# Quelques aspects mathématiques de la théorie du micromagnétisme

Rapport de stage du cursus maths-physique, sous la direction de Radu IGNAT

Hugo LAVENANT

3 septembre 2013

## Introduction

Mal compris jusqu'à la deuxième moitié du XXe siècle, le micromagnétisme est maintenant un domaine en plein essor, tant au niveau expérimental qu'au niveau théorique.

On va présenter ici le modèle mathématique de base du micromagnétisme proposé par W. F. BROWN, qui considère que les configurations de l'aimantation observées sont celles qui minimisent une certaine énergie, dite de BROWN. Mathématiquement, le problème se résume à trouver les minima d'une certaine fonction.

On va tout d'abord présenter l'énergie de BROWN, prouver l'existence de minima et montrer l'équation d'Euler-Lagrange vérifiée par les minimiseurs, c'est l'objet de la première partie. Cependant le problème est assez difficile, notamment à cause de la présence du terme non local qu'est l'énergie démagnétisante. On va donc s'intéresser à deux cas limites qui simplifient grandement le problème : la limite des très petites particules (appelée modèle de Stoner Wohlfart) et celle des films ultra-minces, ce sera l'objet de la troisième et la quatrième partie. On a cependant besoin de donner un cadre rigoureux à la convergence d'un problème de minimisation vers un autre, c'est pourquoi on présentera en deuxième partie la théorie de la $\Gamma$-convergence.

L'article [5] a servi de base à ce travail de recherche bibliographique, les autres références en sont pour la plupart issues.

# Table des matières



# 1 Présentation du modèle

Pour cette section on a utilisé le cours de F. Alouges [1] ainsi que l'article de DeSimone [3].

On s'intéresse à l'étude de l'aimantation dans une particule magnétique. Par rapport au premier chapitre on considère un problème adimensionné, c'est-à-dire que toutes les constantes physiques qui interviennent dans le problème seront prises égale à 1. La particule sera décrite par un domaine borné ouvert connexe de $\mathbb{R}^3$ noté $\Omega$. L'aimantation sera modélisée par un champ de vecteur $m \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$, c'est-à-dire $m \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$ et $\nabla m \in L^2(\Omega, \mathcal{M}_3(\mathbb{R}))$, où $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices d'ordre 3 à coefficients réels. On rappelle que c'est un espace de Hilbert muni de la norme

$$\|m\|^2_{H^1(\Omega,\mathbb{R}^3)} = \|m\|^2_{L^2(\Omega,\mathbb{R}^3)} + \|\nabla m\|^2_{L^2(\Omega,\mathcal{M}_3(\mathbb{R}))}.$$

On impose en plus la contrainte $|m(x)| = 1$ pour presque tout $x \in \Omega$, où $|\ |$ désigne la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^3$. Cette contrainte traduit le fait que l'aimantation de chaque spin ne varie qu'en direction et pas en norme d'un spin à l'autre. On notera $\mathbb{S}^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| = 1\}$ et $H^1(\Omega, \mathbb{S}^2) = \{m \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^3) \mid |m| = 1 \text{ pp.}\}$. Rappelons un résultat utile que l'on réutilisera par la suite :

**Proposition 1.** *Soit $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de $H^1(\Omega, \mathbb{S}^2)$.*

*Alors on peut en extraire une sous suite qui converge faiblement dans $H^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$, fortement dans $L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$ et presque partout vers $m \in H^1(\Omega, \mathbb{S}^2)$.*

*Preuve :* La suite étant bornée, par le théorème de Banach Alaoglu on peut extraire une suite qui converge faiblement dans $H^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$. De plus, avec le théorème d'injection de Rellich Kondrakov, on peut supposer que cette sous suite converge fortement dans $L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$. De la convergence forte dans $L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$, on peut, à extraction près, supposer qu'on a la converge presque partout. Cette convergence presque partout assure que $m \in H^1(\Omega, \mathbb{S}^2)$. $\square$

L'aimantation $m$ observée est celle qui minimise l'énergie $\mathcal{E}(m)$, que l'on peut exprimer sous la forme

$$\mathcal{E}(m) = \mathcal{E}_{\text{ec}}(m) + \mathcal{E}_{\text{z}}(m) + \mathcal{E}_{\text{d}}(m) + \mathcal{E}_{\text{a}}(m),$$

où les termes de la somme s'appellent respectivement énergie d'échange, énergie Zeeman, énergie démagnétisante et énergie d'anisotropie.

Nous allons tout d'abord définir les différents termes et en donner quelques propriétés.

## 1.1 L'énergie d'échange

**Définition 1.** *On appelle énergie d'échange, notée $\mathcal{E}_{\text{ec}}$, la fonction définie sur $H^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ par*

$$\mathcal{E}_{ec}(m) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla m|^2.$$

Remarquons que cette énergie est minimale si et seulement si l'aimantation $m$ est constante. On a de plus le résultat de continuité suivant :

**Proposition 2.** *L'application $\mathcal{E}_{ec} : H^1(\Omega, \mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}$ est continue pour la convergence forte sur $H^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ et semi continue inférieurement pour la convergence faible sur $H^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$.*

*Preuve :* La continuité forte découle de $\mathcal{E}_{\text{ec}}(m - n) \leq \frac{1}{2} \|m - n\|^2_{H^1(\Omega, \mathbb{R}^3)}$.

Or comme $\mathcal{E}_{\text{ec}}$ est convexe et continue pour la convergence forte elle est semi continue inférieurement pour la convergence faible. En effet, si $(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge faiblement vers $m$ dans $H^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ on veut montrer que $\mathcal{E}_{\text{ec}}(m) \leq \liminf_{n\to\infty} \mathcal{E}_{\text{ec}}(m_n)$. Soit $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une extraction telle que $(\mathcal{E}_{\text{ec}}(m_{n_k}))_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers $\liminf_{n\to\infty} \mathcal{E}_{\text{ec}}(m_n)$. Comme $(m_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ converge toujours faiblement vers $m$ dans $H^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$, d'après le lemme de Mazur on peut trouver une suite $(\tilde{m}_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ qui converge fortement vers $m$ et telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\tilde{m}_{n_k}$ soit une combinaison convexe des $(m_{n_p})_{p \geq k}$. Par convexité de $\mathcal{E}_{\text{ec}}$, on sait que $\mathcal{E}_{\text{ec}}(\tilde{m}_{n_k})$ est plus petit qu'une combinaison convexe des $(\mathcal{E}_{\text{ec}}(m_{n_p}))_{p \geq k}$. Par convergence de la suite $(\mathcal{E}_{\text{ec}}(m_{n_k}))_{k \in \mathbb{N}}$, si $\varepsilon > 0$ est donné il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq k_0$,

$$\mathcal{E}_{\text{ec}}(\tilde{m}_{n_k}) \leq \liminf_{n\to\infty} \mathcal{E}_{\text{ec}}(m_n) + \varepsilon$$

Or $(\tilde{m}_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ qui converge fortement vers $m$ et $\mathcal{E}_{\text{ec}}$ et continue pour la convergence forte donc on obtient le résultat souhaité en faisant tendre $k$ vers l'infini puis $\varepsilon$ vers 0. $\square$

## 1.2 L'énergie Zeeman

On se donne un vecteur $h \in \mathbb{R}^3$ qui correspond physiquement au champ magnétique extérieur et est fixé pour toute la suite.

**Définition 2.** *On appelle énergie Zeeman, notée $\mathcal{E}_z$, la fonction définie sur $H^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ par*

$$\mathcal{E}_z(m) = -\int_\Omega h.m \ .$$

Elle est minimale si l'aimantation est constante et alignée avec $h$. Puisque c'est une forme linéaire, on a le résultat suivant :

**Proposition 3.** *$\mathcal{E}_z : H^1(\Omega, \mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}$ est continue pour la convergence faible sur $L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$, donc en particulier pour la convergence forte sur $L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$ et $H^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$.*

## 1.3 L'énergie démagnétisante

L'énergie démagnétisante est l'énergie associée aux interactions dipôles-dipôles. Pour l'obtenir, on calcule le champ dipolaire créé par l'aimantation $m$. Ce champ, noté $h_d(m)$ vérifie les équations de Maxwell :

$$\begin{cases} \mathrm{div}(h_d(m) + 1_\Omega m) = 0 \\ \mathrm{rot}(h_d(m)) = 0 \end{cases} ,$$

où $1_\Omega$ désigne la fonction caractéristique de $\Omega$. On rajoute la condition « physique » $h_d(m) \to 0$ à l'infini pour imposer l'unicité. La deuxième équation permet d'écrire $h_d(m) = -\nabla\phi_d(m)$ où $\phi_d(m)$ est une fonction scalaire. La première équation s'écrit alors

$$\Delta\phi_d(m) = \mathrm{div}(1_\Omega m).$$

On cherche alors une solution faible de cette équation, c'est-à-dire qui vérifie

$$\forall \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3), \ \int_{\mathbb{R}^3} \nabla\psi.\nabla\phi_d(m) = \int_\Omega \nabla\psi.m$$

Pour obtenir l'existence et l'unicité on se place dans l'espace de Beppo Levi, noté $W$ et défini par

$$W = \left\{ \phi \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}) \ \middle| \ \nabla\phi \in L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3) \text{ et } \frac{\phi(x)}{\sqrt{1 + |x|^2}} \in L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}) \right\},$$

que l'on munit naturellement de la norme

$$\|\phi\|_W^2 = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\phi(x)^2}{1 + |x|^2} \mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla\phi|^2.$$

Muni de cette norme, $W$ est un espace de Hilbert. C'est le « bon » espace pour puisque l'on a le résultat suivant :

**Proposition 4.** *Soit $m \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$. Il existe un unique $\phi_d(m) \in W$ tel que pour tout $\psi \in W$, on ait*
$$\int_{\mathbb{R}^3} \nabla\phi_d(m).\nabla\psi = \int_\Omega m.\nabla\psi.$$

*Preuve :* On va prouver que la forme bilinéaire $a(\psi, \phi) = \int_{\mathbb{R}^3} \nabla\phi.\nabla\psi$ est équivalente au produit scalaire usuel sur $W$. Pour cela, on va prouver l'inégalité de Hardy.

Si on se donne $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ alors
$$\int_{\mathbb{R}_+} \psi(r)^2 \mathrm{d}r \leq 4 \int_{\mathbb{R}_+} (r\psi'(r))^2 \mathrm{d}r.$$

Pour le montrer, il suffit d'effectuer une intégration par parties dans le terme de gauche (en écrivant $\psi(r)^2 = 1 \times \psi(r)^2$), puis d'utiliser Cauchy Schwarz (en écrivant $r\psi'(r)\psi(r) = (r\psi'(r) \times \psi(r))$.

À partir de cette estimation, si on se donne $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$, en passant en coordonnées sphériques (on note $\mathrm{d}\mu$ la mesure sur $\mathbb{S}^2$),
$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\phi(x)^2}{1+|x|^2}\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{S}^2} \left( \int_0^{+\infty} \frac{\phi(ry)^2 r^2}{1+r^2}\mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\mu(y) \leq \int_{\mathbb{S}^2} \left( \int_0^{+\infty} \phi(ry)^2 \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\mu(y).$$

Or comme, à $y \in \mathbb{S}^2$ fixé, $\frac{\mathrm{d}\phi(ry)}{\mathrm{d}r} = y.\nabla\phi(ry)$ en appliquant l'inégalité précédente, puisque $|y| = 1$,
$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\phi(x)^2}{1+|x|^2}\mathrm{d}x \leq 4 \int_{\mathbb{S}^2} \left( \int_0^{+\infty} r^2 |\nabla\phi(ry)|^2 \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\mu(y) = 4 \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla\phi|^2.$$

Par densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ dans $W$ on en déduit que ce résultat est vrai pour tout $\phi \in W$ :
$$\forall \phi \in W, \ \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\phi(x)^2}{1+|x|^2}\mathrm{d}x \leq 4 \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla\phi|.$$

On vient donc de prouver que
$$\forall \phi \in W, \ a(\phi, \phi) \leq \|\phi\|_W^2 \leq 5a(\phi, \phi).$$

Comme $\phi \in W \mapsto \int_\Omega m.\nabla\phi$ est une forme linéaire continue sur $W$, il suffit d'appliquer le théorème de représentation de Riesz pour conclure. $\square$

On prend alors la définition suivante :

**Définition 3.** *Soit $m \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$. Alors $h_d(m) \in L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ est défini comme $h_d(m) = -\nabla\phi_d(m)$, où $\phi_d(m) \in W$ est défini dans la proposition 4.*

*Remarque :* le champ $h_d(m)$ ainsi défini est solution faible des équations de Maxwell. De plus la contrainte $h_d(m) \to 0$ à l'infini se traduit dans le fait que $h_d(m) \in L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$. Remarquons qu'en prenant $\psi = \phi_d(m)$ dans la formulation variationnelle on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla\phi_d(m)|^2 = \int_\Omega m.\nabla\phi_d(m).$$

*Remarque :* compte tenu de sa formulation variationnelle, on peut voir que $-h_d$ est la projection orthogonale dans $L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ (muni de son produit scalaire usuel) de $m1_\Omega$ sur l'espace des gradients $\{\nabla\psi,\ \psi \in W\}$.

On définit alors l'énergie démagnétisante comme étant l'énergie du champ magnétique $h_d(m)$, c'est-à-dire

**Définition 4.** *On appelle énergie démagnétisante, notée $\mathcal{E}_\mathrm{d}$, la fonction définie sur $H^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ par*

$$\mathcal{E}_\mathrm{d}(m) = \frac{1}{2}\|h_d(m)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3)} = -\frac{1}{2}\int_\Omega h_d(m).m\ .$$

**Proposition 5.** *L'opérateur $h_d : L^2(\Omega, \mathbb{R}^3) \to L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ est linéaire continu de norme plus petite que* 1.

*Preuve :* La linéarité est claire, pour la continuité il suffit d'écrire

$$\|h_d(m)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3)} = -\int_\Omega m.h_d(m) \leq \|m\|_{L^2(\Omega,\mathbb{R}^3)}\|h_d(m)\|_{L^2(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3)}.$$

□

Compte tenu de $\mathcal{E}_\mathrm{d}(m) = -\frac{1}{2}\int_\Omega m.h_d(m)$, on voit que $\mathcal{E}_\mathrm{d} : L^2(\Omega, \mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}$ est une forme quadratique continue pour la convergence $L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$ forte.

## 1.4 L'énergie d'anisotropie

On se donne une fonction $G : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}$ positive, $C^1$ (donc bornée) qui sera fixée pour toute la suite.

**Définition 5.** *On appelle énergie d'anisotropie, notée $\mathcal{E}_\mathrm{a}$, la fonction définie sur $H^1(\Omega, \mathbb{S}^2)$ par*

$$\mathcal{E}_\mathrm{a}(m) = \int_\Omega G(m).$$

Cette énergie est minimale si $m$ appartient aux points qui minimisent $G$, qui correspondent aux directions privilégiées pour des raisons physiques (comme la structure cristalline).

On a le résultat de continuité suivant :

**Proposition 6.** *L'application $\mathcal{E}_a : H^1(\Omega, \mathbb{S}^2) \to \mathbb{R}$ est continue pour la convergence faible sur $H^1(\Omega, \mathbb{S}^2)$ et pour la convergence forte sur $L^2(\Omega, \mathbb{S}^2)$*

*Preuve :* Soit $(m_n)$ qui converge vers $m$ au sens faible dans $H^1(\Omega, \mathbb{S}^2)$ ou au sens fort dans $L^2(\Omega, \mathbb{S}^2)$. Comme $\mathcal{E}_a(m_n)$ est bornée par $|\Omega| \|G\|_\infty$ il suffit de montrer que la seule valeur d'adhérence de $\mathcal{E}_a(m_n)$ est $\mathcal{E}_a(m)$. Pour montrer cela, on se donne une sous suite $(n_k)$ telle que $\mathcal{E}_a(m_{n_k})$ converge.

Si $m_n$ converge faiblement vers $m$ dans $H^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$, quitte à réextraire une sous suite de $n_k$ on peut supposer que la convergence est forte dans $L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$, puis en extrayant à nouveau une sous suite, qu'elle a lieu presque partout donc vers $m \in H^1(\Omega, \mathbb{S}^2)$, c'est la proposition 1. Comme $G$ est bornée et $\Omega$ aussi, on peut appliquer le théorème de convergence dominée pour conclure que $\mathcal{E}_a(m_{n_k})$ tend vers $\mathcal{E}_a(m)$. $\square$

## 1.5 Existence d'un minimum

Mathématiquement, on cherche donc les minimiseurs de la fonction

$$\mathcal{E} : m \in H^1(\Omega, \mathbb{S}^2) \mapsto \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla m|^2 - \int_\Omega h.m + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |h_d(m)|^2 + \int_\Omega G(m).$$

La difficulté (et l'intérêt) de ce problème réside dans le terme $h_d(m)$ puisqu'il est non local, et que l'on peut en avoir une expression analytique que pour des situations simples (aimantation uniforme dans un ellipsoïde ou un cylindre par exemple).

La première chose à faire est de s'assurer l'existence d'un minimum, c'est l'objet du théorème suivant :

**Théorème 1.** *$\mathcal{E}$ admet un minimum sur $H^1(\Omega, \mathbb{S}^2)$.*

*Preuve :* Notons tout d'abord que $\mathcal{E}$ est minorée sur $H^1(\Omega, \mathbb{S}^2)$ par $-|h||\Omega| - \|G\|_\infty |\Omega|$. On peut donc considérer une suite minimisante $(m_n)$ de $H^1(\Omega, \mathbb{S}^2)$, c'est-à-dire telle que $\mathcal{E}(m_n) \to \inf_{m \in H^1(\Omega, \mathbb{S}^2)} \mathcal{E}(m)$.

Montrons maintenant que l'on peut extraire une suite de $(m_n)$ qui converge convenablement vers un minimiseur $m$ : comme la suite $\mathcal{E}(m_n)$ converge elle est bornée, notons $M$ un majorant ; alors

$$\mathcal{E}_{\mathrm{ec}}(m_n) = \frac{1}{2} \|\nabla m_n\|^2_{L^2(\Omega, \mathcal{M}_3(\mathbb{R}))} \leq M + |h||\Omega| + \|G\|_\infty |\Omega| + \frac{1}{2} |\Omega|$$

(où l'on a utilisé le fait que $\|h_d(m_n)\|^2_{L^2(\Omega,\mathbb{R}^3)} \leq \|m_n\|^2_{L^2(\Omega,\mathbb{R}^3)} = |\Omega|$) ce qui montre que $(m_n)$ est bornée dans $H^1(\Omega,\mathbb{R}^3)$. D'après la proposition 1 quitte à en extraire une suite, on peut supposer que l'on a convergence faible dans $H^1(\Omega,\mathbb{R}^3)$, convergence forte dans $L^2(\Omega,\mathbb{R}^3)$ et convergence presque partout vers $m \in H^1(\Omega,\mathbb{S}^2)$. Les résultats de continuité et semi continuité sur $\mathcal{E}_{\mathrm{ec}}, \mathcal{E}_{\mathrm{z}}, \mathcal{E}_{\mathrm{d}}$ et $\mathcal{E}_{\mathrm{a}}$ (c'est-à-dire les propositions 2, 3, 5 et 6) permettent d'écrire que

$$\mathcal{E}(m) \leq \liminf_{n\to\infty} \mathcal{E}(m_n) = \inf_{m\in H^1(\Omega,\mathbb{S}^2)} \mathcal{E}(m),$$

ce qui prouve que

$$\mathcal{E}(m) = \inf_{m\in H^1(\Omega,\mathbb{S}^2)} \mathcal{E}(m),$$

ce qui achève la démonstration. □

## 1.6 Équation d'Euler-Lagrange

Le but est d'établir l'équation aux dérivées partielles que doit vérifier un minimiseur de $\mathcal{E}$. Comme on minimise $\mathcal{E}$ sous la contrainte $|m(x)| = 1$ pour presque tout $x$, on doit avoir formellement

$$\mathrm{d}\mathcal{E}(m) = \lambda m.$$

où $\lambda$ est une fonction qui joue le rôle de multiplicateur de Lagrange en tout point $x \in \Omega$. Plus précisément, on va prouver le théorème suivant :

**Théorème 2.** *Soit $m \in H^1(\Omega,\mathbb{S}^2)$ qui minimise localement ou globalement $\mathcal{E}$ sur $H^1(\Omega,\mathbb{S}^2)$. Alors $m$ est une solution faible dans $\mathcal{D}'(\Omega,\mathbb{R}^3)$ de l'équation suivante :*

$$-\Delta m - h - h_d(m) + \nabla G(m) = (|\nabla m|^2 - (h + h_d(m) - \nabla G(m)).m)m.$$

*Preuve :* Pour le prouver rigoureusement, on considère $\phi \in \mathcal{D}(\Omega,\mathbb{R}^3)$ et, pour $|\tau| < \frac{1}{\|\phi\|_\infty}$,

$$m_\tau(x) = \frac{m(x) + \tau\phi(x)}{|m(x) + \tau\phi(x)|}.$$

On a $m_\tau \in H^1(\Omega,\mathbb{S}^2)$ donc si $m$ est un minimum global (ou même local),

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\mathcal{E}(m_\tau)\right|_{\tau=0} = 0.$$

Plus précisément, il faut justifier que l'on peut dériver $\mathcal{E}(m_\tau)$. On voit que $\tau \mapsto m_\tau \in H^1(\Omega,\mathbb{R}^3)$ est dérivable et que

$$\frac{\mathrm{d}m_\tau}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\phi}{|m+\tau\phi|} - \frac{(\phi.m_\tau)m_\tau}{|m+\tau\phi|},$$

cela permet d'en déduire que

$$\left.\frac{\mathrm{d}m_\tau}{\mathrm{d}\tau}\right|_{\tau=0} = \phi - (\phi.m)m \ .$$

De plus on voit que pour $|\tau| \leq \frac{1}{2\|\phi\|_\infty}$, il existe $C_1$ et $C_2$ tels que

$$\left|\frac{\mathrm{d}m_\tau}{\mathrm{d}\tau}\right| \leq C_1|\phi|$$

et

$$\left|\nabla\left(\frac{\mathrm{d}m_\tau}{\mathrm{d}\tau}\right)\right| \leq C_2|\phi|(|\nabla\phi| + |\nabla m|),$$

ce qui permet de justifier les dérivations sous le signe $\int$ que l'on effectuera puisque $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3) \subset L^1(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3) \cap L^\infty(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3)$, $\nabla\phi \in \mathcal{D}(\Omega,\mathcal{M}_3(\mathbb{R})) \subset L^1(\Omega,\mathcal{M}_3(\mathbb{R}))$ et $\nabla m \in L^2(\Omega,\mathcal{M}_3(\mathbb{R})) \subset L^1(\Omega,\mathcal{M}_3(\mathbb{R}))$.

On calcule ensuite séparément chacun des termes de $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\mathcal{E}(m_\tau)\big|_{\tau=0}$ :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_{\mathrm{ec}}}{\mathrm{d}\tau}\right|_{\tau=0} = \int_\Omega \nabla m.\nabla\left(\left.\frac{\mathrm{d}m_\tau}{\mathrm{d}\tau}\right|_{\tau=0}\right).$$

Or comme $0 = \frac{1}{2}\Delta|m|^2 = \Delta m.m + |\nabla m|^2$ on peut écrire

$$\int_\Omega \nabla m.\nabla((\phi.m)m) = -\int_\Omega (\Delta m.m)(\phi.m) = \int_\Omega |\nabla m|^2(\phi.m).$$

On en déduit que

$$\left.\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_{\mathrm{ec}}}{\mathrm{d}\tau}\right|_{\tau=0} = \int_\Omega \nabla m.\nabla\phi - |\nabla m|^2(\phi.m).$$

Pour ce qui est de l'énergie Zeeman on a

$$\left.\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_{\mathrm{z}}}{\mathrm{d}\tau}\right|_{\tau=0} = -\int_\Omega h.\left(\left.\frac{\mathrm{d}m_\tau}{\mathrm{d}\tau}\right|_{\tau=0}\right) = -\int_\Omega h.(\phi - (\phi.m)m).$$

Pour ce qui est de l'énergie démagnétisante on remarque que pour $m$ et $n$ dans $H^1(\Omega,\mathbb{R}^3)$ en utilisant la formulation variationnelle définissant $h_d(m)$ avec $\phi_d(n)$ et vice versa, on obtient (en fait on montre ici que le projecteur orthogonal $-h_d$ est auto-adjoint)

$$\int_\Omega h_d(m).n = \int_\Omega m.h_d(n) = -\int_{\mathbb{R}^3} h_d(m).h_d(n),$$

ce qui permet d'écrire

$$\left.\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}\tau}\right|_{\tau=0} = -\frac{1}{2}\int_\Omega h_d(m).\left(\left.\frac{\partial m_\tau}{\partial\tau}\right|_{\tau=0}\right) - \frac{1}{2}\int_\Omega h_d\left(\left.\frac{\partial m_\tau}{\partial\tau}\right|_{\tau=0}\right).m = -\int_\Omega h_d(m).(\phi - (\phi.m)m) \ .$$

Et pour l'énergie d'anisotropie on obtient

$$\left.\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_{\mathrm{a}}}{\mathrm{d}\tau}\right|_{\tau=0} = \int_{\Omega} \nabla G(m).(\phi - (\phi.m)m).$$

En sommant ces différents termes on en déduit que

$$\int_{\Omega} \nabla m.\nabla\phi - (h + h_d(m) - \nabla G(m)).\phi = \int_{\Omega} (|\nabla m|^2 - (h + h_d(m) - \nabla G(m))(\phi.m),$$

ce qui est précisément le résultat annoncé. □

*Remarque :* En notant

$$h_{\mathrm{eff}} = \Delta m + h + h_d(m) - \nabla G(m),$$

on voit que $m$ est colinéaire à $h_{\mathrm{eff}}$ : on peut interpréter $h_{\mathrm{eff}}$ comme le champ magnétique local « ressenti » en un point de la particule. Ce champ $h_{\mathrm{eff}}$ intervient d'ailleurs dans l'équation de Landau Lifschitz qui régit la dynamique temporelle de l'aimantation.

C'est ici que l'on voit de manière crucial le caractère non local du champ $h_d(m)$ : le champ « ressenti » en un point ne dépend pas que de l'aimantation au voisinage de ce point.

# 2 Théorie de la Γ-convergence

L'excellent livre d'A. Braides [2] à propos de la Γ-convergence a servi de base à cette partie.

Les minima de l'application $\mathcal{E}$ sont très durs à calculer, et c'est pourquoi on s'intéresse en pratique à des cas limites où certains termes deviennent prépondérant par rapport aux autres, ce qui simplifie l'expression de $\mathcal{E}$.

Le problème est de pouvoir donner un sens à la convergence d'une suite de problèmes de minimisation vers un problème limite qui permette que les objets qui nous intéressent (les minimas, les valeurs extrémales) passent aussi à la limite. La théorie de la Γ-convergence est le bon cadre pour ce genre de problématique.

*Remarque :* Pour des raisons qui apparaîtront par la suite, on considérera des familles indexées par un indice $\lambda \in ]0, +\infty[$ et, sauf indication contraire « converger » signifie converger lorsque $\lambda \to 0$.

**Définition 6.** *Soit $(X, d)$ un espace métrique, $(f_\lambda)_{\lambda>0}$ une famille de fonctions de $X$ dans $[-\infty, +\infty]$ et $f$ une fonction de $X$ dans $[-\infty, +\infty]$. On dit que $(f_\lambda)_{\lambda>0}$ Γ-converge vers $f$ lorsque $\lambda \to 0$, noté $f_\lambda \xrightarrow{\Gamma} f$, si :*

– *Pour tout $x \in X$, pour toute famille $(x_\lambda)_{\lambda>0}$ qui converge vers $x$, on a*

$$\liminf_{\lambda \to 0} f_\lambda(x_\lambda) \geq f(x).$$

– *Pour tout $x \in X$, il existe une famille $(x_\lambda)_{\lambda>0}$ qui converge vers $x$ telle que*

$$\limsup_{\lambda \to 0} f_\lambda(x_\lambda) \leq f(x).$$

*Remarque :* à l'aide de la première inégalité, le deuxième point stipule que pour tout $x \in X$, il existe une famille $(x_\lambda)_{\lambda>0}$ qui converge vers $x$ telle que

$$\lim_{\lambda \to 0} f_\lambda(x_\lambda) = f(x).$$

Avant d'exploiter cette définition, énonçons une proposition qui simplifie les preuves pour montrer la $\Gamma$-convergence :

**Proposition 7.** *Soit $(X,d)$ un espace métrique, $g$ une fonction réelle continue sur $X$ et $(f_\lambda)_{\lambda>0}$ une famille qui $\Gamma$-converge vers $f$ lorsque $\lambda \to 0$.*
*Alors $(f_\lambda + g)_{\lambda>0}$ $\Gamma$-converge vers $f+g$ lorsque $\lambda \to 0$.*

*Preuve :* Il suffit de remarquer que si $(b_\lambda)_{\lambda>0}$ converge vers $b$ lorsque $\lambda \to 0$ alors pour toute famille réelle $(a_\lambda)_{\lambda>0}$, $\liminf_{\lambda\to 0}(a_\lambda + b_\lambda) = \liminf_{\lambda \to 0} a_\lambda + b$ et de même pour la $\limsup$. On prend ensuite $a_\lambda = f_\lambda(x_\lambda)$ et $b_\lambda = g(x_\lambda)$. $\square$

Remarquons que la $\Gamma$-convergence ne peut s'interpréter comme la limite pour une certaine topologie puisqu'une famille constante (c'est-à-dire $\forall \lambda > 0,\ f_\lambda = f$) ne $\Gamma$-converge pas nécessairement vers elle même (ce n'est pas le cas si $f$ n'est pas semi continue inférieurement) :

**Proposition 8.** *Soit $(X,d)$ un espace métrique, $(f_\lambda)_{\lambda>0}$ une famille de fonctions réelles de $X$ telles que $f_\lambda \xrightarrow{\Gamma} f$. Alors $f$ est semi continue inférieurement.*

*Preuve :* Soit $x \in X$, et $(x_\lambda)_{\lambda>0}$ une famille qui tend vers $x$. On veut montrer que $\liminf_{\lambda\to 0} f(x_\lambda) \geq f(x)$.

Pour tout $\lambda$, par $\Gamma$-convergence on peut trouver une famille $(x_\lambda^\mu)_{\mu>0}$ telle que $x_\lambda^\mu \to x_\lambda$ et $f_\mu(x_\lambda^\mu) \to f(x_\lambda)$. Pour $\varepsilon > 0$ fixé on peut donc trouver une famille $(\mu_\lambda)_{\lambda>0}$ qui tend vers 0 lorsque $\lambda \to 0$ telle que $x_\lambda^{\mu_\lambda} \to x$ et telle que pour tout $\lambda$, $f_{\mu_\lambda}(x_\lambda^{\mu_\lambda}) \leq f(x_\lambda) + \varepsilon$. En effet, pour $\lambda > 0$,

- $d(x_\lambda^\mu, x_\lambda) \leq d(x_\lambda, x)$ pour $\mu$ assez petit car $x_\lambda^\mu \to x_\lambda$, donc $d(x_\lambda^\mu, x) \leq 2d(x_\lambda, x)$ pour $\mu$ assez petit.
- $f_\mu(x_\lambda^\mu) \leq f(x_\lambda) + \varepsilon$ pour $\mu$ assez petit car $f_\mu(x_\lambda^\mu) \to f(x_\lambda)$.

Donc en sélectionnant pour chaque $\lambda$ un $\mu_\lambda$ qui vérifie les deux conditions précédentes et tel que $\mu_\lambda \leq \lambda$ on obtient bien une famille $(\mu_\lambda)_{\lambda>0}$ qui vérifie les conditions énoncées précédemment. On obtient alors (la première inégalité découlant de la $\Gamma$-convergence)

$$f(x) \leq \liminf_{\lambda\to 0} f_{\mu_\lambda}(x_\lambda^{\mu_\lambda}) \leq \liminf_{\lambda\to 0} f(x_\lambda) + \varepsilon,$$

et l'on obtient le résultat voulu en faisant tendre $\varepsilon$ vers 0. □

L'intérêt principal de la définition de la $\Gamma$-convergence repose sur le théorème suivant :

**Théorème 3.** *Soit $(X, d)$ un espace métrique et $(f_\lambda)_{\lambda>0}$ une famille de fonctions réelles sur $X$ telle que $f_\lambda \xrightarrow{\Gamma} f$. On suppose que pour tout $\lambda$, on connaît un minimiseur global $x_\lambda$ de $f_\lambda$. On suppose aussi que $(x_\lambda)_{\lambda>0}$ possède une valeur d'adhérence $x$.*

*Alors $x$ est un minimiseur global de $f$ et de plus*

$$\min_X f = \liminf_{\lambda\to 0} \left(\min_X f_\lambda\right).$$

*Preuve :* Soit $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une extraction telle que $x_{\lambda_k} \to x$. Si $y \in X$ alors on peut trouver une famille $(y_\lambda)_{\lambda>0}$ de $X$ qui converge vers $y$ et telle que $f_\lambda(y_\lambda)$ converge vers $f(y)$. On peut alors écrire, puisque $f_\lambda(y_\lambda) \geq f_\lambda(x_\lambda)$, que

$$f(y) = \lim_{k\to\infty} f_{\lambda_k}(y_{\lambda_k}) \geq \liminf_{k\to\infty} f_{\lambda_k}(x_{\lambda_k}) \geq f(x),$$

ce qui montre que $x$ est un minimum global de $f$.

Pour l'égalité des infimum, il suffit de prendre $y = x$ dans les inégalités précédentes qui se transforment alors en égalité pour obtenir

$$f(x) = \liminf_{\lambda\to 0} f_\lambda(x_\lambda),$$

ce qui permet d'obtenir le résultat souhaité. □

# 3 Modèle de Stoner Wohlfart

Cette partie s'inspire des mêmes références que la première partie, c'est-à-dire [3] et [1].

On s'intéresse à la limite des très petites particules. Intuitivement, l'énergie d'échange devient prédominante et les configurations d'énergie minimale sont celles où l'aimantation est constante. Pour donner un sens mathématique à cette approche heuristique, formalisons d'abord l'idée de prendre une très petite particule.

On se donne $\Omega$ fixé et pour $\lambda > 0$ on définit $\Omega_\lambda = \lambda\Omega$ : $\Omega_\lambda$ est une particule de taille $\lambda$, on considérera donc dans la suite $\lambda \to 0$.

Pour $m \in H^1(\Omega_\lambda, \mathbb{S}^2)$, on définit $\tilde{m} \in H^1(\Omega, \mathbb{S}^2)$ par

$$\tilde{m}(x) = m(\lambda x),$$

c'est-à-dire que l'on remet la configuration $m$ à l'échelle unité. Dans la suite, les aimantations avec $\tilde{}$ seront définies sur $\Omega$, tandis que celles sans $\tilde{}$ seront définies sur $\Omega_\lambda$.

L'énergie $\mathcal{E}_\lambda$ de la configuration $m$ s'écrit (l'indice $\lambda$ signifiant que l'énergie est définie sur $H^1(\Omega_\lambda, \mathbb{S}^2)$)

$$\mathcal{E}_\lambda(m) = \frac{1}{2}\int_{\Omega_\lambda} |\nabla m|^2 - \int_{\Omega_\lambda} h.m + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} |h_d(m)|^2 + \int_{\Omega_\lambda} G(m).$$

Pour se ramener sur $\Omega$, on effectue un changement de variables et on obtient

$$\mathcal{E}_\lambda(m) = \frac{1}{2}\frac{\lambda^3}{\lambda^2}\int_{\Omega} |\nabla \tilde{m}|^2 - \lambda^3 \int_{\Omega} h.\tilde{m} + \lambda^3\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} |h_d(\tilde{m})|^2 + \lambda^3\int_{\Omega} G(\tilde{m}).$$

Le terme non évident dans ce calcul étant l'énergie démagnétisante, mais l'on peut vérifier que $h_d(m)(x) = h_d(\tilde{m})(\frac{x}{\lambda})$ en utilisant par exemple l'unicité dans l'équation aux dérivées partielles définissant $h_d(m)$.

On définit alors l'énergie $\tilde{\mathcal{E}}_\lambda$ sur $H^1(\Omega, \mathbb{S}^2)$ par

$$\tilde{\mathcal{E}}_\lambda(\tilde{m}) = \frac{\mathcal{E}_\lambda(m)}{\lambda^3} = \frac{1}{2\lambda^2}\int_{\Omega} |\nabla \tilde{m}|^2 - \int_{\Omega} h.\tilde{m} + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} |h_d(\tilde{m})|^2 + \int_{\Omega} G(\tilde{m}).$$

On voit que lorsque $\lambda \to 0$, si l'aimantation n'est pas constante l'énergie d'échange devient infinie. On a donc envie de dire que dans la limite $\lambda \to 0$, l'énergie $\tilde{\mathcal{E}}_\lambda$ converge vers $\tilde{\mathcal{E}}$ (définie sur $H^1(\Omega, \mathbb{S}^2)$ où

$$\tilde{\mathcal{E}}(\tilde{m}) = \begin{cases} -\int_\Omega h.\tilde{m} + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} |h_d(\tilde{m})|^2 + \int_\Omega G(\tilde{m}) \text{ si } \tilde{m} \text{ est constant sur } \Omega \\ +\infty \text{ sinon} \end{cases}.$$

Pour rendre rigoureuses ces considérations, on va démontrer le théorème suivant

**Théorème 4.** $(\tilde{\mathcal{E}}_\lambda)_{\lambda>0}$ $\Gamma$-*converge vers* $\tilde{\mathcal{E}}$ *lorsque* $\lambda$ *tend vers* 0 *dans* $H^1(\Omega, \mathbb{S}^2)$.

*Preuve :* Comme $\mathcal{E}_{\mathrm{z}}$, $\mathcal{E}_{\mathrm{d}}$ et $\mathcal{E}_{\mathrm{a}}$ sont continues pour la convergence $H^1(\Omega, \mathbb{S}^2)$ forte (d'après les propositions 3, 5 et 6), il suffit, d'après la proposition 7 de montrer que

$$\frac{1}{2\lambda^2}\int_\Omega |\nabla \tilde{m}|^2 \xrightarrow{\Gamma} \begin{cases} 0 \text{ si } \tilde{m} \text{ est constant sur } \Omega \\ +\infty \text{ sinon} \end{cases}.$$

Soit $\tilde{m} \in H^1(\Omega, \mathbb{S}^2)$ qui n'admet pas de représentant constant, ce qui est équivalent à $\int_\Omega |\nabla \tilde{m}|^2 > 0$. Si on se donne une famille $(\tilde{m}_\lambda)_{\lambda>0}$ qui converge vers $\tilde{m}$ fortement dans

$H^1(\Omega, \mathbb{S}^2)$ lorsque $\lambda \to 0$, alors $\|\nabla \tilde{m}_\lambda\|_{L^2(\Omega,\mathcal{M}_3(\mathbb{R}))}$ converge vers $\|\nabla \tilde{m}\|_{L^2(\Omega,\mathcal{M}_3(\mathbb{R}))}$ donc est minoré par un réel strictement positif pour $\lambda$ assez petit, ce qui permet d'écrire

$$\liminf_{\lambda\to 0} \frac{1}{2\lambda^2}\int_\Omega |\nabla \tilde{m}|^2 = \limsup_{\lambda\to 0} \frac{1}{2\lambda^2}\int_\Omega |\nabla \tilde{m}|^2 = +\infty,$$

ce qui montre la $\Gamma$-convergence en $\tilde{m}$.

Si $\tilde{m} \in H^1(\Omega, \mathbb{S}^2)$ admet un représentant constant sur $\Omega$, alors il est évident que pour tout famille $(\tilde{m}_\lambda)_{\lambda>0}$ qui tend vers $\tilde{m}$ (c'est même vrai pour une famille quelconque),

$$\liminf_{\lambda\to 0} \frac{1}{2\lambda^2}\int_\Omega |\nabla \tilde{m}|^2 \geq 0,$$

et en prenant la famille telle que $\tilde{m}_\lambda = \tilde{m}$ pour tout $\lambda$,

$$\lim_{\lambda\to 0} \frac{1}{2\lambda^2}\int_\Omega |\nabla \tilde{m}|^2 = 0,$$

ce qui achève de montrer la $\Gamma$-convergence en $\tilde{m}$. $\square$

Le théorème 3 assure que lorsque $\lambda \to 0$ les valeurs d'adhérence (pour la convergence forte $H^1(\Omega, \mathbb{S}^2)$) des suites de minimiseurs de $\tilde{\mathcal{E}}_\lambda$ sont des minimiseurs de $\tilde{\mathcal{E}}$. Dans ce cas précis on a même mieux puisque l'on peut assurer a priori l'extraction de sous suites :

**Proposition 9.** *Soit $(\tilde{m}_\lambda)_{\lambda>0}$ une famille de minimiseurs de $\tilde{\mathcal{E}}_\lambda$. Alors on peut extraire une sous-suite qui converge fortement dans $H^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ vers $\tilde{m} \in H^1(\Omega, \mathbb{S}^2)$ lorsque $\lambda \to 0$. De plus, $\tilde{m}$ est un minimiseur de $\tilde{\mathcal{E}}$.*

*Preuve :* Soit $\tilde{n} \in H^1(\Omega, \mathbb{S}^2)$ constant. Alors $\tilde{\mathcal{E}}_\lambda(\tilde{m}_\lambda) \leq \tilde{\mathcal{E}}(\tilde{n})$ uniformément en $\lambda$. En effet par minimalité de $\tilde{m}_\lambda$ on sait que $\tilde{\mathcal{E}}_\lambda(\tilde{m}_\lambda) \leq \tilde{\mathcal{E}}_\lambda(\tilde{n}) = \tilde{\mathcal{E}}(\tilde{n})$. Donc $\|\nabla \tilde{m}_\lambda\|_{L^2(\Omega,\mathcal{M}_3(\mathbb{R}))} = O(\lambda)$ (c'est la même majoration que pour la preuve du théorème 1), donc $\tilde{m}_\lambda$ est bornée dans $H^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$.

D'après la proposition 1 on peut extraire une sous-suite $(\lambda_n)$ qui converge faiblement dans $H^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$, fortement dans $L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$ et presque partout vers $\tilde{m} \in H^1(\Omega, \mathbb{S}^2)$. Comme $\|\nabla \tilde{m}_\lambda\|_{L^2(\Omega,\mathcal{M}_3(\mathbb{R}))} = O(\lambda)$, la convergence est donc forte dans $H^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$. Le théorème 3 permet alors d'écrire que $\tilde{m}$ est un minimiseur global de $\tilde{\mathcal{E}}$, et donc en particulier est constant. $\square$

*Remarque :* On s'est ramené à un problème de minimisation sur $\mathbb{S}^2$. De plus dans l'expression de $\tilde{\mathcal{E}}$, le terme $\mathcal{E}_\mathrm{d}$ est simplement une forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$ (a priori c'est une forme quadratique sur $L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$ mais on se restreint aux fonctions constantes) donc il existe une matrice $D$ symétrique positive telle que pour tout aimantation $m$ constante, $\mathcal{E}_d(m) = \langle Dm, m\rangle$. L'expression précise de $D$ dépend de la forme de $\Omega$. Cela permet de simplifier l'expression de $\tilde{\mathcal{E}}(m)$ lorsque $m \in H^1(\Omega, \mathbb{S}^2)$ est constant en

$$\tilde{\mathcal{E}}(m) = |\Omega|\,(-h.m + G(m)) + \langle Dm, m\rangle.$$

# 4 Limites des films ultra-minces

Cette partie s'inspire très fortement de l'article de G. Gioia et R. James [4].

Donnons un autre exemple de cas limite avec les films ultra-minces. On se donne un ouvert régulier et borné $\omega$ de $\mathbb{R}^2$, et pour $\lambda > 0$ on note

$$\Omega_\lambda = \omega \times ]0, \lambda[$$

qui représente un film d'épaisseur $\lambda$ et de section $\omega$. La limite $\lambda \to 0$ correspondra donc au cas d'un film ultra-mince.

Détaillons un peu les notations utilisées : si $u \in \mathbb{R}^3$, on notera $u_1, u_2$ et $u_3$ les composantes de $u$. De même $\partial_i$ désignera la dérivée par rapport à la $i$-ième variable, et $e_i$ désignera le $i$-ième vecteur de la base canonique.

Pour un champ de vecteur $m \in H^1(\Omega_\lambda, \mathbb{R}^3)$, on note

$$\tilde{m}(x_1, x_2, x_3) = m(x_1, x_2, \lambda x_3),$$

et l'on a donc $\tilde{m} \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ où l'on a noté $\Omega = \Omega_1$. De même que pour le modèle de Stoner Wohlfart, dans la suite, les aimantations avec un $\tilde{}$ seront définies sur $\Omega$, tandis que celles sans $\tilde{}$ seront définies sur $\Omega_\lambda$.

L'énergie $\mathcal{E}_\lambda$ (l'indice $\lambda$ signifiant que l'énergie est définie sur $\Omega_\lambda$) s'écrit

$$\mathcal{E}_\lambda(m) = \frac{1}{2}\int_{\Omega_\lambda} |\nabla m|^2 - \int_{\Omega_\lambda} h.m + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} |h_d(m)|^2 + \int_{\Omega_\lambda} G(m),$$

en effectuant un changement de variables pour se ramener sur $\Omega$ on obtient

$$\frac{\mathcal{E}_\lambda(m)}{\lambda} = \frac{1}{2}\int_\Omega \left( |\partial_1 \tilde{m}|^2 + |\partial_2 \tilde{m}|^2 + \frac{|\partial_3 \tilde{m}|^2}{\lambda^2} \right) - \int_\Omega h.\tilde{m} + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} |\tilde{h}_d^\lambda(\tilde{m})|^2 + \int_\Omega G(\tilde{m}),$$

où l'on a besoin de préciser le sens de $\tilde{h}_d^\lambda(\tilde{m})$ : comme $\tilde{m}$ est défini sur $\Omega$, $\tilde{m}\left(x_1, x_2, \frac{x_3}{\lambda}\right) = m(x_1, x_2, x_3)$ est défini sur $\Omega_\lambda$, et on définit $\tilde{h}_d^\lambda(\tilde{m})(x_1, x_2, x_3) = h_d(m)(x_1, x_2, \lambda x_3)$, c'est l'opérateur qui à une aimantation associe son champ démagnétisant remis à l'échelle sur $\Omega$. Ainsi, $\tilde{h}_d^\lambda$ est défini de $L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$ dans $L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$.

On définit donc

$$\tilde{\mathcal{E}}_\lambda(\tilde{m}) = \frac{\mathcal{E}_\lambda(m)}{\lambda} = \frac{1}{2}\int_\Omega \left( |\partial_1 \tilde{m}|^2 + |\partial_2 \tilde{m}|^2 + \frac{|\partial_3 \tilde{m}|^2}{\lambda^2} \right) - \int_\Omega h.\tilde{m} + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} |\tilde{h}_d^\lambda(\tilde{m})|^2 + \int_\Omega G(\tilde{m}).$$

Comme dans le cas du modèle de Stoner Wohlfart le terme en $\frac{1}{2\lambda^2}\int_\Omega |\partial_3 \tilde{m}|^2$ assure que $\tilde{m}$ aura une énergie finie à la limite uniquement si il est indépendant de $x_3$. On notera $H_c^1(\Omega, \mathbb{S}^2)$ l'ensemble des fonctions de $H^1(\Omega, \mathbb{S}^2)$ qui ne dépendent pas de $x_3$.

Le seul terme dont le comportement asymptotique est non évident est alors l'énergie démagnétisante. En fait on va montrer que cette limite vaut $\frac{1}{2}\int_\Omega (\tilde{m}_3)^2$. Plus précisément on va montrer le résultat suivant :

**Proposition 10.** *Soit* $(\tilde{m}_\lambda)_{\lambda>0} \in H^1(\Omega, \mathbb{S}^2)$ *qui converge fortement dans* $H^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ *vers* $\tilde{m} \in H^1(\Omega, \mathbb{S}^2)$ *lorsque* $\lambda \to 0$.

*Alors lorsque* $\lambda \to 0$, $\left(\tilde{h}_d^\lambda(\tilde{m}_\lambda)\right)_{\lambda>0}$ *converge faiblement dans* $L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ *vers* $\tilde{h}_d^0 = -\tilde{m}_3 1_\Omega e_3$ *et* $\left(\int_{\mathbb{R}^3} |\tilde{h}_d^\lambda(\tilde{m})|^2\right)_{\lambda>0}$ *converge vers*

$$\int_\Omega (\tilde{m}_3)^2.$$

*Remarque :* ici $\tilde{m}_3 : \Omega \to \mathbb{R}$ désigne la troisième composante de $\tilde{m}$ et non $\tilde{m}_\lambda$ pour $\lambda = 3$.

*Preuve :* On va d'abord montrer que l'on peut extraire un sous suite qui converge faiblement dans $L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ vers $-\tilde{m}_3 1_\Omega e_3$. Comme la limite ne dépendra pas de la sous suite, on pourra conclure à une convergence faible lorsque $\lambda \to 0$. La convergence de l'énergie démagnétisante s'en déduira aisément.

On notera dans la suite $m_\lambda(x_1, x_2, x_3) = \tilde{m}_\lambda\left(x_1, x_2, \frac{x_3}{\lambda}\right)$, on a par définition de $\tilde{h}_d^\lambda$,

$$\tilde{h}_d^\lambda(\tilde{m}_\lambda)(x_1, x_2, x_3) = h_d(m_\lambda)(x_1, x_2, \lambda x_3).$$

Or d'après la propriété 5,

$$\|h_d(m_\lambda)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3)} \leq \|m_\lambda\|^2_{L^2(\Omega_\lambda,\mathbb{R}^3)} = |\Omega_\lambda| = \lambda|\omega|,$$

d'où en effectuant un changement de variables on trouve

$$\|\tilde{h}_d^\lambda(\tilde{m}_\lambda)\|_{L^2(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3)} \leq \sqrt{|\omega|}.$$

Cette majoration, indépendante de $\lambda$ permet de montrer que l'on peut supposer convergence faible dans $L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ à extraction près vers $\tilde{h}_d^0 \in L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$.

Caractérisons la limite : en effectuant un changement de variables dans l'équation $\operatorname{div}(h_d(m_\lambda) + 1_{\Omega_\lambda} m_\lambda) = 0$ on peut voir que $\tilde{h}_d^\lambda(\tilde{m}_\lambda)$ satisfait

$$\partial_1\left(\tilde{h}_d^\lambda(\tilde{m}_\lambda)\right)_1 + \partial_2\left(\tilde{h}_d^\lambda(\tilde{m}_\lambda)\right)_2 + \frac{1}{\lambda}\partial_3\left(\tilde{h}_d^\lambda(\tilde{m}_\lambda)\right)_3 + \partial_1\left(\tilde{m}_\lambda 1_\Omega\right)_1 + \partial_2\left(\tilde{m}_\lambda 1_\Omega\right)_2 + \frac{1}{\lambda}\partial_3\left(\tilde{m}_\lambda 1_\Omega\right)_3 = 0$$

Comme $\tilde{m}_\lambda$ converge fortement dans $H^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ donc est borné dans $L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$ et que $\left(\tilde{h}_d^\lambda(\tilde{m}_\lambda)\right)_{\lambda>0}$ converge faiblement dans $L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ donc est borné dans $L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$,

$$\lambda\left(\partial_1\left(\tilde{h}_d^\lambda(\tilde{m}_\lambda)\right)_1 + \partial_2\left(\tilde{h}_d^\lambda(\tilde{m}_\lambda)\right)_2 + \partial_1\left(\tilde{m}_\lambda 1_\Omega\right)_1 + \partial_2\left(\tilde{m}_\lambda 1_\Omega\right)_2\right)$$

converge vers 0 au sens des distributions lorsque $\lambda \to 0$. Donc en multipliant par $\lambda$ puis en prenant la limite $\lambda \to 0$, puisque la convergence faible implique la convergence au sens des distributions,

$$\partial_3\left(\left(\tilde{h}_d^0\right)_3 + \tilde{m}_3 1_\Omega\right) = 0$$

au sens des distributions, or la seule fonction de $L^2(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$ dont la dérivée selon la troisième composante est nulle au sens des distributions est la fonction nulle, c'est-à-dire que l'on a

$$\left(\tilde{h}_d^0\right)_3 = -\tilde{m}_3 1_\Omega.$$

On sait aussi que $h_d(m_\lambda)$ satisfait $\operatorname{rot} h_d(m_\lambda) = 0$, qui s'écrit ici après un changement de variables

$$\begin{cases} \partial_1 \left(\tilde{h}_d^\lambda(\tilde{m}_\lambda)\right)_2 = \partial_2 \left(\tilde{h}_d^\lambda(\tilde{m}_\lambda)\right)_1 \\ \frac{1}{\lambda}\partial_3 \left(\tilde{h}_d^\lambda(\tilde{m}_\lambda)\right)_1 = \partial_1 \left(\tilde{h}_d^\lambda(\tilde{m}_\lambda)\right)_3 \\ \frac{1}{\lambda}\partial_3 \left(\tilde{h}_d^\lambda(\tilde{m}_\lambda)\right)_2 = \partial_2 \left(\tilde{h}_d^\lambda(\tilde{m}_\lambda)\right)_3 \end{cases}.$$

De même que précédemment, en multipliant par $\lambda$ puis en prenant la limite $\lambda \to 0$ dans la deuxième et la troisième équation au sens des distributions, on obtient que $\partial_3 \left(\tilde{h}_d^0(\tilde{m}_\lambda)\right)_1$ et $\partial_3 \left(\tilde{h}_d^0(\tilde{m}_\lambda)\right)_2$ convergent vers 0 au sens des distributions. Comme de plus $\left(\tilde{h}_d^0(\tilde{m}_\lambda)\right)_1$ et $\left(\tilde{h}_d^0(\tilde{m}_\lambda)\right)_2$ appartiennent à $L^2(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$ elles sont nulles.

On vient donc de montrer que nécessairement

$$\tilde{h}_d^0 = -\tilde{m}_3 1_\Omega e_3.$$

La limite ne dépendant pas de la sous suite, on en déduit que $\tilde{h}_d^\lambda(\tilde{m}_\lambda)$ converge faiblement dans $L^2(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3)$ vers $\tilde{h}_d^0 = -\tilde{m}_3 1_\Omega e_3$. Utilisons maintenant l'identité

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\tilde{h}_d^\lambda(\tilde{m}_\lambda)|^2 = -\int_\Omega \tilde{h}_d^\lambda(\tilde{m}_\lambda).\tilde{m}_\lambda$$

pour écrire que

$$\left| \int_{\mathbb{R}^3} |\tilde{h}_d^\lambda(\tilde{m})|^2 - \int_\Omega (\tilde{m}_3)^2 \right| \leq \left| \int_\Omega \tilde{h}_d^\lambda(\tilde{m}).\left(\tilde{m}_\lambda - \tilde{m}\right) \right| + \left| \int_\Omega \tilde{m}.\left(\tilde{h}_d^\lambda(\tilde{m}) + \tilde{m}_3 e_3\right) \right|.$$

Montrons que le membre de droite tend vers 0 : pour la première intégrale on applique Cauchy-Schwarz puis on utilise que $\tilde{h}_d^\lambda(\tilde{m})$ est borné dans $L^2(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3)$ et que $\tilde{m}_\lambda$ tend fortement vers $\tilde{m}$ pour montrer qu'elle tend vers 0 lorsque $\lambda \to 0$. La convergence vers 0 de la deuxième intégrale lorsque $\lambda \to 0$ découle simplement de la convergence faible de $\tilde{h}_d^\lambda(\tilde{m})$ vers $-\tilde{m}_3 1_\Omega e_3$ dans $L^2(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3)$, ce qui achève la démonstration. □

Á l'aide de ce résultat on peut en déduire la $\Gamma$-limite de $\tilde{\mathcal{E}}$. En effet si on note

$$\tilde{\mathcal{E}}(\tilde{m}) = \begin{cases} \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla \tilde{m}|^2 - \int_\Omega h.\tilde{m} + \int_\Omega \left(G(\tilde{m}) + \frac{1}{2}(\tilde{m}_3)^2\right) & \text{si } \tilde{m} \in H_c^1(\Omega,\mathbb{S}^2) \\ +\infty \quad \text{sinon} \end{cases},$$

alors on peut énoncer le résultat suivant :

**Théorème 5.** $\left(\tilde{\mathcal{E}}_\lambda\right)_{\lambda>0}$ *$\Gamma$-converge vers $\tilde{\mathcal{E}}$ lorsque $\lambda$ tend vers 0 dans $H^1(\Omega,\mathbb{S}^2)$.*

*Preuve :* Comme dans le cas du théorème 4, les propositions 2, 3 et 6 associées à la proposition 7 évitent de considérer de l'énergie d'échange planaire (c'est-à-dire le terme $\tilde{m} \mapsto \frac{1}{2}\|\partial_1\tilde{m}\|^2_{L^2(\Omega,\mathbb{R}^3)} + \frac{1}{2}\|\partial_2\tilde{m}\|^2_{L^2(\Omega,\mathbb{R}^3)}$) et de l'énergie Zeeman ainsi que l'énergie d'anisotropie.

Il suffit donc de prouver que

$$\frac{1}{2\lambda^2}\int_\Omega |\partial_3\tilde{m}|^2 + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} |\tilde{h}_d^\lambda(\tilde{m}_\lambda)|^2 \xrightarrow{\Gamma} \begin{cases} \frac{1}{2}\int_\Omega (m_3)^2 \text{ si } \tilde{m} \in H_c^1(\Omega,\mathbb{S}^2) \\ +\infty \text{ sinon} \end{cases} .$$

Pour cela, si $\tilde{m} \notin H_c^1(\Omega,\mathbb{S}^2)$, alors pour toute famille $(\tilde{m}_\lambda)_{\lambda>0}$ qui converge vers $\tilde{m}$, de même que dans la preuve du théorème 4, on voit que $\frac{1}{2\lambda^2}\int_\Omega |\partial_3\tilde{m}|^2 \to +\infty$ lorsque $\lambda \to 0$ donc

$$\liminf_{\lambda\to 0} \frac{1}{2\lambda^2}\int_\Omega |\partial_3\tilde{m}|^2 + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} |\tilde{h}_d^\lambda(\tilde{m}_\lambda)|^2 = \limsup_{\lambda\to 0} \frac{1}{2\lambda^2}\int_\Omega |\partial_3\tilde{m}|^2 + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} |\tilde{h}_d^\lambda(\tilde{m}_\lambda)|^2 = +\infty.$$

Si $\tilde{m} \in H_c^1(\Omega,\mathbb{S}^2)$, alors pour toute famille $(\tilde{m}_\lambda)_{\lambda>0}$ qui converge vers $\tilde{m}$, d'après la proposition 10 l'énergie démagnétisante converge vers $\frac{1}{2}\int_\Omega (m_3)^2$ et l'énergie d'échange est positive donc

$$\liminf_{\lambda\to 0} \frac{1}{2\lambda^2}\int_\Omega |\partial_3\tilde{m}|^2 + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} |\tilde{h}_d^\lambda(\tilde{m}_\lambda)|^2 \geq \frac{1}{2}\int_\Omega (m_3)^2.$$

De plus en prenant $\tilde{m}_\lambda = \tilde{m}$ pour tout $\lambda$, on obtient, toujours grâce à la proposition 10,

$$\lim_{\lambda\to 0} \frac{1}{2\lambda^2}\int_\Omega |\partial_3\tilde{m}|^2 + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} |\tilde{h}_d^\lambda(\tilde{m}_\lambda)|^2 = \frac{1}{2}\int_\Omega (m_3)^2$$

ce qui achève la démonstration. □

Commentons un peu le problème limite obtenu :

Remarquons d'abord que l'on s'est ramené à un problème plan, en effet si $\tilde{m} \in H_c^1(\Omega,\mathbb{S}^2)$ alors pour presque tout $x_3 \in ]0,1[$, $(\tilde{m}^p : x \in \omega \mapsto \tilde{m}(x,x_3)) \in H^1(\omega,\mathbb{S}^2)$, l'énergie peut donc s'exprimer par

$$\tilde{\mathcal{E}}(\tilde{m}) = \frac{1}{2}\int_\omega |\nabla\tilde{m}^p|^2 - \int_\omega h.\tilde{m}^p + \int_\omega \left(G(\tilde{m}^p) + \frac{1}{2}(\tilde{m}_3^p)^2\right).$$

De plus l'énergie démagnétisante a perdu son caractère non local, tout se passe comme si on avait une énergie d'anisotropie caractérisée par un fonction

$$G_{\text{eff}}(\tilde{m}) = G(\tilde{m}) + \frac{1}{2}(\tilde{m}_3)^2$$

qui pénalise les configurations où l'aimantation sort du plan. L'équation d'Euler Lagrange vérifiée par $m$ est alors

$$-\Delta\tilde{m} - h + \nabla G(\tilde{m}) + \tilde{m}_3 e_3 = (|\nabla\tilde{m}|^2 - (h - \nabla G(\tilde{m})).\tilde{m} + (\tilde{m}_3)^2)\tilde{m}.$$

Pour l'obtenir il suffit d'utiliser le théorème 2 en utilisant $G_{\text{eff}}$ au lieu de $G$. Cette équation est simplifiée puisqu'il s'agit maintenant d'une simple équation aux dérivées partielles.

# Références


[1] F. Alouges. Introduction à la théorie du mircomagnétisme, juin 2009. `http://www.cmap.polytechnique.fr/ alouges/coursm2/book.pdf`, consulté le 19/03/2013.

[2] Braides Andrea. *Gamma-convergence for Beginners (Oxford Lecture Series in Mathematics and Its Applications, 22).* Oxford University Press, USA.

[3] Antonio Desimone. Hysteresis and imperfection sensitivity in small ferromagnetic particles. *Meccanica*, 30(5) :591–603, 1995.

[4] Gustavo Gioia and Richard D. James. Micromagnetics of very thin films. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 453(1956) :213–223, 1997.

[5] Isaak D. Mayergoyz. *The Science of Hysteresis*, volume 2, chapter 4 - Recent Analytical Developments in Micromagnetics, pages 269 – 381. Academic Press, Oxford, 2006.