

Probabilités, Électricité et Dissections

LIN Shen & Sanjay RAMASSAMY
Sous la direction de Nicolas CURIEN

24 juin 2010

Table des matières

Introduction	1
1 Marches aléatoires sur des graphes et réseaux électriques : quel rapport ?	2
1.1 Marche aléatoire sur un graphe	2
1.2 Problème de Dirichlet discret	3
1.3 Analogie avec les réseaux électriques	4
1.4 Notion de résistance équivalente	9
1.5 Flux et puissance	11
2 Applications : preuves élémentaires de résultats probabilistes	14
2.1 Récurrence, transience et résistance équivalente	14
2.2 Critère de Nash-Williams et méthode de Rayleigh	19
2.3 Théorème de Pólya	20
3 Dissections de rectangles en carrés et réseaux de résistances	24
Références	27

Introduction

La première question que nous allons aborder est celle de la récurrence ou de la transience de certains graphes infinis : une marche aléatoire sur un graphe infini reviendra-t-elle presque sûrement à son point de départ ? La seconde question est celle de la dissection de rectangles en carrés : on peut paver un rectangle par des carrés si le rapport de ses côtés est rationnel, qu'en est-il de la réciproque ? On établira dans les deux cas une analogie avec des réseaux de résistances électriques, ce qui permettra d'utiliser l'intuition physique pour répondre à nos deux questions.

1 Marches aléatoires sur des graphes et réseaux électriques : quel rapport ?

1.1 Marche aléatoire sur un graphe

Définition 1 Un multigraphe (ou tout simplement graphe) est un couple $G = (S, A)$ avec :

- S un ensemble fini ou dénombrable (S est l'ensemble des sommets de G)
- A un multi-ensemble de parties à deux éléments de S , i.e. on autorise une même partie à figurer plusieurs fois (A est l'ensemble des arêtes de G). Les répétitions possibles entraînent une ambiguïté qu'on s'efforcera de lever à chaque fois.

Si $a = \{x, y\} \in A$, on dit que x et y sont voisins, noté $x \sim y$ et les sommets x et y sont les extrémités de l'arête a .

Dans la suite, on se limitera au cas de graphes **connexes** (i.e. on peut relier deux sommets quelconques par une suite finie d'arêtes) et **localement finis** (i.e. chaque sommet a un nombre fini de voisins); on dira simplement «graphe» en sous-entendant qu'ils possèdent ces deux propriétés. Si $(x, y) \in S^2$, on notera $A(x)$ l'ensemble des arêtes dont x est une extrémité et $A(x, y)$ l'ensemble des arêtes dont à la fois x et y sont des extrémités (l'ensemble $A(x, y)$ est l'ensemble des occurrences de l'arête $\{x, y\}$).

Définition 2 Un poids sur un graphe $G = (S, A)$ est une famille $(W_a)_{a \in A}$ de réels strictement positifs. Le couple (G, W) est alors appelé graphe pondéré. Par abus de langage on pourra dire que G est un graphe pondéré. Si $x \in S$, on pose $W_x = \sum_{a \in A(x)} W_a$, qui est strictement positif car x a au moins un voisin.

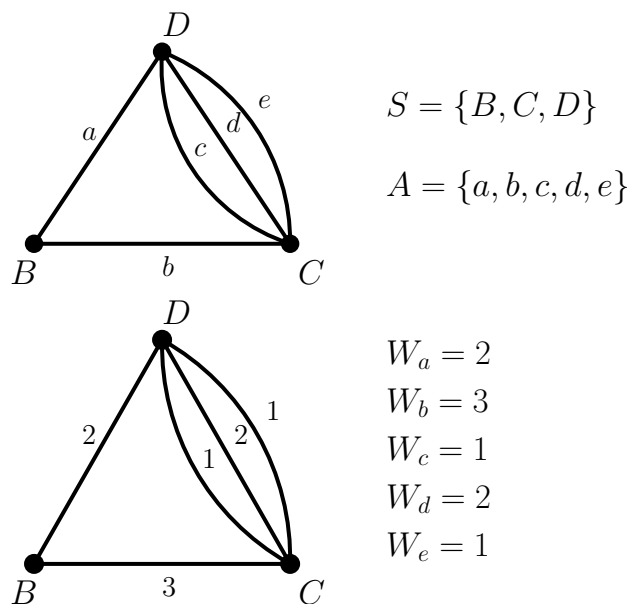


FIGURE 1 – Un graphe pondéré

Définition 3 Soit $x \in S$. Une marche aléatoire sur un graphe pondéré (G, W) partant de x est une chaîne de Markov $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'espace d'états S issue de x et de fonction de transition Q vérifiant pour tous sommets y et z :

$$Q(y, z) = \frac{1}{W_y} \left(\sum_{a \in A(y, z)} W_a \right).$$

La chaîne de Markov ainsi définie est réversible, car $x \mapsto W_x$ est une mesure réversible sur S . À chaque fois qu'on considèrera un poids W sur un graphe G , on lui associera automatiquement la fonction Q définie comme ci-dessus. Intuitivement, on peut imaginer une particule qui, partant de x , se déplace sur le graphe. Arrivée au sommet y , elle emprunte une arête a partant de y pour aboutir à un sommet z voisin de y , avec une probabilité proportionnelle au poids de l'arête a , et ce indépendamment de sa trajectoire antérieure. La variable aléatoire Z_n représente alors la position de la particule à l'instant n . Dans la définition de la chaîne de Markov, on connaît seulement les sommets successifs choisis par la chaîne, et non les arêtes empruntées à chaque pas. Cependant, on retiendra parfois les arêtes empruntées par la chaîne.

Définition 4 Une marche aléatoire simple est une marche aléatoire sur un graphe pondéré dont toutes les arêtes ont le même poids. Cela correspond au cas où la particule choisit de façon équiprobable une des arêtes issues de sa position courante.

1.2 Problème de Dirichlet discret

Définition 5 Soit $G = (S, A)$ un graphe, W un poids sur G , S' une partie de S et $f : S \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est harmonique sur S' si pour tout sommet x dans S' on a :

$$f(x) = \sum_{y \in S} Q(x, y) f(y).$$

Définition 6 Si B est une partie de S , on définit les temps d'arrêt

$$\tau_B = \min \{n \geq 0 \mid Z_n \in B\}$$

et

$$\tau_B^+ = \min \{n \geq 1 \mid Z_n \in B\}.$$

On appelle ces temps d'arrêt des temps d'atteinte de B .

Le problème de Dirichlet discret est le suivant. On dispose d'un graphe $G = (S, A)$ avec $S = S' \sqcup B$ (les parties S' et B sont non vides et disjointes) et d'une fonction $g : B \rightarrow \mathbb{R}$, et on cherche une fonction $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ harmonique sur S' et coïncidant avec g sur B .

On dispose des résultats suivants sur les fonctions harmoniques.

Proposition 1 (Principe du maximum) Soit $G = (S, A)$ un graphe pondéré fini, avec $S = S' \sqcup B$. Si $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ est harmonique sur S' , alors f atteint son maximum sur B .

▷ Soit x un sommet de S où f atteint son maximum (existe toujours car S est fini). Si x est dans B on a terminé. Dans le cas contraire, $x \in S'$. Comme $f(x)$ est la moyenne des $f(y)$ pour y voisin de x (harmonicité sur S'), et que tous les $f(y)$ sont plus petits que $f(x)$ (f maximum en x), nécessairement f atteint aussi son maximum en tous les voisins de x . Soit $z \in B$ (B est non vide). Comme G est connexe, on peut relier x à z par un chemin dans A : il existe $n \in \mathbb{N}$, $(x_1, \dots, x_n) \in S^n$ tels que $x_1 = x$ et $x_n = z$. Soit z' le premier sommet de B atteint par le chemin ($z' = x_i$, où $i = \min \{k \in \{1, \dots, n\} \mid x_k \in B\}$). En itérant l'argument de propagation du maximum énoncé ci-dessus, f atteint aussi son maximum en z' , qui est dans B . ◁

Remarquons qu'en considérant $-f$ on prouve que sous les mêmes hypothèses, f atteint aussi son minimum sur B .

Proposition 2 (Principe de superposition) Soit $G = (S, A)$ un graphe pondéré, avec $S = S' \sqcup B$. Alors l'ensemble des fonctions de S dans \mathbb{R} harmoniques sur S' possède une structure d'espace vectoriel.

Nous pouvons maintenant énoncer :

Théorème 1 (Existence et unicité de la solution au problème de Dirichlet discret)
Soit $G = (S, A)$ un graphe pondéré fini, avec $S = S' \sqcup B$ et g une fonction de B dans \mathbb{R} . Alors il existe une unique fonction $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ harmonique sur S' et coïncidant avec g sur B .

▷ **Unicité.** Si f_1 et f_2 sont harmoniques sur S' et coïncident avec g sur B , par le principe de superposition, $h = f_1 - f_2$ est harmonique sur S' , et atteint son maximum et son minimum sur B d'après le principe du maximum. Or, h est nulle sur B , donc $h = 0$ et $f_1 = f_2$, d'où l'unicité.

Existence. On va exhiber une solution en employant des outils probabilistes. Soit $x \in S'$. On considère $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une marche aléatoire sur le graphe (G, W) issue de x . Le temps d'arrêt τ_B désigne le premier instant où Z_n atteint B . Comme G est connexe et fini, on sait que la chaîne $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est irréductible et récurrente. Donc τ_B est fini presque sûrement et on peut définir une fonction $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \mathbb{E}_x [g(Z_{\tau_B})],$$

où la notation $\mathbb{E}_x [X]$ désigne l'espérance de X pour une marche aléatoire issue de x . Par définition de τ_B , $f(x) = g(x)$ pour tout x dans B . Si $x \in S'$, sous la loi \mathbb{P}_x on a $\tau_B \geq 1$. Alors, en utilisant la finitude de S et la propriété de Markov faible à l'instant 1, on a

$$\begin{aligned} f(x) &= \mathbb{E}_x [g(Z_{\tau_B})] \\ &= \mathbb{E}_x \left[\sum_{y \in S} g(Z_{\tau_B}) \mathbb{1}_{Z_1=y} \right] \\ &= \sum_{y \in S} \mathbb{E}_x [g(Z_{\tau_B}) \mathbb{1}_{Z_1=y}] \\ &= \sum_{y \in S} \mathbb{E}_y [g(Z_{\tau_B})] \mathbb{E}_x [\mathbb{1}_{Z_1=y}] \\ &= \sum_{y \in S} f(y) Q(x, y). \end{aligned}$$

Donc f est bien solution du problème de Dirichlet. ◁

Le problème de Dirichlet apparaît souvent en physique, sous des versions discrètes, comme ici, ou continues. L'unicité de la solution dans le cas des graphes finis nous permet alors d'identifier une solution trouvée par l'intuition physique avec celle de notre problème probabiliste initial. Plus précisément, le domaine de la physique avec lequel nous allons établir une analogie est l'électricité.

1.3 Analogie avec les réseaux électriques

On s'intéresse à des composants électroniques de base : les résistances. Ce sont des dipôles symétriques qui peuvent être branchés entre eux, de façon à former un réseau de résistances. Nous allons modéliser ces réseaux de résistances par des graphes pondérés : les sommets sont les nœuds du réseau, et correspondent aux pôles des résistances, les arêtes sont les résistances, et le poids d'une arête est égal à l'inverse de la valeur de la résistance (valeur qu'on appelle la conductance). Ces réseaux de résistances sont finis en pratique, mais on s'autorisera dans la seconde partie l'étude théorique de réseaux infinis.

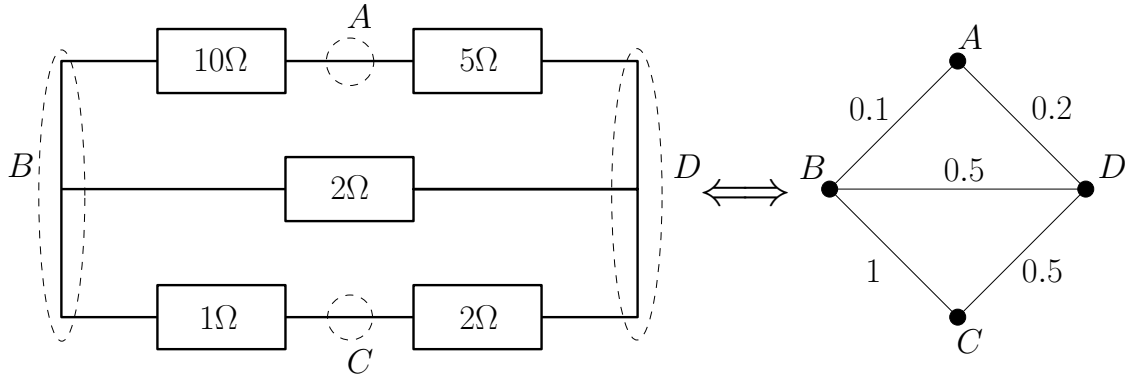


FIGURE 2 – Analogie entre réseau de résistances et graphe pondéré

Considérons un réseau fini (G, C) , où $G = (S, A)$ et C_a est la conductance de l'arête a . La résistance d'une arête a est $R_a := \frac{1}{C_a}$. On peut alimenter en courant un tel réseau de résistances : on choisit deux sommets P et N , entre lesquels on branche un générateur (pôle + en P , pôle - en N). Il se crée alors des tensions aux bornes des résistances du réseau, et un courant électrique circule à travers celles-ci. Si x et y sont deux nœuds reliés par une arête a , on note $u_{x,y,a}$ la tension entre x et y aux bornes de l'arête a et $i_{x,y,a}$ le courant qui traverse la résistance correspondant à l'arête a de x vers y . On note enfin i_P (resp. i_N) le courant qui sort du réseau de résistances par le point P (resp. N) et circule dans le fil qui relie le réseau au générateur.

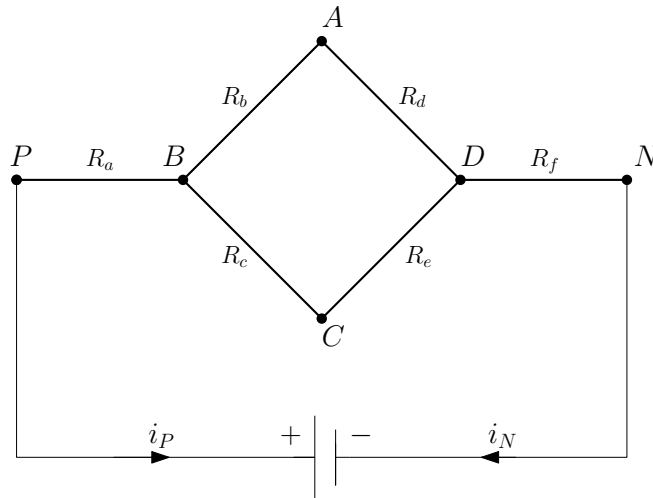


FIGURE 3 – Illustration des notations

Ces grandeurs sont reliées par trois relations, qu'on considérera dans la suite comme les définitions de la tension et du courant :

Loi d'Ohm : Pour toute arête a d'extrémités x et y , on a :

$$u_{x,y,a} = R_a i_{x,y,a}.$$

Loi des nœuds de Kirchhoff : La somme des courants arrivant en un sommet donné est

nulle, donc si x est un sommet distinct de P et de N :

$$\sum_{y \in S} \sum_{a \in A(y,x)} i_{y,x,a} = 0, \quad (1)$$

$$\sum_{y \in S} \sum_{a \in A(y,P)} i_{y,P,a} = i_P, \quad (2)$$

$$\sum_{y \in S} \sum_{a \in A(y,N)} i_{y,N,a} = i_N. \quad (3)$$

Loi des mailles de Kirchhoff : Si l'on a un cycle dans le réseau, *i.e.* s'il existe x_0, \dots, x_n sommets tels que $x_0 = x_n$ et pour tout k entre 0 et $n-1$, x_k et x_{k+1} sont reliés par une arête a_k , alors la somme algébrique des tensions le long de ce cycle est nulle :

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_{x_k, x_{k+1}, a_k} = 0.$$

Proposition 3 *Il existe une fonction potentiel $V : S \rightarrow \mathbb{R}$ telle que pour toute arête $a \in A(x, y)$, $u_{x,y,a} = V(x) - V(y)$.*

▷ Fixons un sommet x_0 . Pour tout $x \in S$, par connexité du graphe on peut trouver un chemin entre x_0 et x , *i.e.* une suite d'arêtes a_0, \dots, a_{n-1} avec $a_k \in A(x_k, x_{k+1})$ et $x_n = x$. On pose alors

$$V(x) = \sum_{k=0}^{n-1} u_{x_k, x_{k+1}, a_k}.$$

D'après la loi des mailles de Kirchhoff, la définition de $V(x)$ ne dépend pas du chemin choisi entre x_0 et x , et la fonction V vérifie bien la propriété voulue. ◁

Étant donné un réseau de résistances, la connaissance des potentiels détermine celle des courants, et réciproquement. Si x et y sont voisins, la tension est la même aux bornes de toutes les résistances branchées entre x et y . On peut donc alléger les notations et écrire $u_{x,y}$ au lieu de $u_{x,y,a}$. La fonction V est définie à une constante près, donc on peut imposer $V(N) = 0$, ce qui sera le cas dans la suite sauf mention explicite du contraire. On a alors $V(P) = U$, où U est la tension imposée aux bornes du générateur. On pose également $C_x = \sum_{a \in A(x)} C_a$ pour tout x dans S . À l'aide du problème de Dirichlet, on peut donner une interprétation probabiliste du potentiel :

Théorème 2 (Première interprétation probabiliste du potentiel) *Lorsque la tension aux bornes du générateur vaut 1, le potentiel en chaque sommet x est égal à la probabilité qu'une marche aléatoire sur (G, C) issue de x atteigne P avant N . Dans le cas général, le potentiel est proportionnel à cette probabilité d'atteinte.*

▷ Supposons d'abord que $U = 1$. En combinant la loi d'Ohm et l'équation (1) de la loi des nœuds on obtient pour un sommet x distinct de P et de N :

$$\sum_{y \in S} \sum_{a \in A(y,x)} \frac{V(x) - V(y)}{R_a} = 0.$$

On en déduit pour ce sommet x :

$$V(x) = \sum_{y \in S} \sum_{a \in A(x,y)} \frac{C_a}{C_x} V(y).$$

Le potentiel est donc harmonique sur $S \setminus \{P, N\}$. Soit g la fonction définie sur $\{P, N\}$ par $g(P) = 1$ et $g(N) = 0$. Le potentiel V est alors solution du problème de Dirichlet associé à g .

D'autre part, d'après la preuve de l'existence dans le problème de Dirichlet, en notant $B = \{P, N\}$, la fonction $p(x) = \mathbb{E}_x [g(Z_{\tau_B})]$ est solution du même problème de Dirichlet, donc par unicité de la solution, pour tout sommet x :

$$V(x) = \mathbb{P}_x (\tau_{\{P\}} < \tau_{\{N\}}).$$

Dans le cas général, d'après le principe de superposition, V/U est harmonique et vaut 1 en P et 0 en N , donc V est proportionnel à la probabilité d'atteinte, de constante de proportionnalité U . \triangleleft

Comme les tensions sont des différences de potentiels, on a $u_{x,y} = -u_{y,x}$, et donc par la loi d'Ohm, $i_{x,y,a} = -i_{y,x,a}$. En sommant toutes les équations de la loi des nœuds, on obtient donc

$$i_P + i_N = \sum_{(x,y) \in S^2} \sum_{a \in A(x,y)} i_{y,x,a} = 0$$

car chaque arête intervient exactement deux fois, et dans des sens opposés. Donc $i_N = -i_P$, ce qui traduit le fait physique qu'il n'y a pas d'accumulation de charges dans le réseau de résistances.

On peut interpréter la notion de courant traversant une arête $a \in A(x, y)$ à l'aide de marches aléatoires entre P et N .

On définit deux quantités supplémentaires :

Définition 7 *Pour tout sommet x , le nombre moyen de visites en x avant d'atteindre N d'une marche aléatoire issue de P est :*

$$n(x) = \mathbb{E}_P [\# \{k < \tau_{\{N\}} | Z_k = x\}].$$

Définition 8 *Soit $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une marche aléatoire sur le graphe pondéré (G, C) , τ un temps d'arrêt par rapport à la filtration canonique de $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui est fini presque sûrement, et $a \in A(x, y)$ une arête de G . On note $\Delta_{x,y,a}$ le nombre de traversées de a de x vers y . On appelle nombre net de traversées de a de x vers y la quantité $n_{x,y,a} = \Delta_{x,y,a} - \Delta_{y,x,a}$.*

Proposition 4 (Interprétation probabiliste du courant) *Dans le cas où $i_N = 1$, le courant $i_{x,y,a}$ est égal à l'espérance du nombre net de traversées de a de x vers y effectuées par une marche aléatoire partant de P et arrêtée dès qu'elle atteint N . Dans le cas général, on a :*

$$i_{x,y,a} = i_N \mathbb{E}_P [n_{x,y,a}].$$

\triangleright Dans un premier temps, on ne considère que des graphes simples, *i.e.* on interdit à une même arête de figurer plusieurs fois dans A , ce qui permet d'identifier les arêtes à des paires $\{x, y\}$, et on suppose $i_N = 1$.

On introduit $(\tilde{Z}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la chaîne de Markov absorbée par N (*i.e.* $\tilde{Z}_n = Z_{n \wedge \tau_{\{N\}}}$). Alors, si x

est différent de P et de N ,

$$\begin{aligned}
n(x) &= \mathbb{E}_P \left[\# \{k < \tau_{\{N\}} | Z_k = x\} \right] \\
&= \mathbb{E}_P \left[\sum_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{1}_{\tilde{Z}_k = x} \right] = \mathbb{E}_P \left[\sum_{k \geq 1} \mathbb{1}_{\tilde{Z}_k = x} \right] \text{ car } \tilde{Z}_0 \neq x \\
&= \mathbb{E}_P \left[\sum_{k \geq 1} \left(\sum_{y \in S \setminus \{N\}} \mathbb{1}_{\tilde{Z}_{k-1} = y} \right) \mathbb{1}_{\tilde{Z}_k = x} \right] \\
&= \sum_{y \in S \setminus \{N\}} \sum_{k \geq 1} \mathbb{E}_P \left[\mathbb{1}_{\tilde{Z}_{k-1} = y} \mathbb{1}_{\tilde{Z}_k = x} \right] \text{ par Fubini et convergence monotone} \\
&= \sum_{y \in S \setminus \{N\}} \sum_{k \geq 1} \mathbb{E}_P \left[\mathbb{1}_{\tilde{Z}_{k-1} = y} \right] Q(y, x) \text{ par Markov faible} \\
&= \sum_{y \in S \setminus \{N\}} \sum_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{E}_P \left[\mathbb{1}_{\tilde{Z}_k = y} \right] Q(x, y) \frac{C_x}{C_y} \text{ par réversibilité} \\
&= \sum_{y \in S \setminus \{N\}} n(y) Q(x, y) \frac{C_x}{C_y} \\
&= \sum_{y \in S} n(y) Q(x, y) \frac{C_x}{C_y} \text{ car } n(N) = 0.
\end{aligned}$$

Donc $\frac{n(x)}{C_x}$ est harmonique sur $S \setminus \{N, P\}$ et vaut $\frac{n(P)}{C_P}$ en P et 0 en N . Par superposition et unicité de la solution au problème de Dirichlet, pour tout x dans S , $\frac{n(x)}{C_x} = V(x)$, où $V(x)$ est le potentiel en x lorsqu'on impose une tension $\frac{n(P)}{C_P}$ entre N et P . Alors, d'après la loi d'Ohm,

$$i_{x,y,\{x,y\}} = (V(x) - V(y))C_{\{x,y\}} = \left(\frac{n(x)}{C_x} - \frac{n(y)}{C_y} \right) C_{\{x,y\}} = n(x)Q(x, y) - n(y)Q(y, x).$$

Or, en appliquant la propriété de Markov forte aux temps de retours successifs en x et y ,

$$n(x)Q(x, y) = \Delta_{x,y,\{x,y\}} \text{ et } n(y)Q(y, x) = \Delta_{y,x,\{x,y\}},$$

d'où le résultat quand on impose une tension $\frac{n(P)}{C_P}$ aux bornes. Dans ce cas, $i_N = \sum_{y \in S} i_{y,N} = 1$, car on ne vient qu'une seule fois en N , avant d'y rester. Imposer une tension $\frac{n(P)}{C_P}$ aux bornes revient à imposer $i_N = 1$: on a obtenu ce qu'on voulait prouver. Le cas $i_N \neq 1$ se déduit en multipliant tous les potentiels et tous les courants par i_N : ils sont encore solutions de la loi d'Ohm et des lois de Kirchhoff.

Dans le cas général, G est un multigraphe. Pour deux sommets x et y donnés, le courant total circulant de x vers y vérifie la relation ci-dessus :

$$\sum_{a \in A(x,y)} i_{x,y,a} = i_N \sum_{a \in A(x,y)} \mathbb{E}_P [n_{x,y,a}].$$

Or, en moyenne, les traversées de x vers y se répartissent entre les arêtes de $A(x, y)$ proportionnellement au poids de celles-ci. Comme le courant se répartit aussi entre les arêtes proportionnellement à leur conductance, on en déduit que

$$i_{x,y,a} = i_N \mathbb{E}_P [n_{x,y,a}],$$

ce qui achève la preuve. \triangleleft

Au cours de la preuve, on a vu une seconde interprétation probabiliste du potentiel :

Corollaire 1 (Deuxième interprétation probabiliste du potentiel) *Si $i_N = 1$, alors pour tout sommet x ,*

$$V(x) = \frac{n(x)}{C_x}.$$

1.4 Notion de résistance équivalente

D'après la résolution du problème de Dirichlet, $\frac{V(P)}{i_N}$ est une constante caractéristique du réseau, indépendante du générateur qu'on branche entre P et N . On appelle cette constante la résistance équivalente entre P et N , et on la note $R_{P,N}^{eq}$. Cette dénomination est justifiée car, pour le reste du circuit, une résistance de valeur $R_{P,N}^{eq}$ se comporte d'après la loi d'Ohm exactement comme le réseau pris entre les bornes P et N : quand on lui impose une tension U aux bornes, le courant qui en sort est $i_N = \frac{U}{R_{P,N}^{eq}}$.

On définit également la conductance équivalente entre P et N :

$$C_{P,N}^{eq} = \frac{1}{R_{P,N}^{eq}}.$$

Remarquons que, avec la convention $V(N) = 0$, dès qu'on fixe $V(P)$, les potentiels et les courants sont déterminés partout de manière unique (cela découle de l'unicité de la solution au problème de Dirichlet et de la loi d'Ohm). De même, grâce à la formule $V(P) = R_{P,N}^{eq} i_N$, fixer i_N revient à fixer $V(P)$, et cela détermine les potentiels et les courants partout dans le circuit.

On peut à présent trouver une interprétation probabiliste de la résistance équivalente.

Définition 9 *Soit $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une marche aléatoire sur le graphe (G, C) et x et y deux sommets. On pose*

$$A_{x,y} = \mathbb{E}_x [\tau_{\{y\}}].$$

$A_{x,y}$ est le nombre moyen d'étapes employées par $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pour aller de x à y . On définit également la durée moyenne d'un aller-retour entre x et y

$$T_{x,y} = A_{x,y} + A_{y,x}.$$

Proposition 5 (Première interprétation probabiliste de la résistance équivalente, [Ch96])

On a :

$$T_{P,N} = \left(\sum_{x \in S} C_x \right) R_{P,N}^{eq}.$$

Dans le cas où toutes les résistances sont égales à 1, si m est le nombre d'arêtes du graphe :

$$T_{P,N} = 2m R_{P,N}^{eq}.$$

▷ Considérons sans perte de généralité le courant unitaire entre P et N et les potentiels associés. Avec les notations utilisées dans la preuve de l'interprétation probabiliste du courant,

$$A_{P,N} = \sum_{x \in S} n(x) = \sum_{x \in S} C_x V(x).$$

Pour calculer $A_{N,P}$, il suffit de voir que cela revient à changer par rapport au circuit initial les courants en leurs opposés et les potentiels $V(x)$ en $V'(x) = V(P) - V(x)$. Les nouveaux courants et potentiels sont en effet bien solutions de la loi d'Ohm et des lois de Kirchhoff. Alors,

$$A_{N,P} = \sum_{x \in S} C_x V'(x) = \sum_{x \in S} C_x (V(P) - V(x)),$$

donc

$$T_{P,N} = A_{P,N} + A_{N,P} = V(P) \sum_{x \in S} C_x.$$

Comme $i_N = 1$, $V(P) = R_{P,N}^{eq}$, on a donc $T_{P,N} = \left(\sum_{x \in S} C_x \right) R_{P,N}^{eq}$.

Pour la dernière formule, il suffit de remarquer que si toutes les arêtes sont de poids 1

$$\sum_{x \in S} C_x = \sum_{x \in S} \sum_{a \in A(x)} C_a = \sum_{x \in S} \sum_{a \in A(x)} 1$$

et que chaque arête est comptée exactement deux fois (une fois pour chaque extrémité). \triangleleft

On en déduit un corollaire dû à Matthews en 1988 [Ly10], sur une estimation du temps de recouvrement d'un graphe.

Définition 10 Soit (G, C) un graphe pondéré avec n sommets et m arêtes, dont toutes les arêtes sont de poids 1. Le temps de recouvrement à partir de x noté $Rec(x)$ est l'espérance du premier instant où une marche aléatoire issue de x a visité tous les sommets de G :

$$Rec(x) = \mathbb{E}_x \left[\min \{n \in \mathbb{N} \mid \forall y \in S, \exists j \leq n \text{ tel que } Z_j = y\} \right].$$

On définit le temps de recouvrement du graphe pondéré (G, C) :

$$Rec(G) = \max_{x \in S} Rec(x).$$

Corollaire 2 (Matthews) Soit

$$R = \max_{(x,y) \in S^2} R_{x,y}^{eq}.$$

Alors on a l'encadrement suivant pour le temps de recouvrement de G :

$$mR \leq Rec(G) \leq 2mR \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1} \right).$$

▷ **Minoration** : il existe des sommets x et y tels que $R = R_{x,y}^{eq}$. Alors :

$$\begin{aligned} Rec(G) &= \max_{z \in S} Rec(z) \\ &\geq \max(Rec(x), Rec(y)) \\ &\geq \max(A_{x,y}, A_{y,x}) \\ &\geq \frac{T_{x,y}}{2} \\ &= mR_{x,y}^{eq} \text{ d'après la proposition 5} \\ &= mR \text{ par choix de } x \text{ et de } y. \end{aligned}$$

Majoration : fixons un point de départ x . Considérons une permutation (Y_1, \dots, Y_{n-1}) des $n-1$ éléments de $S \setminus \{x\}$, aléatoire et indépendante de la chaîne de Markov. Pour k entre 1 et $n-1$, on introduit les temps d'arrêts t_k : t_k est le premier instant où les sommets Y_1, \dots, Y_k ont tous été visités. On pose $L_k = Z_{t_k}$: L_k est l'état de la marche à l'instant t_k . Alors L_k est le dernier sommet visité par la chaîne parmi $\{Y_1, \dots, Y_k\}$. On note $\widetilde{\mathbb{P}}_x$ la mesure produit de la loi de la chaîne issue de x par la loi uniforme de la permutation. Comme la permutation est indépendante de Z :

$$\widetilde{\mathbb{P}}_x(L_k = Y_k) = \frac{1}{k}.$$

En appliquant la propriété de Markov forte en t_{k-1} , on a :

$$\widetilde{\mathbb{E}}_x [t_k - t_{k-1} | Z_0, \dots, Z_{t_{k-1}}, Y_1, \dots, Y_k] = \widetilde{\mathbb{E}}_{L_{k-1}} [\tau_{\{Y_k\}} | Y_1, \dots, Y_k] \mathbb{1}_{L_k=Y_k}.$$

Or, comme la permutation est indépendante de la marche aléatoire,

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbb{E}}_{L_{k-1}} [\tau_{\{Y_k\}} | Y_1, \dots, Y_k] &= \sum_{z \in S} \sum_{y \in S} \widetilde{\mathbb{E}}_z [\tau_{\{y\}} | Y_1, \dots, Y_k] \mathbb{1}_{L_{k-1}=z} \mathbb{1}_{Y_k=y} \\ &= \sum_{z \in S} \sum_{y \in S} \mathbb{E}_z [\tau_{\{y\}}] \mathbb{1}_{L_{k-1}=z} \mathbb{1}_{Y_k=y} \\ &\leq \max_{(z,y) \in S^2} \mathbb{E}_z [\tau_{\{y\}}]. \end{aligned}$$

Donc

$$\widetilde{\mathbb{E}}_x [t_k - t_{k-1} | Z_0, \dots, Z_{t_{k-1}}, Y_1, \dots, Y_k] \leq \left(\max_{(z,y) \in S^2} \mathbb{E}_z [\tau_{\{y\}}] \right) \mathbb{1}_{L_k=Y_k}.$$

En prenant l'espérance dans la relation précédente :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_x [t_k - t_{k-1}] &\leq \left(\max_{(z,y) \in S^2} \mathbb{E}_z [\tau_{\{y\}}] \right) \widetilde{\mathbb{P}}_x(L_k = Y_k) \\ &= \left(\max_{(z,y) \in S^2} A_{z,y} \right) \frac{1}{k} \\ &\leq \left(\max_{(z,y) \in S^2} T_{z,y} \right) \frac{1}{k} \\ &= 2m \left(\max_{(z,y) \in S^2} R_{y,z}^{eq} \right) \frac{1}{k} \text{ par la proposition 5} \\ &= \frac{2mR}{k}. \end{aligned}$$

En faisant la somme sur k , on a donc :

$$Rec(x) \leq 2mR \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1} \right).$$

C'est vrai pour tout sommet x , on en déduit donc la majoration recherchée. \triangleleft

1.5 Flux et puissance

Voyons maintenant comment varie la résistance équivalente lorsqu'on modifie les valeurs des résistances du réseau. On introduit à cet effet le concept de flux, plus général que celui de courant.

Définition 11 On dit que $(j_{x,y,a})_{(x,y) \in S^2, a \in A(x,y)}$ est un flux entre P et N si :

$$\forall (x,y) \in S^2, \forall a \in A(x,y), \quad j_{x,y,a} = -j_{y,x,a}, \quad (4)$$

$$\forall x \in S \setminus \{P, N\}, \quad \sum_{y \in S} \sum_{a \in A(y,x)} j_{y,x,a} = 0. \quad (5)$$

On pose

$$j_N = \sum_{y \in S} \sum_{a \in A(y,N)} j_{y,N,a}$$

et

$$j_P = \sum_{y \in S} \sum_{a \in A(y,P)} j_{y,P,a}.$$

On pourrait se représenter ceci comme un flux de particules traversant le graphe. La condition (5) est une condition de conservation : toutes les particules qui arrivent à un sommet par une arête le quittent par une autre arête, il n'y a pas d'accumulation de particules aux sommets du graphe. Bien entendu, le courant est un cas particulier de flux. L'intérêt de la notion de flux est qu'elle permet de travailler avec des résistances modifiées : si on considère les courants $i_{x,y,a}$ sur un graphe pondéré (G, C) , et qu'on considère C' une autre pondération de G , $i_{x,y,a}$ est toujours un flux sur le graphe pondéré (G, C') .

On dit qu'un flux j est unitaire si $j_N = 1$; comme pour le courant, on a alors $j_P = -1$. Quitte à diviser tous les $j_{x,y,a}$ par j_N , on peut se limiter à la considération de flux unitaires. On aimerait à présent caractériser le courant unitaire parmi tous les flux unitaires possibles sur G . On a déjà vu que le courant unitaire est l'unique flux unitaire vérifiant les lois d'Ohm et de Kirchhoff. On va en donner une autre caractérisation, fondée sur la notion de puissance d'un flux.

Définition 12 *La puissance d'un flux j est*

$$\mathcal{P}(j) = \frac{1}{2} \sum_{(x,y) \in S^2} \sum_{a \in A(x,y)} R_a j_{x,y,a}^2.$$

(Le facteur $\frac{1}{2}$ est là simplement pour que chaque arête soit comptée une fois.)

Lemme 1 (Conservation de l'énergie) *Soit j un flux entre P et N et $W : S \rightarrow \mathbb{R}$. Alors :*

$$(W(P) - W(N)) j_N = \frac{1}{2} \sum_{(x,y) \in S^2} \sum_{a \in A(x,y)} (W(x) - W(y)) j_{x,y,a}.$$

▷ Par définition du flux,

$$\begin{aligned} \sum_{(x,y) \in S^2} \sum_{a \in A(x,y)} W(x) j_{x,y,a} &= \sum_{x \in S} W(x) \left(\sum_{y \in S} \sum_{a \in A(x,y)} j_{x,y,a} \right) \\ &= W(P) \left(\sum_{y \in S} \sum_{a \in A(P,y)} j_{P,y,a} \right) + W(N) \left(\sum_{y \in S} \sum_{a \in A(N,y)} j_{N,y,a} \right). \end{aligned}$$

Donc

$$\sum_{(x,y) \in S^2} \sum_{a \in A(x,y)} W(x) j_{x,y,a} = (W(P) - W(N)) j_N.$$

De plus,

$$\sum_{(x,y) \in S^2} \sum_{a \in A(x,y)} W(y) j_{x,y,a} = \sum_{(x,y) \in S^2} \sum_{a \in A(x,y)} W(y) (-j_{y,x,a}) = -(W(P) - W(N)) j_N.$$

Donc

$$(W(P) - W(N)) j_N = \frac{1}{2} \sum_{(x,y) \in S^2} \sum_{a \in A(x,y)} (W(x) - W(y)) j_{x,y,a}. \triangleleft$$

En prenant $W = V$ et $j = i$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(i) &= \frac{1}{2} \sum_{(x,y) \in S^2} \sum_{a \in A(x,y)} R_a i_{x,y,a}^2 \\
&= \frac{1}{2} \sum_{(x,y) \in S^2} \sum_{a \in A(x,y)} (V(x) - V(y)) i_{x,y,a} \\
&= (V(P) - V(N)) i_N \\
&= R_{P,N}^{eq} i_N^2.
\end{aligned}$$

Cette dernière expression représente physiquement la puissance fournie par le générateur au réseau de résistance, donc la puissance dissipée par effet Joule est exactement la puissance reçue par le réseau. On utilise le lemme pour prouver le résultat suivant, qui caractérise le courant unitaire :

Théorème 3 (Principe de Thomson) *De tous les flux unitaires j sur (G, C) , le courant unitaire i est le seul qui minimise $\mathcal{P}(j)$.*

▷ Soit j un flux unitaire sur (G, C) , on pose $k = j - i$. La famille k est aussi un flux sur (G, C) , et

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(j) &= \frac{1}{2} \sum_{(x,y) \in S^2} \sum_{a \in A(x,y)} R_a j_{x,y,a}^2 \\
&= \frac{1}{2} \sum_{(x,y) \in S^2} \sum_{a \in A(x,y)} R_a (k_{x,y,a} + i_{x,y,a})^2 \\
&= \frac{1}{2} \left(\sum_{(x,y) \in S^2} \sum_{a \in A(x,y)} R_a k_{x,y,a}^2 + \sum_{(x,y) \in S^2} \sum_{a \in A(x,y)} R_a i_{x,y,a}^2 + 2 \sum_{(x,y) \in S^2} \sum_{a \in A(x,y)} R_a i_{x,y,a} k_{x,y,a} \right) \\
&= \mathcal{P}(k) + \mathcal{P}(i) + \sum_{(x,y) \in S^2} \sum_{a \in A(x,y)} R_a i_{x,y,a} k_{x,y,a}.
\end{aligned}$$

Par la loi d'Ohm et le lemme,

$$\sum_{(x,y) \in S^2} \sum_{a \in A(x,y)} R_a i_{x,y,a} k_{x,y,a} = \sum_{(x,y) \in S^2} \sum_{a \in A(x,y)} (V(x) - V(y)) k_{x,y,a} = 2(V(P) - V(N)) k_N.$$

Or, $k_N = j_N - i_N = 1 - 1 = 0$. Donc le terme croisé est nul, et

$$\mathcal{P}(j) = \mathcal{P}(i) + \mathcal{P}(j - i) \geq \mathcal{P}(i),$$

avec égalité si et seulement si $\mathcal{P}(j - i) = 0$, i.e. $j = i$. ◁

On en déduit :

Théorème 4 (Loi de Rayleigh) *La résistance équivalente $R_{P,N}^{eq}$ est une fonction croissante de chaque résistance du réseau.*

▷ Soit C' une autre pondération de G vérifiant pour toute arête a , $R'_a := \frac{1}{C'_a} \geq R_a$. On note $R_{P,N}^{eq'}$ la résistance équivalente correspondante. On note également $\mathcal{P}'(j)$ la puissance d'un flux j parcourant (G, C') et i' le courant unitaire entre P et N parcourant (G, C') . Alors

$$R_{P,N}^{eq'} = R_{P,N}^{eq} i_N^2 = \mathcal{P}'(i') = \frac{1}{2} \sum_{(x,y) \in S^2} \sum_{a \in A(x,y)} R'_a i'^2_{x,y,a} \geq \frac{1}{2} \sum_{(x,y) \in S^2} \sum_{a \in A(x,y)} R_a i'^2_{x,y,a} = \mathcal{P}(i').$$

D'après le principe de Thomson, comme i' est aussi un flux unitaire sur (G, C) , $\mathcal{P}(i') \geq \mathcal{P}(i)$, où i est le courant unitaire entre P et N sur (G, C) . Donc $R_{P,N}^{eq'} \geq \mathcal{P}(i) = R_{P,N}^{eq} i_N^2 = R_{P,N}^{eq}$. ◁

À l'aide de cette loi, nous allons pouvoir démontrer des résultats sur les marches aléatoires.

2 Applications : preuves élémentaires de résultats probabilistes

2.1 Récurrence, transience et résistance équivalente

On va donner un analogue électrique de certaines propriétés des marches aléatoires. Pour cela, les notions de résistance et de conductance équivalentes sont cruciales, nous allons donc essayer d'en donner à nouveau une interprétation probabiliste.

Définition 13 Soit (G, C) un graphe pondéré, $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une marche aléatoire sur G et (x, y) un couple de sommets de G . La probabilité d'échappement de x vers y est la probabilité $\mathbb{P}(x \rightarrow y)$ qu'une marche aléatoire partant de x atteigne y avant de repasser par x :

$$\mathbb{P}(x \rightarrow y) = \mathbb{P}_x \left(\tau_{\{y\}} < \tau_{\{x\}}^+ \right).$$

On peut interpréter la conductance équivalente en termes de probabilité d'échappement :

Proposition 6 (Interprétation probabiliste de la conductance équivalente) Si x et y sont deux sommets du graphe pondéré (G, C) ,

$$C_{x,y}^{eq} = C_x \mathbb{P}(x \rightarrow y).$$

▷ On note $P = x$ et $N = y$, et on suppose qu'on a branché un générateur entre P (pôle +) et N (pôle -). D'après la propriété de Markov faible appliquée à l'instant 1 :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(x \rightarrow y) &= \mathbb{P}(P \rightarrow N) \\ &= \sum_{z \in S} Q(P, z) \mathbb{P}_z(\tau_{\{N\}} < \tau_{\{P\}}) \\ &= \sum_{z \in S} \frac{1}{C_P} \sum_{a \in A(P,z)} C_a \mathbb{P}_z(\tau_{\{N\}} < \tau_{\{P\}}) \\ &= \sum_{z \in S} \frac{1}{C_P} \sum_{a \in A(P,z)} C_a (1 - \mathbb{P}_z(\tau_{\{P\}} < \tau_{\{N\}})). \end{aligned}$$

D'après la première interprétation probabiliste du potentiel, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(x \rightarrow y) &= \sum_{z \in S} \frac{1}{C_P} \sum_{a \in A(P,z)} C_a \left(1 - \frac{V(z)}{V(P)} \right) \\ &= \frac{1}{C_P V(P)} \sum_{z \in S} \sum_{a \in A(P,z)} C_a (V(P) - V(z)) \\ &= \frac{1}{C_P V(P)} \sum_{z \in S} \sum_{a \in A(P,z)} i_{P,z,a} \\ &= \frac{1}{C_P V(P)} i_N \text{ par la loi des nœuds.} \end{aligned}$$

Donc :

$$C_{P,N}^{eq} = \frac{i_N}{V(P)} = C_P \mathbb{P}(P \rightarrow N),$$

ce qui achève la preuve. ◁

On en déduit une seconde interprétation probabiliste de la résistance équivalente :

Corollaire 3 (Deuxième interprétation probabiliste de la résistance équivalente) On définit $N(x \rightarrow y)$ le nombre de visites en x avant d'atteindre y . Alors

$$R_{x,y}^{eq} = \frac{1}{C_x} \mathbb{E}_x [N(x \rightarrow y)].$$

▷ Par la propriété de Markov forte, $N(x \rightarrow y)$ suit une loi géométrique de paramètre $p = \mathbb{P}(x \rightarrow y)$. Donc le nombre moyen de retours en x est

$$\mathbb{E}_x [N(x \rightarrow y)] = \frac{1}{\mathbb{P}(x \rightarrow y)} = \frac{C_x}{C_{x,y}^{eq}} = C_x R_{x,y}^{eq}. \triangleleft$$

En pratique, on a trois moyens simples de réduire un réseau de résistances pour calculer sa résistance équivalente :

1. **Association en série** : deux résistances R et R' en série sont équivalentes à une seule résistance de valeur $R + R'$.

Série

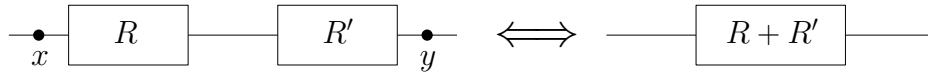


FIGURE 4 – Association en série

▷ Sous la loi \mathbb{P}_x , on sait que $N(x \rightarrow y)$ suit une loi géométrique de paramètre $p = \frac{C'}{C+C'}$, où $C = \frac{1}{R}$ et $C' = \frac{1}{R'}$. Alors,

$$\mathbb{E}_x [N(x \rightarrow y)] = \frac{1}{p} = \frac{C + C'}{C'}.$$

Donc d'après le corollaire 3,

$$R_{x,y}^{eq} = \frac{1}{C} \mathbb{E}_x [N(x \rightarrow y)] = \frac{C + C'}{CC'} = R + R'. \triangleleft$$

2. **Association en parallèle** : deux résistances R et R' sont équivalentes à une seule résistance de valeur $\frac{RR'}{R+R'}$, *i.e.* la conductance équivalente est la somme des conductances.

Parallèle

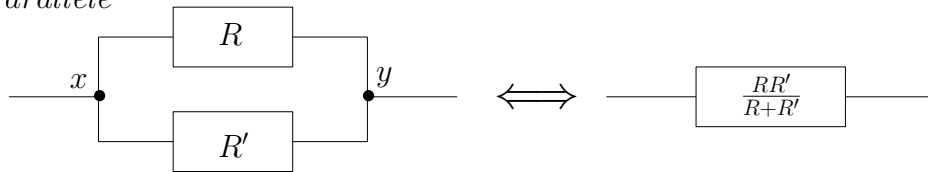


FIGURE 5 – Association en parallèle

▷ Sous la loi \mathbb{P}_x , $N(x \rightarrow y) = 1$. Donc, d'après le corollaire 3,

$$R_{x,y}^{eq} = \frac{1}{C + C'} \mathbb{E}_x [N(x \rightarrow y)] = \frac{1}{C + C'} = \frac{RR'}{R + R'}. \triangleleft$$

3. **Transformation étoile-triangle** : trois résistances R_1, R_2, R_3 disposées en étoile sont équivalentes à trois résistances R_a, R_b, R_c disposées en triangle (voir figure 6).

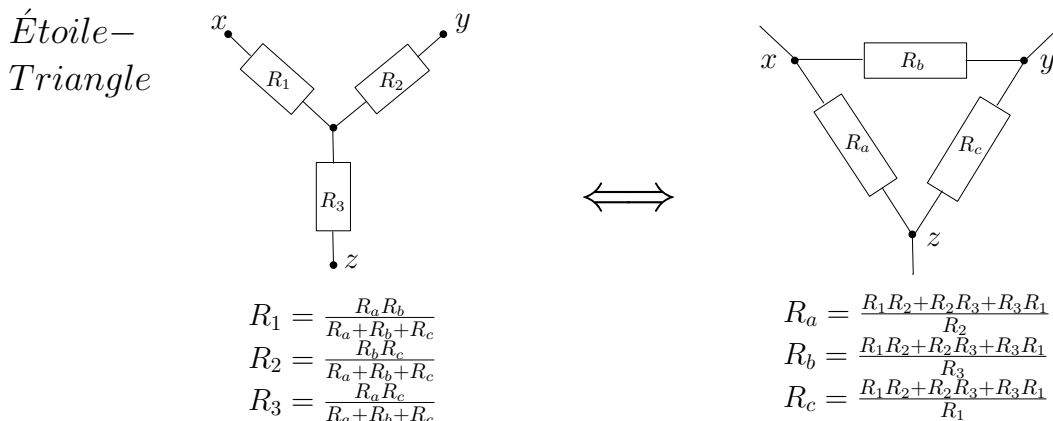


FIGURE 6 – Transformation étoile-triangle

▷ Par associations en série et en parallèle et par symétrie, il suffit de vérifier que

$$R_1 + R_3 = \left(\frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_b + R_c} \right)^{-1},$$

ce qui est évident. ◁

Ces trois transformations permettent de réduire n'importe quel graphe planaire (voir [Tr89] pour une preuve) :

Théorème 5 (Epifanov) *Soit (G, C) un réseau de résistances, où G est un graphe planaire, i.e. un graphe dont les sommets sont des points du plan et dont les arêtes ne se coupent pas en-dehors de leurs extrémités. Alors on peut réduire ce réseau uniquement à l'aide des transformations série, parallèle et étoile-triangle.*

La deuxième interprétation probabiliste de la résistance équivalente montre que celle-ci est intimement liée au fait qu'une marche aléatoire revienne à son point de départ.

Définition 14 *Une marche aléatoire sur un graphe (G, C) est dite récurrente si elle revient presque sûrement à son point de départ et transiente si elle a une probabilité strictement positive de ne pas y revenir.*

Soit (G, C) un graphe pondéré connexe d'ensemble de sommets S dénombrable et localement fini. On considère une marche aléatoire $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur G . Notre but est d'établir une condition sur le réseau de résistances (G, C) qui soit équivalente à la récurrence de $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On distingue un sommet x_0 qu'on choisit comme point de départ de la marche aléatoire. On introduit une distance d sur S , usuelle en théorie des graphes : si x et y sont deux sommets, $d(x, y)$ est la longueur du plus court chemin entre x et y . Soit

$$\Lambda_n = \{x \in S \mid d(x_0, x) \leq n\},$$

dont la frontière est

$$\partial\Lambda_n = \Lambda_n \setminus \Lambda_{n-1} = \{x \in S \mid d(x_0, x) = n\}.$$

Comme G est localement fini, Λ_n et $\partial\Lambda_n$ sont finis. Soit G_n le sous-graphe de G d'ensemble de sommets égal à Λ_n et d'arêtes toutes les arêtes de G dont les deux extrémités sont dans Λ_n .

Soit $\overline{G_n}$ le réseau de résistances obtenu à partir de G_n en court-circuitant tous les sommets de $\partial\Lambda_n$ (on les met au même potentiel en les reliant par des résistances nulles). On note R_n^{eq} la résistance équivalente du réseau $\overline{G_n}$ entre x_0 et $\partial\Lambda_n$ (on peut prendre un ensemble de points comme borne, car on les a identifiés en les mettant au même potentiel). Comme le réseau de résistances $\overline{G_n}$ s'obtient à partir de $\overline{G_{n+1}}$ en ajoutant des court-circuits entre les sommets de $\partial\Lambda_{n+1}$ et ceux de $\partial\Lambda_n$, d'après la loi de Rayleigh, la suite $(R_n^{eq})_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, donc admet une limite R^{eq} dans $[0, +\infty]$.

On a le lien suivant entre la résistance équivalente et la probabilité de retour à l'origine :

Proposition 7 *Pour une marche aléatoire $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur le graphe (G, C) , la probabilité de retour à l'origine est donnée par*

$$\mathbb{P}_{x_0}(\exists n \geq 1, Z_n = x_0) = 1 - \frac{1}{C_{x_0} R^{eq}}.$$

▷ Pour tout x dans Λ_n , soit

$$g_n(x) = \mathbb{P}_x(Z \text{ atteint } \partial\Lambda_n \text{ avant } x_0).$$

La fonction g_n est une probabilité d'atteinte donc d'après la première interprétation du potentiel, $g_n = V$, où V est le potentiel quand on branche un générateur de tension unité entre x_0 et $\partial\Lambda_n$. D'après la proposition 6, on a :

$$\mathbb{P}_{x_0}(Z \text{ retourne en } x_0 \text{ avant d'atteindre } \partial\Lambda_n) = 1 - \frac{1}{R_n^{eq} C_{x_0}}.$$

Comme

$$\{\exists n \geq 1, Z_n = x_0\} = \bigcup_{n \geq 1} \{Z \text{ atteint } x_0 \text{ avant } \partial\Lambda_n\},$$

qui est une union croissante, on obtient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_{x_0}(Z \text{ retourne en } x_0 \text{ avant d'atteindre } \partial\Lambda_n) = \mathbb{P}_{x_0}(\exists n \geq 1, Z_n = x_0).$$

Donc, on en déduit que

$$\mathbb{P}_{x_0}(\exists n \geq 1, Z_n = x_0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{C_{x_0} R_n^{eq}}\right) = 1 - \frac{1}{C_{x_0} R^{eq}},$$

ce qui achève la preuve. ◁

Le caractère récurrent ou transient peut aussi s'interpréter en termes de flux.

Définition 15 *Une famille $(j_{x,y,a})_{(x,y) \in S^2, a \in A(x,y)}$ est un x_0 -flux si :*

$$\forall (x, y) \in S^2, \forall a \in A(x, y), \quad j_{x,y,a} = -j_{y,x,a}, \quad (6)$$

$$\forall x \in S \setminus \{x_0\}, \quad \sum_{y \in S} \sum_{a \in A(y,x)} j_{y,x,a} = 0. \quad (7)$$

On a alors les deux caractérisations suivantes de la récurrence et de la transience :

Théorème 6 (Critère de Rayleigh) *On a les équivalences suivantes :*

1. *La marche aléatoire Z est récurrente si et seulement si $R^{eq} = +\infty$.*

2. La marche aléatoire Z est transiente si et seulement s'il existe un x_0 -flux j non identiquement nul dont la puissance est finie :

$$\mathcal{P}(j) = \frac{1}{2} \sum_{(x,y) \in S^2} \sum_{a \in A(x,y)} \frac{j_{x,y,a}^2}{C_a} < +\infty.$$

▷ Le premier point est une conséquence directe de la proposition 7. Il suffit de prouver le deuxième point. Remarquons pour commencer qu'il existe un flux unitaire $i(n)$ sur $\overline{G_n}$ entre x_0 et $\partial\Lambda_n$, dont la puissance $\mathcal{P}(i(n))$ est égale à R_n^{eq} (c'est le courant unitaire).

Supposons qu'il existe un x_0 -flux j non identiquement nul dont la puissance

$$\mathcal{P}(j) = \frac{1}{2} \sum_{(x,y) \in S^2} \sum_{a \in A(x,y)} \frac{j_{x,y,a}^2}{C_a} < +\infty.$$

Quitte à diviser par le flux entrant en x_0 , on peut supposer le flux unitaire. La restriction de j à l'ensemble A_n des arêtes de $\overline{G_n}$ est un flux unitaire sur $\overline{G_n}$. D'après le principe de Thomson,

$$\mathcal{P}(i(n)) \leq \frac{1}{2} \sum_{(x,y) \in \Lambda_n^2} \sum_{a \in A(x,y)} \frac{j_{x,y,a}^2}{C_a} \leq \frac{1}{2} \sum_{(x,y) \in S^2} \sum_{a \in A(x,y)} \frac{j_{x,y,a}^2}{C_a} = \mathcal{P}(j).$$

d'où

$$R^{eq} = \lim_{n \rightarrow +\infty} R_n^{eq} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{P}(i(n)) \leq \mathcal{P}(j) < +\infty.$$

Donc d'après le premier point, Z est transiente.

Réciproquement, supposons que Z est transiente. Pour toute arête $a \in A(x, y)$ de A , la suite $(i_{x,y,a}(n))_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée car pour tout $n \geq 0$:

$$\frac{(i_{x,y,a}(n))^2}{C_a} \leq R_n^{eq} \leq R^{eq} < +\infty.$$

La suite $(i_{x,y,a}(n))_{n \in \mathbb{N}}$ possède donc une sous-suite convergente. Comme A est dénombrable, par extraction diagonale, il existe une suite $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telle que pour toute arête $a \in A(x, y)$, $(i_{x,y,a}(n_k))_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers un certain $j_{x,y,a}$. Comme chaque $i(n_k)$ est un flux unitaire, il est aisé de voir que j est un x_0 -flux unitaire. De plus, pour tout $m \geq 1$,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(i_{n_k}) &= \frac{1}{2} \sum_{(x,y) \in S^2} \sum_{a \in A(x,y)} \frac{(i_{x,y,a}(n_k))^2}{C_a} \\ &\geq \frac{1}{2} \sum_{(x,y) \in \Lambda_m^2} \sum_{a \in A(x,y)} \frac{(i_{x,y,a}(n_k))^2}{C_a}. \end{aligned}$$

Comme Λ_m est fini, en passant à la limite quand $k \rightarrow +\infty$, on a

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow +\infty} \mathcal{P}(i_{n_k}) &\geq \frac{1}{2} \sum_{(x,y) \in \Lambda_m^2} \sum_{a \in A(x,y)} \frac{j_{x,y,a}^2}{C_a} \\ &\rightarrow \mathcal{P}(j) \text{ pour } m \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Alors,

$$\mathcal{P}(j) \leq \lim_{k \rightarrow +\infty} \mathcal{P}(i_{n_k}) = \lim_{k \rightarrow +\infty} R_{n_k}^{eq} = R^{eq} < +\infty$$

d'après le premier point. Donc, j est bien un x_0 -flux non identiquement nul de puissance totale finie. ◁

On va utiliser le critère de Rayleigh pour établir des méthodes pratiques de détermination de la récurrence ou de la transience d'un graphe.

2.2 Critère de Nash-Williams et méthode de Rayleigh

Une première méthode pratique est le critère de Nash-Williams.

Définition 16 Soit G un graphe et x_0 un sommet de G . Un ensemble de coupure Π du graphe G associé à x_0 est un ensemble d'arêtes qui sépare x_0 de l'infini, i.e. tout chemin entre x_0 et l'infini contient une arête dans Π .

Théorème 7 (Critère de Nash-Williams) Soit x_0 un sommet de G . Si $(\Pi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille d'ensembles de coupures finis disjoints associés à x_0 , alors

$$R^{eq} \geq \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\sum_{a \in \Pi_n} C_a \right)^{-1}.$$

En particulier, si le terme de droite est infini, alors la marche aléatoire sur G est récurrente.

▷ R^{eq} est la puissance du courant unitaire, donc d'après le principe de Thomson, il suffit de prouver la puissance de tout x_0 -flux unitaire j sur G est supérieure au membre de droite de l'inégalité. Soit K_n l'ensemble des sommets qui ne sont pas séparés de x_0 par Π_n . Soit F_n l'ensemble des arêtes dont l'une des extrémités est dans K_n et l'autre ne l'est pas. Exceptionnellement, on considèrera que les arêtes de F_n sont orientées et pointent vers l'extérieur de K_n . Clairement $F_n \subseteq \Pi_n$.

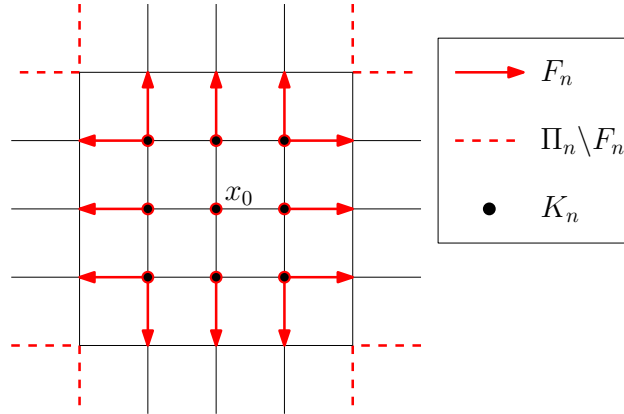


FIGURE 7 – Illustration des notations

En considérant la propriété correspondant à la loi des nœuds pour un flux, on a

$$\sum_{x \in K_n} \sum_{y \in S} \sum_{a \in A(x,y)} j_{x,y,a} = 1$$

car $x_0 \in K_n$. D'autre part, par simplification sur les arêtes dont les deux extrémités sont dans K_n :

$$\sum_{x \in K_n} \sum_{y \in S} \sum_{a \in A(x,y)} j_{x,y,a} = \sum_{a \in F_n} j_a \leq \sum_{a \in F_n} |j_a| \leq \sum_{a \in \Pi_n} |j_a|.$$

Donc

$$1 \leq \left(\sum_{a \in \Pi_n} |j_a| \right)^2 \leq \left(\sum_{a \in \Pi_n} C_a \right) \left(\sum_{a \in \Pi_n} \frac{j_a^2}{C_a} \right)$$

par l'inégalité de Cauchy-Schwarz. En sommant sur n , on en déduit que

$$\sum_{n \geq 0} \left(\sum_{a \in \Pi_n} C_a \right)^{-1} \leq \sum_{n \geq 0} \sum_{a \in \Pi_n} \frac{j_a^2}{C_a} \leq \mathcal{P}(j).$$

En particulier, si le premier membre de l'inégalité ci-dessus est infini, R^{eq} est infini, donc d'après le critère de Rayleigh, la marche aléatoire sur le graphe G est récurrente. \triangleleft

Une seconde méthode pratique est celle de Rayleigh.

Lemme 2 (Méthode de Rayleigh) *On dispose des deux méthodes suivantes pour simplifier un réseau et savoir si la résistance équivalente est finie ou non.*

1. **Court-circuit** : ajouter des courts-circuits dans le réseau ne peut que diminuer la résistance équivalente. Si après court-circuit, la nouvelle résistance équivalente est infinie, alors le graphe initial était récurrent.
2. **Coupure** : enlever des résistances dans le réseau ne peut qu'augmenter la résistance équivalente. Si après coupure, la nouvelle résistance équivalente est finie, alors le graphe initial était transient.

\triangleright C'est une conséquence immédiate de la loi de Rayleigh, car un court-circuit correspond à une résistance nulle et enlever une résistance revient à la remplacer par une résistance infinie. \triangleleft

L'avantage des preuves basées sur la méthode de Rayleigh par rapport aux preuves classiques est qu'elles sont bien adaptées à l'utilisation de sous-graphes. Si un graphe G est récurrent, tout sous-graphe de G est récurrent d'après la méthode des coupures. Si un sous-graphe du graphe G est transient, alors G est transient par la méthode des court-circuits. Une belle application de ces techniques est le théorème de Pólya.

2.3 Théorème de Pólya

On s'intéresse aux marches aléatoires simples sur le graphe \mathbb{Z}^d . Pour $x, y \in \mathbb{Z}^d$, si la distance euclidienne entre x et y vaut 1, on ajoute une arête entre eux. On peut supposer que toutes les arêtes de \mathbb{Z}^d sont de résistance 1. Par souci de simplicité, on suppose que la marche aléatoire part de 0. Considérons d'abord les cas $d = 2$ et $d = 3$.

Proposition 8 (Théorème de Pólya en dimension 2) *Le graphe de \mathbb{Z}^2 est récurrent.*

\triangleright Pour $n \geq 1$, on note S_n l'intersection avec \mathbb{Z}^2 de la sphère de centre 0 et rayon n pour la norme infinie sur \mathbb{R}^2 , et Π_n l'ensemble des arêtes qui ont une extrémité dans S_n et l'autre dans S_{n+1} .

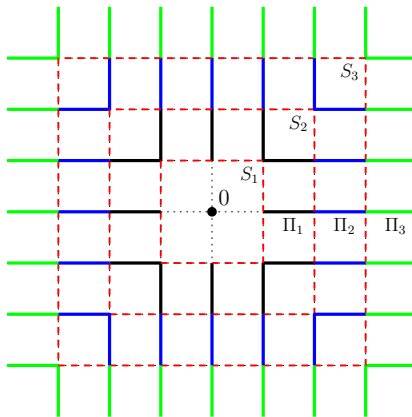


FIGURE 8 – Les ensembles de coupure de \mathbb{Z}^2 associés à 0

Alors par construction, les Π_n sont des ensembles de coupure associés à 0. Or, Π_n est de cardinal $8n + 4$, donc par divergence de la série harmonique, \mathbb{Z}^2 est récurrent d'après le critère de Nash-Williams. \triangleleft

Proposition 9 (Théorème de Pólya en dimension 3) \mathbb{Z}^3 est transient.

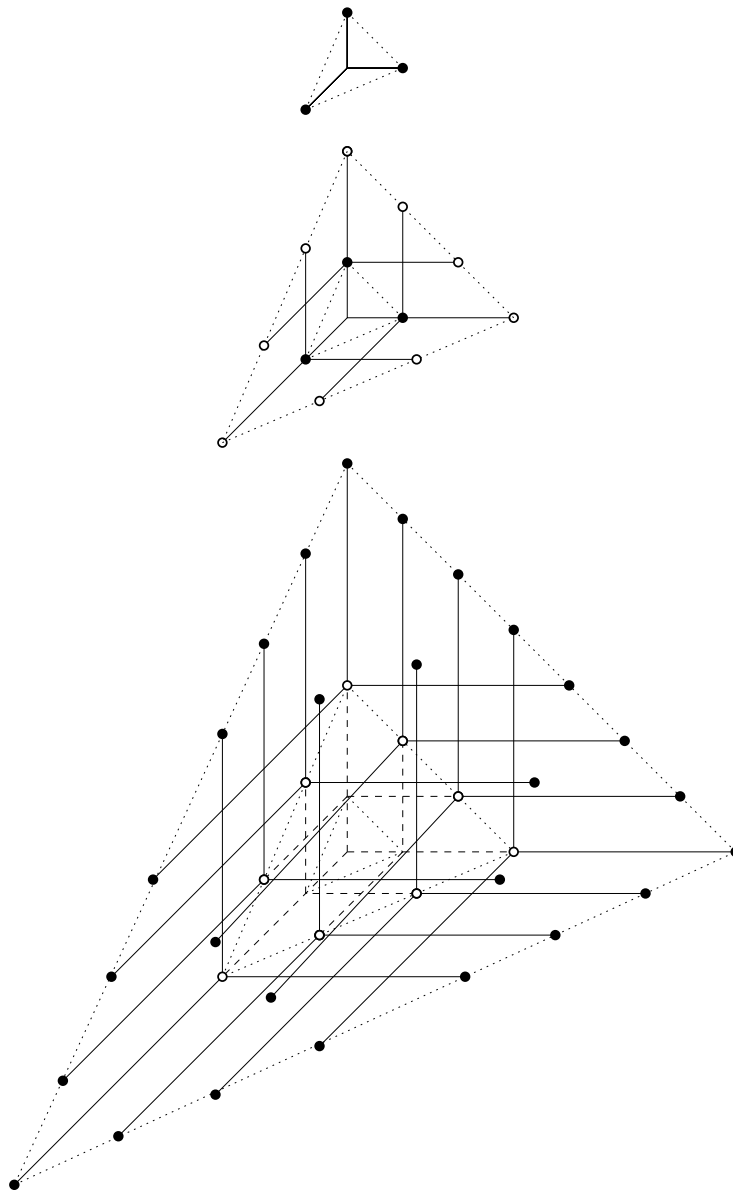


FIGURE 9 – Le sous-graphe B de \mathbb{Z}^3

\triangleright D'après la méthode de Rayleigh, il suffit de trouver un sous-graphe B de \mathbb{Z}^3 dont la résistance équivalente est finie. On va choisir pour B une structure d'arbre, dont la résistance équivalente est simple à calculer. Pour construire B , on part de l'origine, et on démarre trois branches, l'une vers l'est, l'autre vers le sud et la dernière vers le haut. À chaque fois qu'une branche intersecte un plan

$$x + y + z = 2^n - 1$$

pour un certain $n \geq 1$, elle se divise en trois branches, vers l'est, le sud et le haut. On dénote par nœud de l'arbre un sommet où une branche se divise en trois.

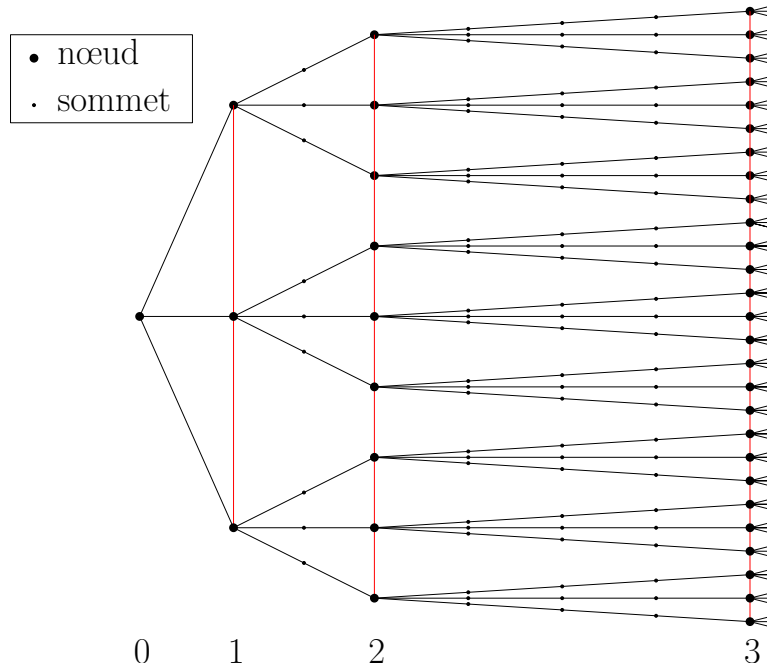


FIGURE 10 – Une structure d’arbre pour B

Il peut arriver au cours de notre construction que deux branches se croisent en un sommet dans \mathbb{Z}^3 , retirant à B son caractère d’arbre, mais cela n’a pas d’importance, car nous sommes alors pour les deux sommets dans les deux branches à la même distance de la racine de l’arbre, donc par symétrie au même potentiel, ce qui permet d’identifier les deux sommets dans l’arbre. Par le même argument, on peut court-circuiter tous les nœuds qui sont à la même profondeur (en rouge sur la figure 10), en convenant que l’origine est à la profondeur 0.

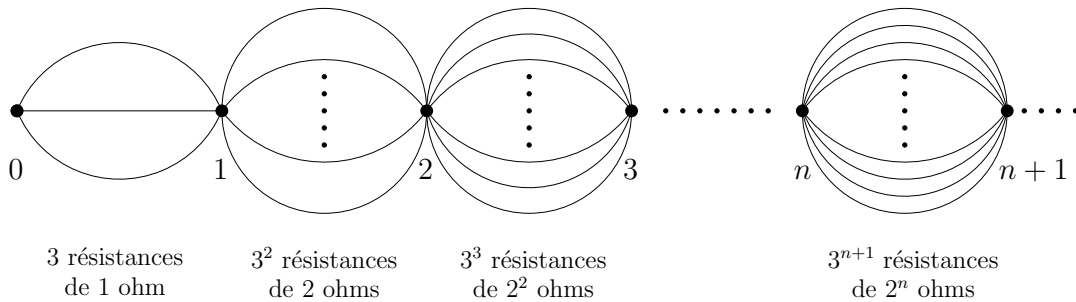


FIGURE 11 – La réduction de B

À la profondeur n de l’arbre, il y a 3^n nœuds. Donc entre les profondeurs n et $n + 1$ de l’arbre, il y a 3^{n+1} branches de l’arbre reliant ces deux profondeurs. Chacune de ces branches a une longueur 2^n , car elle se trouve entre les plans $x + y + z = 2^n - 1$ et $x + y + z = 2^{n+1} - 1$. Par associations série et parallèle, on se ramène pour calculer la résistance équivalente de B à une série de résistances de valeur $2^n/3^{n+1}$. Comme

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{2^n}{3^{n+1}} < +\infty,$$

la résistance équivalente de B est finie. \triangleleft

On peut proposer une seconde preuve du cas $d = 3$:

▷ D'après le deuxième point du critère de Rayleigh, il suffit de construire un 0-flux j non identiquement nul sur \mathbb{Z}^3 dont la puissance $\mathcal{P}(j)$ est finie. Notons S la sphère unité de \mathbb{R}^3 pour la norme euclidienne. Soit $x \in \mathbb{Z}^3 \setminus \{0\}$. On note C_x le cube dans \mathbb{R}^3 de côté 1, de centre x et d'arêtes de mêmes directions que les axes. Pour chaque voisin y de x , l'arête orientée $[x, y]$ intersecte une unique face du cube C_x . On la note $F_{x,y}$. De plus, on définit $\Pi(x) = S \cap [0, x]$ comme le point d'intersection du segment $[0, x]$ avec S , *i.e.* $\Pi(x) = \frac{x}{\|x\|}$.

Pour $x, y \in \mathbb{Z}^3$, $x \sim y$, on définit $j_{x,y}$ de la manière suivante :

- $|j_{x,y}|$ est égal à l'aire de $\Pi(F_{x,y})$ par rapport à la mesure superficielle sur la sphère S ;
- $j_{x,y}$ est positif si et seulement si le produit scalaire $\langle \frac{1}{2}(x+y), y-x \rangle \geq 0$, *i.e.* $\|x\| \leq \|y\|$ pour la norme euclidienne.

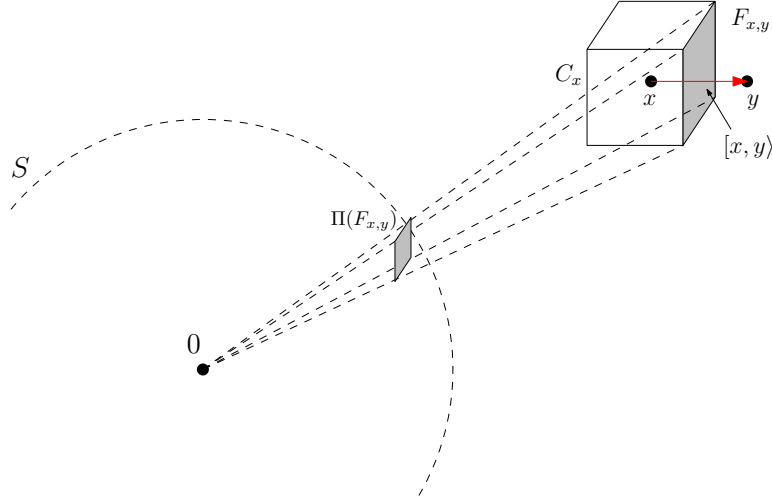


FIGURE 12 – Le flux sur \mathbb{Z}^3

On va montrer que j est un 0-flux non identiquement nul sur \mathbb{Z}^3 :

La première propriété du flux est vérifiée par construction, donc il suffit de montrer la deuxième. Pour $x \neq 0$, la surface du cube C_x a une projection $\Pi(C_x)$ sur S . La somme

$$J_x = \sum_{y \sim x} j_{x,y}$$

est égale à l'intégrale sur $\vec{v} \in \Pi(C_x)$ du nombre de voisins y de x pour lesquels $\vec{v} \in \Pi(F_{x,y})$, compté avec un signe + si $\|x\| < \|y\|$ et un signe - si $\|x\| > \|y\|$ (notons qu'on n'a jamais $\|x\| = \|y\|$ si $x \sim y$). En-dehors d'un ensemble de mesure nulle, chaque $\vec{v} \in \Pi(C_x)$ est compté deux fois, une fois positivement et une fois négativement. Donc $J_x = 0$ pour $x \neq 0$. De plus, il est facile à voir que J_0 est égal à l'aire de S , c'est-à-dire 4π . Donc j est bien un 0-flux non identiquement nul.

On note qu'il existe deux constantes réelles positives C_1 et C_2 telles que :

- $|j_{x,y}| \leq \frac{C_1}{|x|^2}$ pour $x \neq 0$, où $|x| = d(0, x)$ est comprise au sens de la théorie des graphes ;
- $\#\{x \in \mathbb{Z}^3 \mid |x| = n\} \leq C_2 n^2$.

Alors, en remarquant que le cube a six faces, on a

$$\mathcal{P}(j) \leq \sum_{x \neq 0} \sum_{y \sim x} j_{x,y}^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} 6C_2 n^2 \left(\frac{C_1}{n^2} \right)^2 < \infty,$$

ce qui achève la preuve. ◁

Traisons à présent le cas général.

Théorème 8 (Théorème de Pólya) Une marche aléatoire simple sur \mathbb{Z}^d est récurrente si $d \leq 2$ et transiente si $d \geq 3$.

▷ C'est immédiat grâce à la remarque suivant la méthode de Rayleigh. Si $d \leq 2$, \mathbb{Z}^d est un sous-graphe du graphe récurrent \mathbb{Z}^2 , donc récurrent. Si $d \geq 3$, \mathbb{Z}^d contient \mathbb{Z}^3 , sous-graphe transient, donc est transient. ◁

Voyons à présent une autre intervention des réseaux de résistances dans la preuve de résultats mathématiques.

3 Dissections de rectangles en carrés et réseaux de résistances

Nous allons à présent aborder le problème de découpage d'un rectangle en carrés. Considérons un rectangle de côtés α et β . On dit qu'il est découppable en carrés si l'on peut le matérialiser comme la réunion d'un nombre fini de carrés (pas nécessairement tous de même taille) d'intérieurs deux à deux disjoints. On fait ici l'amalgame entre un carré (resp. rectangle) et son enveloppe convexe, c'est-à-dire le carré (resp. rectangle) «plein».

Voici deux exemples de rectangles découppables en carrés (les nombres dans les carrés représentent la longueur des côtés des carrés) :

Exemple 1 (Des carrés de même taille)

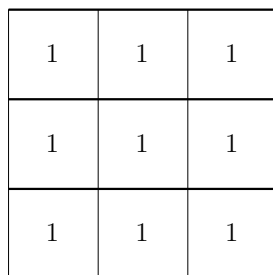


FIGURE 13 – Exemple 1

Exemple 2 (Des carrés de tailles distinctes)

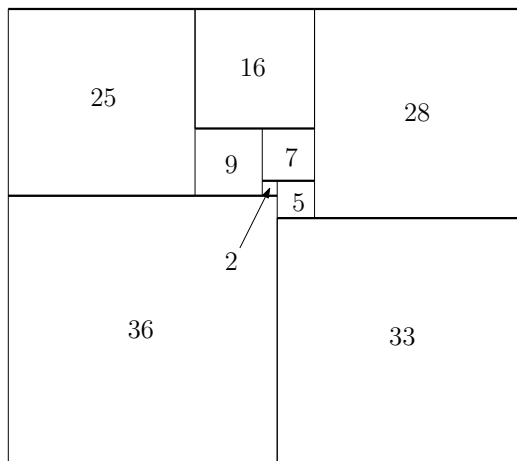


FIGURE 14 – Exemple 2

Alors on a le résultat suivant :

Théorème 9 *Un rectangle de côtés α et β est découpable en carrés si et seulement si le rapport $\frac{\alpha}{\beta}$ est rationnel.*

▷ Un sens est immédiat : Si $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{p}{q}$ avec p et q entiers strictement positifs, on le pave avec pq carrés de côté $\frac{\alpha}{p} = \frac{\beta}{q}$.

Pour l'autre sens, on va considérer un découpage en carrés du rectangle, et lui associer un réseau de résistances.

Construction d'un réseau de résistances associé à un découpage : On procède de la manière suivante. Pour fixer les idées, on considère un repère orthonormé du plan d'origine O et les points $B(0, \alpha)$, $D(\beta, 0)$ et $E(\beta, \alpha)$. Notre rectangle est le rectangle $OBDE$. Soit S l'ensemble des ordonnées des sommets des carrés. Pour chaque carré situé entre les ordonnées x et y , on ajoute une résistance R_a de conductance $C_a = 1$ entre x et y . On note A l'ensemble des arêtes et C la famille des conductances. Alors en notant $G = (S, A)$, on a construit le graphe pondéré (G, C) . On pose $P = \alpha$ et $N = 0$, et si $x \in S$, on pose $V(x) = x$. On pose également $i_{x,y,a} = x - y$. Voici comment on construit les graphes associés aux deux découpages présentés ci-dessus (les nombres à côté des arêtes désignent le courant circulant dans celles-ci) :

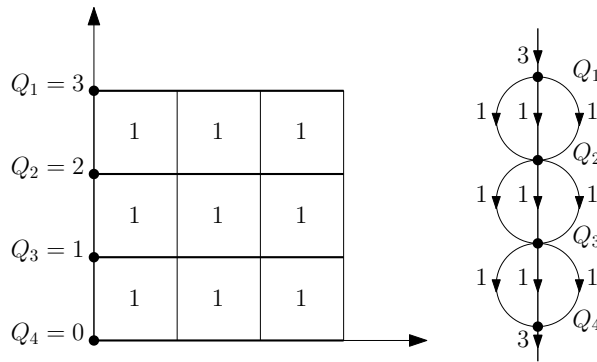


FIGURE 15 – Exemple 1 bis

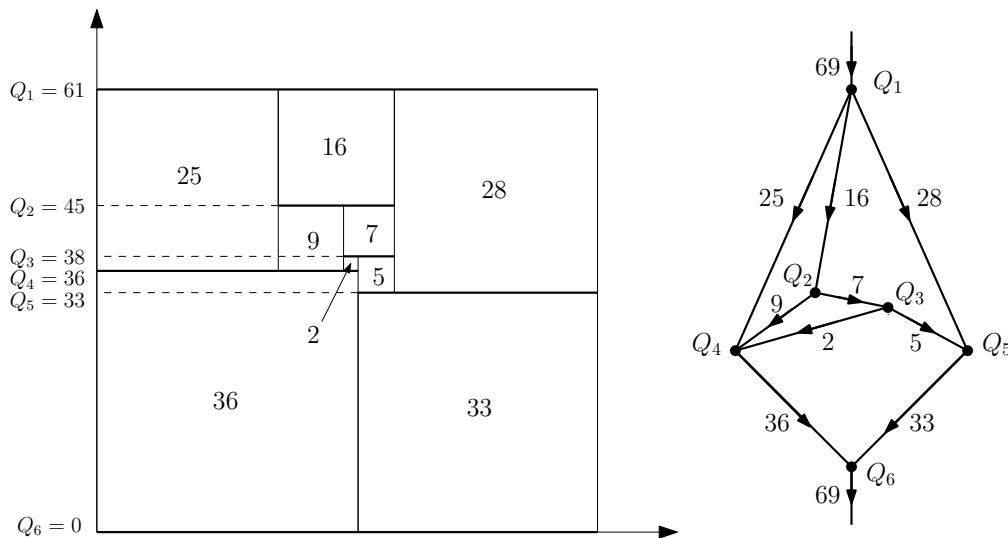


FIGURE 16 – Exemple 2 bis

Le courant $i_{x,y,a}$ est la valeur de la longueur horizontale du carré entre x et y représenté par a , comptée en positif si $x > y$, en négatif sinon. C'est dans cette seule interprétation de $i_{x,y,a}$ qu'on utilise le fait que le découpage se fait selon des carrés, et non des rectangles quelconques. Les $V(x)$ et les $i_{x,y,a}$ vérifient clairement la loi d'Ohm et la loi des mailles. Si $x \neq N$, la somme des $i_{x,y,a}$ pour $y < x$ est égale à la somme des longueurs de tous les carrés reliant x à une ordonnée y plus basse, donc cette somme est la somme des longueurs des segments horizontaux du pavage à l'ordonnée x . De même, si $x \neq P$, la somme des $i_{x,y,a}$ pour $y > x$ est égale à l'opposé de la somme des longueurs des segments horizontaux du pavage à l'ordonnée x . Donc si x est distinct de P et de N :

$$\sum_{y \in S} \sum_{a \in A(x,y)} i_{x,y,a} = 0, \quad (8)$$

$$\sum_{y \in S} \sum_{a \in A(P,y)} i_{P,y,a} = \beta = \sum_{y \in S} \sum_{a \in A(N,y)} i_{y,N,a}, \quad (9)$$

i.e. les $i_{x,y,a}$ vérifient la loi des nœuds. Les $V(x)$ et les $i_{x,y,a}$ vérifient la loi d'Ohm et les deux lois de Kirchhoff, et par unicité, ce sont les tensions et les courants qui apparaissent dans le réseau de résistances G lorsque l'on impose une tension α entre P et N , en mettant N à la masse. Le courant total entrant en P est alors β . Donc $\frac{\alpha}{\beta}$ n'est autre que la résistance équivalente du réseau. On conclut avec le lemme suivant :

Lemme 3 *Cette résistance équivalente est rationnelle.*

Preuve du lemme : Supposons à présent qu'on impose une tension unité entre P et N . Les potentiels sont solutions du système :

$$\left\{ \begin{array}{l} V(P) = 1, \\ V(N) = 0, \\ \forall x \notin \{P, N\}, \sum_{y \in S} \sum_{a \in A(x,y)} C_a (V(x) - V(y)) = 0. \end{array} \right. \quad (10)$$

C'est un système linéaire avec autant d'équations que d'inconnues, et par unicité de la solution au problème de Dirichlet, il est de Cramer. Les $V(x)$ sont donc donnés par les formules de Cramer, ce sont des quotients de déterminants mettant en jeu uniquement les coefficients du système homogène associé et ceux du second membre. Or, par construction, les C_a valent 1, et les seconds membres sont aussi entiers. Donc les $V(x)$ sont rationnels. D'après la loi d'Ohm, comme les résistances sont rationnelles, les $i_{x,y,a}$ le sont aussi. Donc $R_{P,N}^{eq} = \frac{V(P)}{i_N}$ est aussi rationnel. \triangleleft

Pour terminer ce mémoire, remercions Nicolas CURIEN pour l'intérêt du sujet qu'il nous a proposé, pour sa disponibilité, pour son assistance informatique et pour les nombreuses heures passées à relire les versions successives de ce mémoire.

Références

- [Br40] R. L. BROOKS, C. A. B. SMITH, A. H. STONE et W. T. TUTTE, *The dissection of rectangles into squares*, Duke Math J., volume 7, numéro 1, 1940, pp. 312-340.
- [Ch96] Ashok K. CHANDRAR, Prabhakar RAGHAVAN, Walter L. RUZZO, Roman SMOLENSKY et Prasoon TIWARI, *The electrical resistance of a graph captures its commute and cover times*, Computational complexity, volume 6, numéro 4, décembre 1996, pp. 312-318.
- [Do00] Peter G. DOYLE et J. Laurie SNELL, *Random walks and electric networks*, version 3.02, 5 janvier 2000. (disponible à l'adresse http://uk.arxiv.org/PS_cache/math/pdf/0001/0001057v1.pdf)
- [Gr09] Geoffrey GRIMMETT, *Probability on graphs*, décembre 2009, pp. 1-20. (disponible à l'adresse <http://www.statslab.cam.ac.uk/~grg/books/USpgs.pdf>)
- [Ly10] Russell LYONS et Yuval PERES, *Probability on trees and networks*, version du 1er avril 2010, pp. 19-64. (disponible à l'adresse <http://mypage.iu.edu/~rdlyons/prbtree/book.pdf>)
- [Tr89] K. TRUEMPER, *On the delta-wye reduction for planar graphs*, Journal of Graph Theory, volume 13, numéro 2, juin 1989, pp. 141-148.