) = -\sum_{\sigma|_V \leq \tau' < \pi|_V} \mu(\sigma|_V, \tau')$.

4 Définition des cumulants et propriétés

4.1 Définitions

Définition 8. *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre unitaire et soit φ une forme linéaire unitaire. On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et pour $(a_1, ..., a_n) \in \mathcal{A}^n$:*

$$\varphi_n(a_1, ..., a_n) = \varphi(a_1 ... a_n).$$

Pour $\pi \in NC(n)$:

$$\begin{aligned}
\varphi_\pi(a_1, ..., a_n) &= \prod_{V \in \pi} \varphi(\pi|_V) \\
&= \prod_{V \in \pi} \varphi_s(a_{i_1}, ..., a_{i_s})
\end{aligned}$$

avec, pour $V \in \pi$, $V = (i_1, ..., i_s)$.

On appelle cumulants libres, que l'on note k_π, les fonctions :

$$k_\pi : \mathcal{A}^n \to \mathbb{C}$$

$$(a_1, ..., a_n) \mapsto k_\pi(a_1, ..., a_n).$$

avec :

$$k_\pi(a_1, ..., a_n) = \sum_{\sigma \leq \pi} \varphi_\sigma(a_1, ..., a_n) \mu(\sigma, \pi)$$

Remarque 6. *D'après la théorie de l'inversion de Möbius, cette définition des cumulants libres est équivalente à la relation :*

$$\varphi(a_1, ..., a_n) = \sum_{\sigma \in NC(n)} k_\sigma(a_1, ..., a_n).$$

Démonstration:

La théorie de l'inversion de Möbius nous dit que la définition des cumulants libres est équivalente à la relation :

$$\forall \pi \in NC(n), \varphi_\pi(a_1, ..., a_n) = \sum_{\substack{\sigma \in NC(n) \\ \sigma \leq \pi}} k_\sigma(a_1, ..., a_n).$$

Donc, en particulier :

$$\varphi(a_1, ..., a_n) = \sum_{\sigma \in NC(n)} k_\sigma(a_1, ..., a_n).$$

Réciproquement, soit $\pi \in NC(n)$.

$$\begin{aligned}\varphi_\pi(a_1, ..., a_n) &= \prod_{V \in \pi} \varphi_s(a_{i_1}, ..., a_{i_s}) \\ &= \prod_{V \in \pi} \sum_{\tau \in NC(s)} k_\tau(a_{i_1} ... a_{i_s}) \\ &= \sum_{\sigma \leq \pi} k_\sigma(a_1 ... a_n).\end{aligned}$$

Exemple 6. *Déterminons $k_{\{(1,2)(3)\}}(a, b, c)$*
Par définition des cumulants, on a :

$k_{\{(1,2)(3)\}}(a, b, c) =$
$\mu(\{(1, 2)(3)\}, \{(1, 2)(3)\})\varphi_{\{(1,2)(3)\}}(a, b, c) + \mu(\{(1, 2)(3)\}, \{(1)(2)(3)\})\varphi_{\{(1)(2)(3)\}}(a, b, c)$

D'après les résultats obtenus dans la section 3.2 (inversion de Möbius), on a donc :

$$\begin{aligned}k_{\{(1,2)(3)\}}(a, b, c) &= 1 \times \varphi(ab)\varphi(c) - 1 \times \varphi(a)\varphi(b)\varphi(c) \\ &= \varphi(c) \left(\varphi(ab) - \varphi(a)\varphi(b)\right)\end{aligned}$$

Définition 9. *Soit $(\mathcal{A}, \varphi)$ un espace de probalilité non commutatif. Soit $a \in \mathcal{A}$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose :*

$$k_n^a = k_n(a, ..., a).$$

On appelle $(k_n^a)_{n \geq 1}$ les cumulants libres de a.

4.2 Quelques propriétés des cumulants

Remarque 7. *Dans cette section, nous étudierons les propriétés des cumulants afin de montrer que les cumulants libres de la somme de deux variables libres d'un espace de probabilité non commutatif est la somme des cumulants libres des deux variables libres en question.*

Proposition 7. *Soit $(\mathcal{A}, \varphi)$ un espace de probabilité, soit $n \in \mathbb{N}$ et soient $(a_1, ..., a_n) \in \mathcal{A}^n$. Soit $\pi \in NC(n)$. Pour $V = (i_1, ..., i_s) \in \pi$, on note :*

$$k(\pi|_V) = k_s(a_{i_1}, ..., a_{i_s}).$$

Les cumulants libres vérifient la relation suivante :

$$k_\pi(a_1...a_n) = \prod_{V \in \pi} k(\pi|_V).$$

Démonstration: Par définition des cumulants libres, on a :

$$k_\pi(a_1, ..., a_n) = \sum_{\sigma \leq \pi} \varphi_\sigma(a_1, ..., a_n)\mu(\sigma, \pi).$$

Or, pour σ et π partitions non croisées de $[1, n]$ telles que $\sigma \leq \pi$, on a, d'après la proposition 6 :

$$\mu(\sigma, \pi) = \prod_{V \in \pi} \mu(\sigma|_V, \pi|_V).$$

Donc :

$$\begin{aligned} k_\pi(a_1...a_n) &= \sum_{\sigma \leq \pi} \prod_{V \in \pi} \varphi(\sigma|_V)\mu(\sigma|_V, \pi|_V) \\ &= \sum_{\sigma \leq \pi} \prod_{V \in \pi} \varphi(\sigma|_V)\mu(\sigma|_V, \pi|_V) \\ &= \prod_{V \in \pi} (\sum_{\sigma|_V \leq \pi|_V} \varphi(\sigma|_V)\mu(\sigma|_V, \pi|_V)) \\ &= \prod_{V \in \pi} k(\pi|_V). \end{aligned}$$

Proposition 8. *Soit $(\mathcal{A}, \varphi)$ un espace de probabilité non cummutatif, soit $n \in \mathbb{N}$ et soient $(a_1, ..., a_n) \in \mathcal{A}^n$. S'il existe $1 \leq i \leq n$ tel que $a_i = 1$ alors :*

$$k_n(a_1, ..., a_n) = 0.$$

Démonstration: Procédons par récurrence.

Initialisation : Soit $a \in \mathcal{A}$. On a :

$$\begin{cases} k_2(a,1) = \varphi(a) - \varphi(a)\varphi(1) = 0 \\ k_2(1,a) = \varphi(a) - \varphi(1)\varphi(a) = 0 \end{cases}$$

car $\mu(1_2, 1_2) = 1$ et $\mu(1_2, 0_2) = -1$.

hérédité : soient $(a_1, ..., a_n) \in \mathcal{A}^n$. Soit $1 \leq i_0 \leq n$ tel que $a_{i_0} = 1$.
Posons :

$$\begin{cases} \text{pour } 1 \leq i < i_0 \ b_i = a_i \\ \text{pour } n \geq i > i_0 \ b_{i-1} = a_i \ . \end{cases}$$

On a alors :

$$k_n(a_1, ..., 1, ..., a_n) = \varphi(b_1 ... b_{n-1}) - \sum_{\pi \in NC(n)(\pi \neq 1_n)} k_\pi(a_1, ..., 1, ..., a_n).$$

Or : $\forall \pi \in NC(n)$,

$$k_\pi(a_1, ..., 1, ..., a_n) = \prod_{V \in \pi} k(\pi|_V).$$

Donc, par hypothèse de récurrence, les seules partitions qui peuvent donner une contribution non nulle sont de la forme $\pi = \pi' \cup (i_0)$. Par conséquent :

$$k_n(a_1, ..., 1, ..., a_n) = \varphi(b_1 ... b_{n-1}) - \underbrace{\sum_{\pi' \in NC(n-1)} k_{\pi'}(b_1, ..., b_{n-1})\, \varphi(1)}_{\varphi(b_1 ... b_{n-1})}.$$

Donc :

$$k_n(a_1, ..., 1, ..., a_n) = 0.$$

Définition 10. *Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $1 \leq m \leq n$. Soient $0 = i_0 < i_1 < ... < i_m = n$. Soit $\tau \in NC(m)$. On définit $\sigma \in NC(n)$ comme :*

$$\sigma = [(1, ... i_1), ..., (i_{m-1} + 1, ... i_m)].$$

On définit $\hat{\tau}$ comme élément de NC(n) de la façon suivante : on remplace dans τ chaque j par $i_{j-1} + 1, .., i_j$.

Soient $1 \leq k_0, k_1 \leq n$. On définit K_0 et K_1 tels que :

$$\begin{cases} i_{K_0 - 1} + 1 \leq k_0 \leq i_{K_0} \\ i_{K_1 - 1} + 1 \leq k_1 \leq i_{K_1}. \end{cases}$$

k_0 et k_1 sont donc dans le même bloc de $\hat{\tau}$ si K_0 et K_1 sont dans le même bloc de τ.

Exemple 7. *On prend :*

$$\begin{cases} n = 12 & i_1 = 4 \qquad \tau = [(1,3),(2),(4)] \\ m = 4 & i_2 = 7 \\ & i_3 = 10. \end{cases}$$

Alors :

$$\begin{cases} \sigma = [(1,2,3,4),(5,6,7),(8,9,10),(11,12)] \\ \hat{\tau} = [(1,2,3,4,8,9,10),(5,6,7),(11,12)]. \end{cases}$$

Remarque 8. $\hat{\tau} = 1_n$ *si et seulement si* $\tau = 1_m$.

Proposition 9. *Soit* $(\mathcal{A},\varphi)$ *un espace de probabilité non commutatif. Soit* $n \in \mathbb{N}$. *Soit* $(a_1,...a_n) \in \mathcal{A}^n$. *Soit* $1 \leq m \leq n$. *Soient* $1 = i_0 < i_1 < ... < i_m = n$.

On pose, pour $1 \leq j \leq m$ *:*

$$A_j = a_{i_{j-1}+1}...a_{i_j}$$

Soit $\tau \in NC(m)$. *On a :*

$$k_\tau(A_1...A_m) = \sum_{\substack{\pi \in NC(n) \\ \pi \vee \sigma = \hat{\tau}}} k_\pi(a_1...a_n) \tag{1}$$

où σ *et* $\hat{\tau}$ *sont définis ci dessus.*

Remarque 9. *Dans le cas où* $\tau = 1_m$, *cela donne :*

$$k_m(A_1...A_m) = \sum_{\substack{\pi \in NC(n) \\ \pi \vee \sigma = 1_n}} k_\pi(a_1...a_n).$$

Démonstration:

Montrons le résultat par récurrence sur m.

Soit $(\mathcal{A},\varphi)$ un espace de probabilité non commutatif. Soit $n \in \mathbb{N}$.

Soit $(a_1,...a_n) \in \mathcal{A}^n$.

Initialisation :

Si m=1, alors, nécessairement, $\tau = (1)$, $\hat{\tau} = 1_n$ et $\sigma = 1_n$.

On a donc :

$$\begin{aligned} k_\tau(A_1...A_m) &= k_1(a_1...a_n) \\ &= \varphi(a_1...a_n) \\ &= \sum_{\pi \in NC(n)} k_\pi(a_1...a_n). \end{aligned}$$

Or $\pi \vee \sigma = \hat{\tau}$ signifie : $\pi \vee 1_n = 1_n$, ce qui est vrai pour tout π dans $NC(n)$. Pour m=1, on a donc bien :

$$k_\tau(A_1...A_m) = \sum_{\substack{\pi\in NC(n)\\ \pi\vee\sigma=\hat{\tau}}} k_\pi(a_1...a_n).$$

Hérédité :

On suppose maintenant que la relation (1) est vérifiée pour tout $m' \leq m$.

Premier cas : $\tau \neq 1_{m+1}$.

Soient τ_1 et τ_2 tels que $\tau_1 \cup \tau_2 = \tau$.
Alors d'après la proposition 7 , on a :

$$k_\tau(A_1, ..., A_{m+1}) = k_{\tau_1}(B_1, ..., B_s)k_{\tau_2}(C_1, ..., C_t)$$

avec $s + t = m + 1$ et $s \leq m$ et $t \leq m$.

Soit $(b_1, ..., b_p)$ le sous ensemble de $(a_1, ..., a_n)$ utilisé pour former $B_1, ..., B_s$ et soit $(c_1, ..., c_q)$ le sous ensemble de $(a_1, ..., a_n)$ utilisé pour former $C_1, ..., C_t$. On a : $p + q = n$.

Par hypothèse de récurrence, on obtient :

$$k_\tau(A_1, ..., A_{m+1}) = \sum_{\substack{\pi_1\in NC(p)\pi_1\vee\sigma_1=\hat{\tau_1}\\ \pi_2\in NC(q)\pi_2\vee\sigma_2=\hat{\tau_2}}} k_{\pi_1}(b_1, ..., b_p)k_{\pi_2}(c_1, ..., c_q).$$

En posant $\pi = \pi_1 \cup \pi_2$ (σ étant défini ci dessus pour $\tau = \tau_1 \cup \tau_2$) on a alors :

$$\begin{aligned} k_\tau(A_1...A_{m+1}) &= \sum_{\substack{\pi_1\in NC(p),\pi_1\vee\sigma|_{(b_1,...b_p)}=\hat{\tau_1}\\ \pi_2\in NC(q),\pi_2\vee\sigma|_{(c_1,...c_q)}=\hat{\tau_2}}} k_\pi(a_1...a_n) \\ &= \sum_{\substack{\pi\in NC(n)\\ \pi\vee\sigma=\hat{\tau}}} k_\pi(a_1...a_n). \end{aligned}$$

Deuxième cas : $\tau = 1_{m+1}$

Par définition des cumulants libres, on a :

$$\varphi(A_1...A_{m+1}) = \sum_{\tau\in NC(m+1)} k_\tau(A_1, .., A_{m+1}).$$

Donc :

$$\begin{aligned} k_{m+1}(A_1, .., A_{m+1}) &= \varphi(A_1...A_{m+1}) - \sum_{\tau\in NC(m+1),\tau\neq 1_{m+1}} k_\tau(A_1, .., A_{m+1}) \\ &= \varphi(a_1...a_n) - \sum_{\substack{\tau\in NC(m+1)\\ \tau\neq 1_{m+1}}} \sum_{\substack{\pi\in NC(n)\\ \pi\vee\sigma=\hat{\tau}}} k_\pi(a_1, .., a_n) \end{aligned}$$

d'après le résultat établi dans le "premier cas". Or

$$\tau = 1_{m+1} \Leftrightarrow \hat{\tau} = 1_n$$

et :

$$\varphi(a_1...a_n) = \sum_{\pi \in NC(n)} k_\pi(a_1, .., a_n).$$

Donc :

$$\begin{aligned} k_{m+1}(A_1, .., A_{m+1}) &= \varphi(a_1...a_n) - \sum_{\substack{\pi \in NC(n) \\ \pi \vee \sigma \neq 1_n}} k_\pi(a_1, .., a_n) \\ &= \sum_{\pi \in NC(n)} k_\pi(a_1, .., a_n) - \sum_{\substack{\pi \in NC(n) \\ \pi \vee \sigma \neq 1_n}} k_\pi(a_1, .., a_n) \\ &= \sum_{\substack{\pi \in NC(n) \\ \pi \vee \sigma = \hat{1}_{m+1}}} k_\pi(a_1, .., a_n). \end{aligned}$$

4.3 Lien entre cumulants libres et liberté de deux variables aléatoires

Soient a_1 et a_2 deux éléments d'un C*-espace de probabilité non commutatif $(\mathcal{A}, \varphi)$. On note $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ les sous algèbres unitaires de $\mathcal{A}$ engendrées respectivement par a_1 et a_2.

Proposition 10. *Il y a équivalence entre :*

i) pour tout $n \geq 2$ et pour tout $i_k \in \{1, 2\}$, avec $k \leq n$, on a $k_n(a_{i_1}, ..., a_{i_n}) = 0$ s'il existe $1 \leq k, l \leq n$ avec $i_k = 1$ et $i_l = 2$.

ii) pour tout $n \geq 2$ et pour tout $b_k \in A_{i_k}$ avec $i_k \in \{1, 2\}$, pour $k \leq n$, on a $k_n(b_1, ..., b_n) = 0$ s'il existe $1 \leq k, l \leq n$ avec $i_k = 1$ et $i_l = 2$.

Démonstration:
L'implication ii)⇒i) est claire.
Etablissons i)⇒ii).

Tout élément de $\mathcal{A}_i$, pour $i = 1$ ou 2 est un polynôme en a_i. D'après la proposition 8, pour $n \geq 2$ et $(b_1, ..., b_n) \in \mathcal{A}^n$, $k_n(b_1, ..., b_n) = 0$ dès que l'un des b_k, pour $1 \leq k \leq n$ vaut 1. Il suffit donc de traiter le cas où chaque b_k est un multiple de a_{i_k} (linéarité des cumulants par rapport à l'une des variables).

On réécrit alors le produit $b_1...b_n$ sous la forme $a_{j_1}...a_{j_p}$ avec $n \leq p$ et $j_k = 1$ ou 2 pour $k \leq p$.

Soit σ la partition de $[1, p]$ dont chaque bloc regroupe les éléments voisins qu'il faut multiplier entre eux afin d'obtenir les b_i. Alors, d'après la proposition 9, on a :

$$k_n(b_1, ..., b_n) = \sum_{\substack{\pi \in NC(p) \\ \pi \vee \sigma = 1_p}} k_\pi(a_{j_1}, ..., a_{j_p}).$$

Par hypothèse, $k_\pi(a_{j_1},...,a_{j_p})$ ne peut être non nul que si tous les blocs de π ne regroupent qu'un seul des a_i. Mais comme $\pi \vee \sigma = 1_p$, tous les blocs de σ sont couplés par π. Donc, pour que $k_\pi(a_{j_1},...,a_{j_p})$ soit non nul, il faut que $j_1 = j_2 = ... = j_p$, ce qui est impossible puisqu'il existe $1 \leq k, l \leq n$ avec $i_k = 1$ et $i_l = 2$.

En conclusion, s'il existe $1 \leq k, l \leq n$ tel que $i_k = 1$ et $i_l = 2$ alors $k_n(b_1,...,b_n) = 0$.

Théorème 2 (Speicher)**.** *Soit $(\mathcal{A}, \varphi)$ un espace de probalilité non commutatif et soient deux variables aléatoires, a_1 et a_2, éléments de $\mathcal{A}$. On note $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ les sous algèbres unitaires de $\mathcal{A}$ engendrées respectivement par a_1 et a_2. Alors, il y a équivalence entre :*

i) a_1 et a_2 sont libres

ii) pour tout $n \geq 2$ et pour tout $b_i \in \mathcal{A}_{j_i}$ avec $j_i = 1$ ou 2, $k_n(b_1,...,b_n) = 0$ dès qu'il existe $1 \leq k, l \leq n$ avec $j_k = 1$ et $j_l = 2$.

Démonstration:

ii)$\Rightarrow$ i).

Soit $n \geq 2$. Pour $i \leq n$, soit $b_i \in \mathcal{A}_{j_i}$ avec $j_i = 1$ ou 2 et $j_1 \neq j_2 \neq ... \neq j_n$ et $\varphi(b_i) = 0$. Il faut montrer que $\varphi(b_1...b_n) = 0$

On a :

$$\varphi(b_1...b_n) = \sum_{\pi \in NC(n)} k_\pi(b_1,..,b_n).$$

Or :

$$k_\pi(b_1,..,b_n) = \prod_{V \in \pi} k_{\pi|_V}$$

et, comme π est une partition non croisée de $[1, n]$, il y a au moins un bloc V_0 de π de la forme $(b_l...b_{l+p})$, quitte à ce que p soit nul, et donc $k_{\pi|_{V_0}} = 0$. En effet, si $p = 0$, c'est une conséquence de $\varphi(b_i) = 0$ pour tout i, et sinon c'est juste l'hypothèse ii).

i)$\Rightarrow$ ii)

Soit $n \geq 2$ et, pour $i \leq n$, soit $b_i \in \mathcal{A}_{j_i}$ avec $j_i = 1$ ou 2.

Remarquons d'abord que, d'après la proposition 8, on a :

$$k_n(b_1,...,b_n) = k_n(b_1 - \varphi(b_1),...,b_n - \varphi(b_n))$$

donc on peut supposer que les b_i sont centrés.

De plus, dans le cas où les b_i sont centrés et alternés, c'est à dire $j_1 \neq j_2 \neq ... \neq j_n$, le résultat est immédiat :

$$k_n(b_1,...,b_n) = \sum_{\pi \in NC(n)} \varphi_\pi(b_1...b_n)\mu(\pi, 1_n)$$

et au moins un des facteurs de φ_π est de la forme $\varphi(b_l b_{l+1}...b_{l+p})$, quitte à ce que p soit nul, et alors $\varphi(b_l b_{l+1}...b_{l+p}) = 0$ par définition de la liberté.

Dans le cas général, on veut montrer que $k_n(b_1, ..., b_n) = 0$ sachant qu'il existe $1 \leq k, l \leq n$ tels que $j_k = 1$ et $j_l = 2$. De plus, d'après la remarque effectuée ci dessus, on peut supposer que les b_i sont centrés.

Procédons par récurrence.

Initialisation :

Pour $n = 2$, on a : quitte à permutter les rôles de a_1 et a_2, on peut supposer que $j_1 = 1$ et $j_2 = 2$. On est alors dans le cas où les b_i sont centrés et alternés. On a donc :

$$k_2(b_1, b_2) = 0.$$

Hérédité :

Réécrivons le produit $b_1...b_n$ sous la forme $B_1...B_p$ ($p \leq n$) avec pour $i \leq p$ chaque B_i qui appartient à A_{J_i} ($1 \leq J_i \leq 2$) tels que $J_1 \neq J_2 \neq ... \neq Jp$. On a $p \geq 2$ à cause de l'hypothèse : il existe $1 \leq k, l \leq n$ tels que $j_k = 1$ et $j_l = 2$.

Notons σ la partition non croisée de $[1, n]$ qui regroupe les $b_1, ..., b_n$ en les $B_1, ..., B_p$. Alors, d'après la proposition 9, on a :

$$k_p(B_1, ..., B_p) = \sum_{\substack{\pi \in NC(n) \\ \pi \vee \sigma = 1_n}} k_\pi(b_1, ..., b_n).$$

Donc :

$$k_n(b_1, ..., b_n) = k_p(B_1, ..., B_p) - \sum_{\substack{\pi \in NC(n) \pi \vee \sigma = 1_n \\ \pi \neq 1_n}} k_\pi(b_1, ...b_n).$$

Les B_i sont centrés et alternés, donc :

$$k_p(B_1, ..., B_p) = 0.$$

De plus, par hypothèse d'induction, $k_\pi(b_1, ...b_n)$ peut être non nul que si chaque bloc de π ne couple que des éléments de la même sous algèbre ($\mathcal{A}_1$ ou $\mathcal{A}_2$). Donc tous les blocs de σ couplés par π doivent correspondre à la même sous algèbre. Or $\pi \vee \sigma = 1_n$, donc π couple tous les blocs de σ. De plus, il existe $1 \leq k, l \leq n$ tels que $j_k = 1$ et $j_l = 2$. Donc :

$$k_\pi(b_1, ...b_n) = 0$$

D'où :

$$k_n(b_1, ...b_n) = 0.$$

Corollaire 1. *Soit $(\mathcal{A}, \varphi)$ un espace de probabilité non commutatif. Soient a_1 et a_2 deux éléments de $\mathcal{A}$. Il y a équivalence entre :*

i) a_1 et a_2 sont libres

ii) pour tout $n \geq 2$ et pour tout $i_k \in \{1, 2\}$, avec $k \leq n$, on a $k_n(a_{i_1}, ..., a_{i_n}) = 0$ s'il existe $1 \leq k, l \leq n$ avec $i_k = 1$ et $i_l = 2$.

Proposition 11. *Soit $(\mathcal{A}, \varphi)$ un espace de probabilité non commutatif. Soient a et b deux éléments de $\mathcal{A}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.*

Si a et b sont libres, alors :

$$k_n^{a+b} = k_n^a + k_n^b.$$

Démonstration: Soient a et b deux éléments de $\mathcal{A}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$k_n^{a+b} = k_n(a+b, ..., a+b) = k_n(a, ..., a) + k_n(b, ..., b).$$

En effet, tous les cumulants qui ont simultanément a et b comme arguments sont nuls d'après le corollaire 1. On a donc bien :

$$k_n^{a+b} = k_n^a + k_n^b.$$

5 Relations entre cumulants libres et moments d'une variable aléatoire : la formule de Voiculescu

Nous chercherons dans cette section à établir des relations, qui permettent, connaissant les cumulants libres d'une variable aléatoire, élément d'un espace de probabilité non commutatif $(\mathcal{A}, \varphi)$, d'obtenir ses moments et réciproquement.

Soit $(\mathcal{A}, \varphi)$ un espace de probabilité non commutatif. On fixe une fois pour toutes un élément $a \in \mathcal{A}$, dont on note respectivement $(m_n)_{n \geq 1}$ et $(k_n)_{n \geq 1}$ les moments et les cumulants libres.

5.1 Définitions et rappels

Proposition 12. *On a, pour $n \in \mathbb{N}$:*

$$m_n = \sum_{\pi \in NC(n)} k_\pi.$$

Démonstration:
Soit $n \in \mathbb{N}$, et soit $(a_1, ..., a_n) \in \mathcal{A}^n$. Alors :

$$\varphi(a_1 ... a_n) = \sum_{\sigma \in NC(n)} k_\sigma(a_1, ..., a_n)$$

d'où le résultat.

Définition 11. *On pose :*

$$\begin{cases} M(z) := 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} m_n z^n & C(z) := 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} k_n z^n \\ G(z) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{m_n}{z^{n+1}} = \frac{1}{z} M(\frac{1}{z}) & R(z) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} k_{n+1} z^n \\ K(z) = R(z) + \frac{1}{z} = \frac{1}{z} C(z). & \end{cases}$$

G(z)et R(z) sont appelées respectivement la transformée de Cauchy et la R-transformée.

5.2 La formule de Voiculescu

Proposition 13. *Avec les définitions et notations qui précèdent, on a :*

$$C(zM(z)) = M(z).$$

Démonstration:

D'après la proposition 12, on a :

$$m_n = \sum_{\pi \in NC(n)} k_\pi.$$

Soit $\pi \in NC(n)$. Notons V_1 son premier bloc. On a :

$$V_1 = (v_1, ..., v_s)$$

avec $1 = v_1 < v_2 < ... < v_s \leq n$.

En posant $v_{s+1} = n + 1$, on a alors :

$$\pi = V_1 \cup \tilde{\pi_1} \cup \tilde{\pi_2} \cup ... \cup \tilde{\pi_s}$$

avec $\tilde{\pi_j} \in NC(v_j + 1, ...v_{j+1} - 1)$ pour $1 \leq j \leq s$.

En effet, comme π est une partition non croisée, chaque bloc de π autre que V_1 ne peut relier que des éléments compris strictement entre un v_k et un v_{k+1}.

La proposition 7 nous donne alors :

$$k_\pi = k_s k_{\tilde{\pi_1}} ... k_{\tilde{\pi_s}}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}
m_n &= \sum_{\pi \in NC(n)} k_\pi \\
&= \sum_{\pi \in NC(n)} k_s k_{\tilde{\pi}_1} ... k_{\tilde{\pi}_s} \\
&= \sum_{s=1}^{n} k_s \sum_{1=v_1<v_2<..<v_s \leq n} \prod_{i=1}^{s} \left(\sum_{\tilde{\pi}_i \in NC(v_j+1,...v_{j+1}-1)} k_{\tilde{\pi}_i} \right) \\
&= \sum_{s=1}^{n} k_s \sum_{1=v_1<v_2<..<v_s \leq n} m_{v_2-v_1-1} ... m_{n-v_s} \\
&= \sum_{s=1}^{n} \sum_{i_1+i_2+...+i_s=n-s} k_s m_{i_1} ... m_{i_s}.
\end{aligned}$$

On a alors, pour $z \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}
M(z) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} m_n z^n \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{n} \sum_{i_1+i_2+...+i_s=n-s} k_s z^s m_{i_1} z^{i_1} ... m_{i_s} z^{i_s} \\
&= 1 + \sum_{s=1}^{\infty} k_s z^s \left(\sum_{i=0}^{\infty} m_i z^i \right)^s \\
&= C(zM(z)).
\end{aligned}$$

Corollaire 2. *La formule de Voiculescu*

Soit $(\mathcal{A}, \varphi)$ un espace de probabilité non commutatif. Soit $a \in \mathcal{A}$. La transformé de Cauchy $G(z)$ et la R-transformée $R(z)$ de a vérifient la relation :

$$\forall z \in \mathbb{C}, G\left[R(z) + \frac{1}{z}\right] = z.$$

Démonstration:

Soit $z \in \mathbb{C}$.

On veut montrer :

$$G\left[R(z) + \frac{1}{z}\right] = z.$$

Ce qui est équivalent à montrer :

$$G[K(z)] = z.$$

On a :

$$G(z) = \frac{1}{z} M\left(\frac{1}{z}\right)$$

$$C(z) = zK(z).$$

Donc, d'après la proposition 13 :

$$\begin{aligned} K[G(z)] &= \frac{C[G(z)]}{G(z)} \\ &= \frac{C(\frac{1}{z}M[\frac{1}{z}])}{G(z)} \\ &= \frac{M[\frac{1}{z}]}{G(z)} \\ &= z. \end{aligned}$$

Donc $K^{-1} = G$ et finalement

$$G[K(z)] = z.$$

6 Procédé d'obtention de $\mu \boxplus \nu$

6.1 Cas général

Soient μ et ν, les lois à support compacts sur $\mathbb{R}$ de deux variables libres a et b. On cherche à déterminer $\mu \boxplus \nu$, la loi de la variable aléatoire a+b. On procède de la manière suivante :

$$\mu \longrightarrow G_\mu \longrightarrow R_\mu$$
$$\nu \longrightarrow G_\nu \longrightarrow R_\nu$$

Puis :

$$R_\mu, R_\nu \longrightarrow R_\mu + R_\nu = R_{\mu \boxplus \nu} \longrightarrow G_{\mu \boxplus \nu} \longrightarrow \mu \boxplus \nu.$$

En effet, d'après la proposition 11, comme a et b sont libres, on a :
$\forall n \in \mathbb{N}$

$$k_n^{a+b} = k_n^a + k_n^b$$

donc :

$$R_\mu + R_\nu = R_{\mu \boxplus \nu}.$$

6.2 Loi μ à support compact absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$

Proposition 14. *Explicitation du passage de G à μ*

Soit μ, la loi d'une variable aléatoire a, à support compact et continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ (on travaille dans un C-espace de probabilité et a* *est une variable autoadjointe car le support de la loi est inclus dans $\mathbb{R}$). Notons h la densité de μ par rapport à la mesure de Lebesgue : $d\mu(t) = h(t)dt$.*

Alors on a :

$$h(t) = -\frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0} ImG_\mu(t+i\varepsilon).$$

Démonstration:

Remarquons d'abord que, dans le cadre d'une loi μ continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, on a, pour tout z de $\mathbb{C}$ dont la partie imaginaire est strictement positive :

$$G_\mu(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu(t)}{z-t}.$$

Donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et pour tout $0 \leq \varepsilon \leq 1$:

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{\pi} ImG_\mu(t+i\varepsilon) &= -\frac{1}{\pi}\Im\left(\int \frac{d\mu(s)}{t+i\varepsilon-s}\right) \\
&= -\frac{1}{\pi} Im(\int \frac{t-s-i\varepsilon}{(t-s)^2+\varepsilon^2} d\mu(s)) \\
&= -\frac{1}{\pi} Im(\int \frac{t-s-i\varepsilon}{(t-s)^2+\varepsilon^2} h(s)ds) \\
&= \frac{1}{\pi}\int \frac{\varepsilon}{(t-s)^2+\varepsilon^2} h(s)ds.
\end{aligned}$$

Posons :

$$f_\varepsilon(s) = \frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{(t-s)^2+\varepsilon^2}.$$

Montrons que f_{ε_n} converge au sens des distributions vers δ_t quand $n \to +\infty$ avec $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$ où $n \in \mathbb{N}$. Cela revient à montrer que $g_n(s) = \frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon_n}{s^2+\varepsilon_n^2}$ converge au sens des distributions vers δ_0 quand $n \to +\infty$.

Posons :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\
\rho : x &\mapsto \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}.
\end{aligned}$$

Alors $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et :

$$\int_{\mathbb{R}} \rho(x)dx = 1.$$

On a alors, pour $n \in \mathbb{N}$ et $s \in \mathbb{R}$:

$$g_n(s) = n\rho(ns)$$

Donc, d'après la théorie générale des distributions, g_n est une approximation de l'unité et g_n converge au sens des distributions vers δ_0 quand $n \to +\infty$.

D'où :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} -\frac{1}{\pi} ImG_\mu(t+i\varepsilon) = h(t).$$

6.3 Un exemple : calcul de $1/2(\delta_1 + \delta_{-1}) \boxplus 1/2(\delta_1 + \delta_{-1})$

On note $\mu = 1/2(\delta_1 + \delta_{-1})$ et on a :

$$G_\mu(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z+1} + \frac{1}{z-1}\right) = \frac{z}{z^2-1}$$

Puis de $z = G_\mu(K_\mu(z))$ on obtient $z(K_\mu(z))^2 - K_\mu(z) - z = 0$.
On en déduit

$$K_\mu(z) = \frac{1 \pm \sqrt{1+4z^2}}{2z}.$$

Donc $R_\mu(z) = K_\mu(z) - \frac{1}{z} = \frac{\pm\sqrt{1+4z^2}-1}{2z}$. Or $R_\mu(0) = k_1(\mu) = m_1(\mu) = 0$ donc :

$$R_\mu(z) = \frac{\sqrt{1+4z^2}-1}{2z}.$$

Ainsi

$$R_{\mu\boxplus\mu}(z) = 2R_\mu(z) = \frac{\sqrt{1+4z^2}}{z} - \frac{1}{z}.$$

Et donc

$$zG_{\mu\boxplus\mu}(z) = \sqrt{1+4G_{\mu\boxplus\mu}(z)^2}.$$

Ainsi

$$G_{\mu\boxplus\mu}(z) = \frac{1}{\sqrt{z^2-4}}.$$

Enfin $\mu \boxplus \mu$ a pour densité :

$$\begin{aligned}
\frac{d(\mu\boxplus\mu)}{dt}(t) &= -\frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0} Im\left(G_{\mu\boxplus\mu}(t+i\varepsilon)\right) \\
&= -\frac{1}{\pi} Im\left(\frac{1}{\sqrt{t^2-4}}\right) \\
&= \begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{4-t^2}} & \text{si } |t| \geq 2 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Remarque 10. *La convolution libre n'est, en particulier, pas distributive par rapport à l'addition. En effet il est facile de voir que $\delta_a \boxplus \delta_b = \delta_{a+b}$. On peut même obtenir une distribution continue à partir de distributions discrètes.*

A Tableau comparatif : convolution usuelle et convolution libre

	probabilités classiques	probabilités libres
espace	$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ où $\mathcal{F}$ est une tribu sur Ω et $\mathbb{P}$ est une mesure de probabilité.	$(\mathcal{A}, \varphi)$ où $\mathcal{A}$ est une $\mathbb{C}$-algèbre et φ est une forme linéaire telle que $\varphi(1) = 1$.
variable aléatoire (v.a.)	Soit $(E, \mathcal{E})$ un espace mesuré. Une v.a. à valeur dans E est une application mesurable : $X : \Omega \to E$	$a \in \mathcal{A}$.
loi	La loi de X est définie par : $\mu_X(A) = \mathcal{P}(X^{-1}(A)),\ \forall A \in \mathcal{E}$. Si $E = \mathbb{R}$, X est dite à densité si μ_X est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Dans ce cas, μ est l'unique mesure qui vérifie : $\forall P \in \mathbb{C}[t]$, $$\mathbb{E}[P(X)] = \int P(x) d\mu_X(x).$$	On note μ_a la distribution de a. C'est la forme linéaire sur $\mathbb{C}[t]$ définie par : $$\mu_a : P \mapsto \varphi(P(a)).$$
distribution jointe de plusieurs variables aléatoires	Soient $X_1, ..., X_n$, n v.a. On note leur loi jointe : $\mu_{(X_1,...,X_n)}$. Alors, si $E = \mathbb{R}$: $\forall P \in \mathbb{C}[Y_1..., Y_n], \mathbb{E}[P(X_1, ..., X_n)] = \int P(x_1, ..., x_n) d\mu_{(X_1,...,X_n)}(x_1, ..., x_n)$.	Soient $a_1, ..., a_n$, n v.a. On note leur loi jointe : $\mu_{(a_1,...,a_n)} = \mu_a$. On a : $\forall P \in \mathbb{C}\langle Y_1, ..., Y_n\rangle\ \mu_a(P) = \varphi(P(a_1, ..., a_n))$ où $\mathbb{C}\langle Y_1, ..., Y_n\rangle$ est l'ensemble des polynômes non commutatifs à n variables.
indépendance classique et liberté	$X_1, ..., X_n$ sont indépendants si pour toutes les fonctions mesurables positives (ou bornées) $f_1, ..., f_n$ $\mathbb{E}(f_1(X_1)...f_n(X_n)) = \mathbb{E}(f_1(X_1))...\mathbb{E}(f_n(X_n))$.	Liberté : soient $a_1, ..., a_n$, n v.a et $\mathcal{A}_i = Alg(1, a_i)$. $a_1, ..., a_n$ sont libres si : $\forall k \in \mathbb{N}, \forall j_1...j_k \in \{1, ..., n\}, \forall b_i \in A_{j_i}$ telles que $\varphi(a_i) = 0 : j_1 \neq j_2 \neq ... \neq j_k \Rightarrow \varphi(a_1...a_k) = 0$.
convolution	Soient X et Y deux v.a. indépendantes. La loi de $X + Y$ est : $\mu_X * \mu_Y$.	Si a et b sont libres, la distribution de $a + b$ est la convolution libre de leurs distributions, notée : $\mu_a \boxplus \mu_b$.
transformation linéarisant la convolution	Logarithme de la transformée de Fourier : $$log(\widehat{\mu_X * \mu_Y}) = log(\hat{\mu_X}) + log(\hat{\mu_Y}).$$	R-transformée : $$R_{\mu_a \boxplus \mu_b} = R_{\mu_a} + R_{\mu_b}.$$

B Bibliographie

[1] R. Speicher, Combinatorics of free probability theory,
http ://www.mast.queensu.ca/ speicher/papers/lectures-IHP.pdf

[2] G. Kreweras, Sur les partitions non croisées d'un cycle, Discrete Math. 1 (1972), no. 4, 333-350.

[3] R. Speicher, Combinatorial theory of the free product with amalgamation and operator valued free probability theory, Memoir of the AMS 1998

[4] G.C. Rota, Gian-Carlo Rota on combinatorics : introductory papers and commentaries, Boston MA ; Basel ; Berlin : Birkhäuser, 1995.

[5] A. Nica et R. Speicher, Lectures on the combinatorics of Free Probability, London Mathematical Society lecture note series ; 335, 2006.

[6] N.I. Akhieser, The classical moments problem, Moscou, 1961.

[7] P. Biane, Free probability for probabilists. Quantum probability communications, Vol.XI (Grenoble, 1998, 55-71, Qp-PQ, XI, World Sci. Publishng, River Edge, NJ, 2003.

[8] F. Benaych-Georges, Matrices aléatoires et probabilités libres. Thèse de doctorat sous la direction de P.Biane soutenue le 12.12.05 à Paris VI.

Nous tenons à remercier Thierry Levy qui a encadré notre travail.