Théories homologiques et cohomologiques

Sylvain Rairat - sous la direction de Lionel Schwartz et Goeffrey Powell

Juin 2006

1 Introduction

Le but premier de la topologie algébrique est de démontrer l'existence ou la non-existence d'applications continues entre espaces topologiques, et ainsi de déterminer si deux espaces donnés sont homéomorphes. Le principe général est d'associer à tout espace topologique un invariant de nature algébrique, et à chaque application continue un morphisme, de façon compatible avec la composition. Ces invariants sont généralement des ensembles, des groupes , des anneaux, des modules ou des algèbres sur un anneau. Bien sûr, plus la structure est riche, moins il y a de morphismes entre deux objets donnés, et l'invariant ainsi donné est plus intéressant. Il convient naturellement de formaliser ces notions. Le language naturel que nous utiliserons est celui des catégories, qui permet d'exprimer, à l'aide de foncteurs, ces invariants. Dans la suite nous nous intéresserons plus particulièrement aux invariants particuliers que sont les théories (co)homologiques.

2 Théories (co)homologiques

Commençons par définir ce qu'est une théorie homologique et cohomologique. Il y a essentiellement deux manières équivalentes de les définir. Quelques notations : $\mathscr{T}^{2'}$ désigne la catégorie des paires d'espaces topologiques, et des classes d'homotopies d'applications continues. Soit $\mathscr{A}$, la catégorie des groupes abéliens. Dans tout ce qui suit, nous noterons $[-;-]$ l'ensemble des classes d'homotopies d'application continues entre deux objets. On définit le foncteur de restriction suivant :

$$R : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{T}^{2'} & \longrightarrow & \mathscr{T}^{2'} \\ (X,A) & \longmapsto & (A,\emptyset) \end{array} \right.$$

Définition 2.1. *Une théorie homologique h_* non réduite sur $\mathscr{T}^{2'}$ est une suite de foncteurs $h_n : \mathscr{T}^{2'} \longrightarrow \mathscr{A}$, et de transformations naturelles $\partial_n : h_n \longrightarrow h_{n-1} \circ R$, $n \in \mathbb{Z}$, et qui vérifient :*

- *Exactitude : Pour toute paire $(X,A) \in \mathscr{T}^{2'}$, la longue suite suivante est exacte (où i et j désignent les inclusions) :*

$$\cdots \to h_{n+1}(X,A) \xrightarrow{\partial_{n+1}(X,A)} h_n(A,\emptyset) \xrightarrow{h_n(i)} h_n(X,\emptyset) \xrightarrow{h_n(j)} h_n(X,A) \xrightarrow{\partial_n(X,A)} \cdots$$

– *Excision : Pour toute paire* $(X, A) \in \mathscr{T}^{2'}$ *et tout* $U \subset A$*, tel que* $\overline{U} \subset \overset{\circ}{A}$*, l'inclusion* $j : (X - U, A - U) \longrightarrow (X, A)$ *induit un isomorphisme :*

$$h_n(j) : h_n(X - U, A - U) \xrightarrow{\sim} h_n(X, A)$$

On va maintenant définir les théories homologiques réduites qui sont définies sur la catégorie $\mathscr{PT}'$ des espaces topologiques pointés. On rappelle que l'on dispose du foncteur de suspension :

$$\Sigma : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{PT}' & \longrightarrow & \mathscr{PT}' \\ (X, x_0) & \longmapsto & (\Sigma X, *) = \mathbb{S}^1 \wedge X \end{array} \right.$$

On rappelle que $X \vee Y$ est l'union pointée de deux espaces, et que $X \wedge Y$ est l'espace $(X \times Y)/(X \vee Y)$.

Définition 2.2. *Une théorie homologique réduite* k_* *sur* $\mathscr{PT}'$ *est la donnée de foncteurs* $k_n : \mathscr{PT}' \longrightarrow \mathscr{A}$ *et d'isomorphismes de foncteurs* $\sigma_n : k_n \longrightarrow k_{n+1} \circ \Sigma$*,* $n \in \mathbb{Z}$*, satisfaisant :*

Pour toute paire pointée (X, A, x_0)*, avec inclusions* $i : (A, x_0) \to (X, x_0)$ *et* $j : (X, x_0) \to (C_i, *)$*, la suite suivante est exacte :*

$$k_n(A, x_0) \xrightarrow{k_n(i)} k_n(X, x_0) \xrightarrow{k_n(j)} k_n(C_i, *)$$

On demande souvent aux théories réduites de satisfaire aux axiomes suivants :

– Axiome des bouquets : Pour toute famille $(X_\alpha, x_\alpha)_{\alpha \in A}$ d'espaces topologiques pointés, les inclusions $i_\alpha : X_\alpha \longrightarrow \bigvee_{\beta \in A} X_\beta$ induisent un isomorphisme :

$$\bigoplus_{\beta \in A} k_n(X_\beta) \xrightarrow{\sim} k_n\left(\bigvee_{\beta \in A} X_\beta\right)$$

– Axiome des équivalences faibles d'homotopie : Si $f : X \to Y$ est une équivalence faible d'homotopie, alors $f_* : k_n(X, x_0) \to k_n(Y, f(x_0))$ est un isomorphisme pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et tout $x_0 \in X$.

Les deux définitions précédentes sont en correspondance. En effet, étant donnée une théorie h_* non réduite, on définit $\tilde{h}_n(X, x_0) = h_n(X, x_0)$, on peut voir que $\tilde{h}_*$ est alors bien une théorie réduite. Si X est un espace topologique, on note X^+, l'union disjointe de X et d'un point base, si A est une partie de X, $X \cup CA$ est le cône de l'inclusion de A dans X. Si k_* est une théorie réduite, on peut définir $\hat{k}_n(X, A) = k_*(X^+ \cup CA^+)$. Si k_* vérifie l'axiome des équivalences faibles d'homotopies, alors $\hat{k}_*$ est une théorie non réduite. De plus ces opérations forment bien des équivalences inverses l'une de l'autre. Pour différencier les deux, nous noterons h_* la théorie non réduite, et $\tilde{h}_*$, la théorie réduite associée.

Un des problèmes des théories homologiques, est qu'il est parfois difficile de définir de manière géométrique un foncteur pour tous les espaces topologiques. On a en effet parfois besoin d'hypothèses de régularité. C'est pourquoi, en pratique, on préfère travailler sur les sous-catégories formées des (couples) de CW-complexes (pointés) $\mathscr{W}^{2'}$ et $\mathscr{PW}'$, qui ont l'avantage d'être très générales. Un autre intéret, est de pouvoir faire des raisonnements par récurrence sur les cellules, ce qui nous fournit beaucoup de résultats.

Nous avons aussi la notion duale aux théories homologiques, les théories cohomologiques. Mais nous ne dévélopperons pas plus ici. [10]

Dans la suite, nous noterons $h_* = h_*(*, \emptyset) = \tilde{h}_*(\mathbb{S}^0, +1)$, l'homologie du point, que nous appelerons coefficients de la théorie h_*. De même, pour une théorie cohomologique, on définit h^*.

3 Spectres

Maintenant que nous avons défini les théories (co)homologiques, nous voudrions toutes les étudier. Un bon point de départ est de toutes les déterminer. C'est la que les spectres entrent en jeu. Un spectre détermine une théorie homologique et une théorie cohomologique, et réciproquement. Le théorème crucial pour cela est le suivant :

Théorème 3.1 (E. H. Brown). *Soit* $F : (\mathscr{PW}')^{op} \longrightarrow \mathscr{PS}$*, un foncteur (*$\mathscr{PS}$ *est la catégorie des ensembles pointés) vérifiant :*

W) Axiome des bouquets : Pour toute famille $(X_\alpha, x_\alpha)_{\alpha\in A}$ *de* CW*-complexes pointés, les inclusions* $i_\alpha : X_\alpha \longrightarrow \bigvee_{\beta\in A} X_\beta$ *induisent une bijection :*

$$F\left(\bigvee_{\beta\in A} X_\beta\right) \xrightarrow{\sim} \prod_{\beta\in A} F(X_\beta)$$

MV) Axiome de Mayer-Vietoris : pour tout triple $(X; A, B)$ *de* CW*-complexes (c-à-d.* A, B *sous-complexes de* X*, avec* $X = A \cup B$*), et pour tout* $a \in F(A)$ *et* $b \in F(B)$*, tels que* $a|_{A\cap B} = b|_{A\cap B}$*, il existe* $x \in F(X)$*, tel que* $x|_A = a$ *et* $x|_B = b$*.*

Alors ce foncteur est représentable, c-à-d. qu'il existe un espace classifiant (Y, y_0) *et un élément universel* $u \in F(Y, y_0)$ *tel que*

$$T_u(X, x_0) : \left\{ \begin{array}{ccc} [X, x_0; Y, y_0] & \longrightarrow & F(X, x_0) \\ f & \longmapsto & F(f)(u) \end{array} \right.$$

est un isomorphisme pour tout espace $(X, x_0) \in \mathscr{PW}'$*. Si, de plus* F *est à valeur dans* $\mathscr{A}$*, alors le lemme de Yoneda nous assure que* (Y, y_0) *est muni d'une structure de* H*-groupe qui induit la structure de groupe sur* $F(X)$*.*

Ce qui va nous intéresser maintenant est d'appliquer ce théorème à $\tilde{h}^*$, une théorie cohomologique réduite sur $\mathscr{PW}'$, et vérifiant l'axiome des bouquets. On obtient alors une suite $(E_n, *)$ de CW-complexes pointés tels que $\tilde{h}^n(X, x_0) \simeq [X, x_0; E_n, *]$. Mais, on peut dire plus sur ces espaces. Une théorie cohomologique n'est pas simplement une suite de foncteurs, nous avons l'isomorphisme de suspension, et en utilisant l'adjonction $\Sigma \rightleftarrows \Omega$, on obtient le diagramme :

$$\begin{tikzcd} \tilde{h}^n \arrow[r, "(\sigma^n)^{-1}"] \arrow[d, equal] & \tilde{h}^{n+1} \circ \Sigma \arrow[d, equal] & \\ {[-; E_n]} & {[\Sigma(-); E_{n+1}]} \arrow[r, equal] & {[-; \Omega E_{n+1}]} \end{tikzcd}$$

Maintenant, le lemme de Yoneda nous donne une équivalence d'homotopie $\epsilon'_n : E_n \to \Omega E_{n+1}$, et par adjonction une application : $\epsilon_n : \Sigma E_n \to E_{n+1}$. Quitte à changer les E_n par des espaces homotopiquement équivalents, on peut même supposer que les ϵ_n sont des inclusions de CW-complexes. Tout ceci motive la définition de spectre suivante :

Définition 3.1. *Un spectre E est une famille $(E_n, *)_{n\in\mathbb{Z}}$ de CW-complexes pointés tels que ΣE_n soit un sous CW-complexe de E_{n+1}.*

Un CW-complexe (X, x_0) nous fournit naturellement un spectre $E(X)$ en posant $E(X)_n = \Sigma^n X$. On le notera encore X. Le spectre associé à $\mathbb{S}^0$ est noté $\mathbb{S}$.

Il existe des définitions de spectre plus sophistiquées, cf [11]. On peut définir la notion de cellule d'un spectre, et de morphisme de spectres. L'idée est qu'un morphisme est la chose naturelle, sauf qu'on ne lui demande pas d'être défini sur tous les E_n, mais seulement sur chaque cellule à partir d'une certaine dimension. On a évidement une catégorie des spectres. On peut définir le smash produit d'un spectre E avec un espace topologique X de la façon suivante :

$$(E \wedge X)_n = E_n \wedge X$$

Cela nous permet de définir la notion d'homotopie entre deux morphismes de spectres. Dans le cas des espaces topologiques, une homotopie entre $f, g : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ est une application $H : X \wedge I^+ \longrightarrow Y$ qui fait commuter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "1_X \wedge i_0"'] \arrow[drr, bend left, "f"] & & \\
& X \wedge I^+ \arrow[r, "H"] & Y \\
X \arrow[ur, "1_X \wedge i_1"] \arrow[urr, bend right, "g"'] & &
\end{tikzcd}$$

On définit donc une homotpie entre $f, g : E \longrightarrow F$ comme étant un morphisme de spectres $H : E \wedge I^+ \longrightarrow F$ qui fait commuter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[dr, "1_E \wedge i_0"'] \arrow[drr, bend left, "f"] & & \\
& E \wedge I^+ \arrow[r, "h"] & F \\
E \arrow[ur, "1_E \wedge i_1"] \arrow[urr, bend right, "g"'] & &
\end{tikzcd}$$

Nous avons donc la catégorie $\mathscr{S}\mathscr{P}'$ des spectres et des classes d'équivalences d'homotopies de morphismes de spectres. Cet ensemble est noté $[-;-]$.

Soit E un spectre, on définit ΣE par $\Sigma E_n = E_{n+1}$, qui étend de manière naturelle le foncteur de suspension des CW-complexes. C'est une équivalence de catégorie, car il a un inverse $(\Sigma^{-1}E)_n = E_{n-1}$, et il induit un foncteur de suspension sur $\mathscr{S}\mathscr{P}'$. En fait, ΣE est homotopiquement équivalent à $E \wedge \mathbb{S}^1$. Cela nous permet de dire que $[-;-]$ est muni d'une structure de groupe abélien, et la composition est bilinéaire. On définit $[E; F]_n = [\Sigma^n E; F]$, et $\pi_n(E) = [\mathbb{S}; E]_n$.

Nous avons vu qu'une théorie cohomologique réduite déterminait un spectre, en fait il y a aussi la réciproque : un spectre nous permet de définir une théorie homologique réduite $\tilde{E}_*$, et une théorie cohomologique $\tilde{E}^*$ réduite sur la catégorie des CW-complexes pointés par les formules suivantes :

$$\tilde{E}_n(X, x_0) = [\Sigma^n \mathbb{S}; E \wedge X] = [\mathbb{S}; E \wedge X]_n = \pi_n(E \wedge X)$$

$$\tilde{E}^n(X, x_0) = [X; \Sigma^n E] = \left[\Sigma^{-n}\mathbb{S} \wedge X; E\right] = [X; E]_{-n}$$

On peut définir la notion de smash produit sur la catégorie des spectres, avec classes d'équivalences d'homotopies de morphismes. Et $\mathbb{S}$ est l'élément neutre. Cela permet d'étendre les théories homologiques sur la catégorie des spectres tout entier.

Les théories cohomologiques et homologiques ont parfois des produits. Un ensemble de classes d'homotopies $[X; Y]$ est un groupe quand X est muni d'une structure de H-cogroupe, ou Y d'une structure de H-groupe. Ici, c'est la même chose, les théories homologiques, et cohomologiques associées à un spectre E ont des produits quand E est un spectre en anneau, c'est-à-dire lorsqu'on a des applications $\mu : E \wedge E \longrightarrow E$ et $\iota : \mathbb{S} \longrightarrow E$ qui font commuter les diagrammes suivants à homotopie près :

$$\begin{tikzcd}
E \wedge E \wedge E \arrow[r, "Id\wedge\mu"] \arrow[d, "\mu\wedge Id"] & E \wedge E \arrow[d, "\mu"] \\
E \wedge E \arrow[r, "\mu"] & E
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "\iota\wedge Id"] \arrow[dr, "Id"'] & E \wedge E \arrow[d, "\mu"] & E \arrow[l, "Id\wedge\iota"'] \arrow[dl, "Id"] \\
& E &
\end{tikzcd}$$

L'application μ est commutative si de plus, le diagramme suivant commute à homotopie près :

$$\begin{tikzcd}
E \wedge E \arrow[rr, "\tau"] \arrow[dr, "\mu"'] & & E \wedge E \arrow[dl, "\mu"] \\
& E &
\end{tikzcd}$$

Lorsque E est un spectre en anneau, et X un CW-complexe, alors $\tilde{E}^*(X)$ est une E^*-algèbre, commutative au sens gradué si μ est commutative.

4 Théories complexes orientées

Les théories qui vont nous intéresser plus particulièrement maintenant sont celles qui sont munies d'une orientation complexe. Cette notion est plus souvent utilisée avec des théories cohomologiques.

Définition 4.1. *Une théorie cohomologique non réduite h^* est complexe orientée si elle admet des produits et si pour tout $n \geq 1$, il existe des éléments $x_n \in h^2(\mathbb{CP}^n)$ tels que :*

– $h^*(\mathbb{CP}^n) = h^*[x_n]/(x^{n+1})$
– *l'inclusion* $i : \mathbb{CP}^n \longrightarrow \mathbb{CP}^{n+1}$ *induit* $i^*(x_{n+1}) = x_n$.

Si h^* est une théorie cohomologique complexe orientée, alors, grâce à la suite spectrale d'Atiyah-Hirzebruch [9], on a : $h^*(\mathbb{CP}^\infty) = h^*[\![x_\infty]\!]$ avec $x_\infty \in h^2(\mathbb{CP}^\infty)$ tel que $x_\infty|_{\mathbb{CP}^n} = x_n$. De même, on a $h^*(\mathbb{CP}^\infty \times \mathbb{CP}^\infty) = h^*[\![x_\infty \otimes 1, 1 \otimes x_\infty]\!]$.

Quand on a une orientation complexe, on peut définir des classes de Chern. C'est le théorème suivant :

Théorème 4.1. *Si* h^* *est une théorie cohomologique complexe orientée alors pour chaque fibré vectoriel* ξ *sur un* CW*-complexe* X*, il existe des éléments* $c_i(\xi) \in h^{2i}(X)$*, uniquement déterminés, et tels que :*
– *si* ξ *est un fibré vectoriel sur* X*, et* $f : Y \longrightarrow X$*, une application continue, alors* $c_i(f^*(\xi)) = f^*(c_i(\xi))$ *;*
– $c_0(\xi) = 1$*,* $c_i(\xi) = 0$ *si* $i < 0$ *ou* $i > \dim \xi$ *;*
– $c_1(\lambda_n) = x_n$*, où* λ_n *est la fibré canonique de* $\mathbb{CP}^n$*,* $1 \geq n < \infty$ *;*
– *Si* ξ *et* η *sont deux fibrés vectoriels sur* X*, alors* $c_i(\xi \oplus \eta) = \sum_{j+k=i} c_j(\xi)c_k(\eta)$*.*

Soit X un CW-complexe. On a l'isomorphisme fonctoriel suivant où $Pic(X)$ désigne le groupe de Picard de X, l'ensemble des classes d'isomorphismes de fibrés linéaires complexes sur X, muni du produit tensoriel, et λ_∞ est le fibré canonique sur $\mathbb{CP}^\infty$:

$$\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} [X; \mathbb{CP}^\infty] & \longrightarrow & Pic(X) \\ f & \longmapsto & f^*(\lambda_\infty) \end{array} \right.$$

Cet isomorphisme induit une structure naturelle de groupe sur $[X; \mathbb{CP}^\infty]$, d'après le lemme de Yoneda, on en déduit une structure de H-groupe sur $\mathbb{CP}^\infty$. Soit $\mu : \mathbb{CP}^\infty \times \mathbb{CP}^\infty \longrightarrow \mathbb{CP}^\infty$, la multiplication. Tout fibré vectoriel ξ de dimension 1 sur X s'écrit donc $f^*(\lambda_\infty)$, pour un certain $f : X \to \mathbb{CP}^\infty$, et $c_1(\xi) = c_1(f^*(\lambda_\infty) = f^*(c_1(\lambda_\infty)) = f^*(x_\infty)$.

Soient ξ, η deux fibrés vectoriels sur X, avec $\xi = f^*(\lambda_\infty)$ et $\eta = g^*(\lambda_\infty)$. Soit $h = \mu \circ (f \times g) : X \longrightarrow \mathbb{CP}^\infty$, et

$$F(x_\infty \otimes 1, 1 \otimes x_\infty) = \mu^*(x_\infty) \in h^*[\![x_\infty \otimes 1, 1 \otimes x_\infty]\!]$$

Alors on obtient :

$$\begin{aligned} c_1(\xi \otimes \eta) &= c_1(f^*(\lambda_\infty) \otimes g^*(\lambda_\infty)) \\ &= c_1(h^*(\lambda_\infty)) \\ &= h^*(c_1(\lambda_\infty)) \\ &= h^*(x_\infty) \\ &= (f \times g)^*(F(x_\infty \otimes 1, 1 \otimes x_\infty)) \\ &= F(c_1(\xi), c_1(\eta)) \end{aligned}$$

Ceci étant vrai au moins si h^* est connexe, c'est-à-dire si $h^n(*) = 0$ pour $n << 0$, car alors F n'est pas seulement une série formelle, mais un polynôme. Si h^* n'est pas connexe, cela reste néanmoins vrai, il faut définir une topologie sur $h^*(X)$...

Donc, nous avons une série formelle homogène de dégrée 2 en deux variables (qui sont de degrée 2) à coefficients dans h^*, qui vérifie de plus :

i) $F(x,0) = x$
ii) $F(x,y) = F(y,x)$
iii) $F(x, F(y,z)) = F(F(x,y),z)$
Ces propriétés découlent directement des propriétés du produit tensoriel, et du fait qu'un fibré trivial a une classe de Chern nulle. Une telle série formelle sera appelée *loi de groupe formel*.

5 Lois de groupes formels

Comme nous venons de le voir, une loi de groupe formel à coefficients dans un anneau R est une série formelle de $R[\![x,y]\!]$ qui vérifie les trois axiomes $i), ii), iii)$[12][4][6][8]. On a par exemple la loi additive : $F(x,y) = x + y$; et la loi multiplicative : $1 + G(x,y) = (1+x)(1+y)$. On peut noter $F(x,y) = x +_F y$, et si n est un entier positif, alors la somme (pour la loi F) de n termes (n-série de F) se note :

$$x +_F \cdots +_F x = [n](x)$$

On a un foncteur qui, à un anneau R, associe l'ensemble des lois de groupes formels $FGL(R)$. Ce foncteur est représentable par un anneau gradué L, l'anneau de Lazard. On peut définir la notion de morphisme de loi de groupe formel : un morphisme de F vers G, deux lois de groupes formels sur un anneau R, est une série formelle $f \in R[\![x]\!]$, telle que $f(0) = 0$, et $f(F(x,y)) = G(f(x), f(y))$. Les isomorphismes sont donc les morphismes tels que $f'(0)$ est inversible dans R. On dit qu'un isomorphisme est strict si $f'(0) = 1$. Enfin, on dit que f est le logarithme de F si c'est un isomorphisme strict de F vers la loi additive (il est alors nécessairement unique).

Ce qui nous intéresse est de trouver toutes les lois de groupes formels sur un anneau R donné. Pour cela, il nous faut expliciter la structure de L. Un premier théorème intéressant nous dit que toute loi de groupe formel sur une $\mathbb{Q}$-algèbre R admet un logarithme, et on en déduit alors que $L \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = \mathbb{Q}[m_1, m_2, \dots]$, avec $|m_i| = 2i$. Et si $f(x) = \sum m_i x^{i+1}$, alors la loi universelle sur L est égale à $f^{-1}(f(x) + f(y))$ sur $L \otimes \mathbb{Q}$. Après un peu de travail, on peut alors démontrer le théorème de Lazard qui nous donne la structure de L. On rapelle que si R est un anneau gradué connexe, et I désigne l'idéal des éléments de degré strictement positif, alors $\mathcal{Q}(R) = I/I^2$ est le module des indécomposables.

Théorème 5.1 (Lazard). *On a :*
- $L = \mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots]$, *avec* $|x_i| = 2i$ *;*
- *On peut choisir les* x_i *de telle manière que leur image dans* $\mathcal{Q}(L \otimes \mathbb{Q})$ *soit :*

$$\begin{cases} pm_i & \text{si } i = p^k - 1 \text{ pour un nombre premier } p \\ m_i & \text{sinon} \end{cases}$$

- *L est un sous-anneau de* $\mathbb{Z}[m_1, m_2, \dots] \subset L \otimes \mathbb{Q}$.

Parmi les lois de groupes formels, il y en a qui sont plus intéressantes que d'autres. Par exemple, il y a les loi dites p-typiques. Une loi F sur une $\mathbb{Z}_{(p)}$-algèbre R sans torsion ($\mathbb{Z}_{(p)}$ est l'ensemble des rationels à dénominateur premier à p) est dite p-typique si son logarithme sur $R \otimes \mathbb{Q}$ est de la forme $\sum l_i x^{p^i}$. On peut aussi définir la notion de loi p-typique sur une $\mathbb{Z}_{(p)}$-algèbre quelconque, mais ce serait plus long, et moins intuitif[4].

On a un théorème dû à Cartier[4], qui nous dit que toute loi de groupe formel sur une $\mathbb{Z}_{(p)}$-algèbre est canoniquement strictement isomorphe à une loi p-typique. Ce résultat nous permet donc de nous restreindre à leur étude quand on est sur une $\mathbb{Z}_{(p)}$-algèbre.

Comme précédement, le foncteur qui à une $\mathbb{Z}_{(p)}$-algèbre associe l'ensemble des lois p-typiques est représentable par un anneau V. Cet anneau est isomorphe à $\mathbb{Z}_{(p)}[v_1, v_2, \ldots]$, avec $|v_n| = 2p^n - 2$. Et la loi universelle sur V vérifie

$$[p]_F(x) = \sum v_i x^{p^i}$$

Si R est une $\mathbb{F}_p$-algèbre, on peut définir la hauteur d'une loi de groupe formel sur F. La p-série de F est une série en x^{p^n}, pour un certain n. Le plus grand tel n est appelé hauteur de F. La hauteur d'une loi de groupe formel est invariante par isomorphisme.

Il y a d'autres notions intéressantes concernant les lois de groupes formels, comme par exemple la notion de déformation d'une loi de groupe formel[11]. On peut aussi étudier les lois de groupes formels et les groupes formels avec de la géométrie algébrique [12].

6 Conclusion

Nous avons vu que les théories homologiques et cohomologiques sont en fait déterminées par la donnée d'un spectre. Sous certaines conditions (sprectre en anneau et orientation complexe), on peut associer une loi de groupe formelle à un tel spectre. Les lois de groupes formels sont des objets totalement algébriques, et on peut les étudier de ce seul point de vu. Il en ressort qu'il existe en fait des anneau et des lois sur ces anneaux qui sont universels, et déterminent dans une certaine mesure toutes les autres lois de groupes formels. Il est donc intéressant de chercher des spectres dont l'anneau des coefficients est l'anneau universel, et la loi associée, la loi universelle. Ces sepctres existent : le spectre associé à l'anneau de Lazard L est le spectre MU, et celui associé à V est BP. Il existe aussi des spectres en lien avec les lois de hauteur n : ce sont les K-théories de Morava : Pour chaque p, premier, et chaque entier n, il existe un spectre en anneau $K(n)$ muni d'une orientation complexe tel que[5] :

- $K(0) = H(-; \mathbb{Q})$
- $K(0)_* = \mathbb{Q}$, et $K(n)_* = \mathbb{F}_p[v_n, v_n^{-1}]$, $|v_n| = 2p^n - 2$, pour $n > 0$. Ce sont des corps gradués : tout module gradué sur un de ces anneaux est libre.
- $K(1)_*(X)$ est l'un des $p-1$ facteur directs isomorphes de la K-théorie complexe[1] modulo p.
- On a l'isomorphisme de Künneth :

$$K(n)_*(X \times Y) = K(n)_*(X) \otimes_{K(n)_*(pt)} K(n)_*(Y)$$

– Si X est un CW-complexe fini p-local[2] [3], alors $\tilde{K}(n)_*(X) = K(n)_*(pt) \otimes \tilde{H}_*(X;\mathbb{F}_p)$ pour n tel que $2p^n - 2 > \dim x$.

La loi de groupe formel associée à une K-théorie de Morava $K(n)$ $(n > 0)$ est la loi de Honda Γ_n, p-typique de hauteur n sur $\mathbb{F}_p$, caractérisée par $[p]_{\Gamma_n}(x) = x^{p^n}$.

Tous ces spectres "universels" font l'objet de nombreuses études car si on arrive à les comprendre, nous arrivereons à comprendre la plupart des théories homologiques et cohomologiques. En particulier, on cherche à donner une signification géométrique à ces théories. Pour MU, il s'agit du cobordisme complexe. Bien sûr c'est plus difficile quand on travaille en caractéristique p...

J'ai principalement étudié les notions de spectre, de loi de groupe formel et les K-théories de Morava lors de mon mémoire de master, à travers l'article "A resolution of the $K(2)$-local sphere at the prime 3"[7], et je pense continuer dans ce domaine lors de ma thèse.

Références

[1] M. Atiyah. *K-Theory.* Cambridge MA : Harvard University, 1964.

[2] A. K. Bousfield. The localization of spaces with respect to homology. *Topology*, 14 :133–150, 1975.

[3] A. K. Bousfield. The localization of spectra with respect to homology. *Topology*, 18 :257–281, 1979.

[4] Douglas C.Ravenel. *Complex cobordism and stable homotopy groups of spheres.* Academic Press, 1986.

[5] Douglas C.Ravenel. *Nilpotence and periodicity in stable homotopy theory.* Princeton university press, 1992.

[6] A. Fröhlich. Formal groups. *Lecture notes in mathematics*, 74, 1968.

[7] P. Goerss, H.-W. Henn, M. Mahowald, and C. Rezk. A resolution of the $K(2)$-local sphere at the prime 3. *Annals of Mathematics*, 162 :777–822, 2005.

[8] Mike Hopkins. Course notes for elliptic cohomology. 1996.

[9] J.F.Adams. *Stable Homotopy and generalised Homology.* The university of chicago press, 1974.

[10] Robert M.Switzer. *Algebraic Topology - Homology and Homotopy.* Springer, reprint of the 1975 edition, 2002.

[11] Charles Rezk. Notes on the hopkins-miller theorem. 1991.

[12] N. P. Strickland. Formal groups. 2003.