

Représentations d'algèbres de Hecke

Claire RENARD et Peng SHAN.

Sujet proposé par : M. ROSSO.

juin 2006

Introduction

Trouver un système complet de représentations irréductibles d'un groupe ou d'une algèbre est un problème non trivial. On sait bien le faire dans le cas du groupe symétrique, à l'aide des tableaux de Young.

Le but de ce mémoire sera de comprendre comment on peut construire des représentations seminormales des algèbres semi-simples que sont les algèbres de Hecke. Nous traiterons le cas des algèbres de Hecke de type A_{n-1} et de type B_n uniquement.

Nous nous servirons d'une technique consistant à décomposer les représentations seminormales d'une chaîne de groupes en "algèbres de chemins" à l'aide d'un graphe. Cette technique a été employée par H. Wenzl et reprise par Arun Ram. Nous nous intéresserons particulièrement aux résultats exposés par ce dernier dans son article [8].

Après quelques rappels de résultats classiques de la théorie des représentations, nous introduirons l'outil fondamental pour les sections 3 et 4 qu'est la construction des algèbres de chemins. Dans un deuxième temps, nous nous intéresserons aux définitions et à quelques propriétés utiles par la suite d'un système de racines, de son groupe de Weyl et de l'algèbre de Hecke associée. Nous nous arrêterons plus longuement sur la structure de l'algèbre de Hecke de type A_{n-1} , dans le but de trouver un isomorphisme permettant de passer des rangs n et $n - 1$ au rang $n + 1$. Enfin, nous nous servirons de ces résultats pour trouver des représentations seminormales des algèbres de Hecke de type A_{n-1} , puis de type B_n .

On admettra les règles de restriction des représentations irréductibles correspondant à la chaîne des groupes $\mathfrak{S}_1 \subseteq \dots \subseteq \mathfrak{S}_n$ pour A_{n-1} , et à la chaîne $WB_0 \subseteq \dots \subseteq WB_n$ pour B_n . On admettra aussi quelques isomorphismes donnés par la théorie classique des représentations de groupes et d'algèbres de Hecke.

Nous tenons à remercier chaleureusement M. Rosso, notre encadrant, pour sa disponibilité et sa grande gentillesse.

Table des matières

Introduction	1
1 Un peu de théorie des représentations	3
1.1 Caractère d'une représentation	3
1.2 Rappels sur les représentations de \mathfrak{S}_n et tableaux de Young	6
1.3 Représentations seminormales	7
2 Définitions et premières propriétés	13
2.1 Systèmes de racines et groupes de Weyl	13
2.2 Définition générale de l'algèbre de Hecke d'un groupe de Weyl W	15
2.3 Algèbres de Hecke de type A_{n-1}	16
2.4 Algèbres de Hecke de type B_n	20
3 Représentation des algèbres de Hecke de type A_{n-1}	21
3.1 Le système de racines A_{n-1} et son groupe de Weyl	21
3.2 Représentation seminormale du groupe de Weyl \mathfrak{S}_n	21
3.3 Représentation seminormale de l'algèbre de Hecke $HA_{n-1}(q^2)$	27
4 Représentation des algèbres de Hecke de type B_n	31
4.1 Le système de racines B_n et son groupe de Weyl	31
4.2 Représentation seminormale du groupe de Weyl WB_n	31
4.3 Représentation seminormale de l'algèbre de Hecke $HB_n(p^2, q^2)$	36
Appendice	40
Références	44

1 Un peu de théorie des représentations

1.1 Caractère d'une représentation

Soit T une représentation de dimension finie d'un groupe G (ou d'une algèbre A) sur un espace vectoriel V . Cela revient à se donner un morphisme de groupes (ou d'algèbres) entre G (ou A) et les endomorphismes de V . À $g \in G$, on fait donc correspondre une matrice carrée $T(g)$.

Définition 1.1. On définit le **caractère** de T , représentation de dimension finie du groupe G , par :

$$\chi_T(g) = \chi(g) = \text{Tr}(T(g))$$

où Tr est la trace. La définition du caractère est la même dans le cas d'une algèbre A .

On rappelle que si V et W sont des espaces vectoriels de dimension finie, alors on a :

$$\text{Hom}(V, W) \simeq V^* \otimes W$$

où V^* est le dual de V . Étant données des représentations d'un groupe G sur V et sur W (on dit aussi par abus que V et W sont des représentations de G), cherchons à munir l'espace vectoriel $\text{Hom}(V, W)$ d'une structure de représentation de G .

Si V est une représentation de G , alors V^* est aussi une représentation de G : si

$$\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$$

est la représentation de G dans V , alors si on veut que la représentation associée ρ^* de V^* et ρ respectent le crochet de dualité, i.e. que si pour tous $g \in G$, $v \in V$ et $v^* \in V^*$ on ait

$$\langle \rho^*(g)v^*, \rho(g)v \rangle = \langle v^*, v \rangle$$

alors un calcul montre que pour tout $g \in G$,

$$\rho^*(g) = {}^t\rho(g^{-1})$$

Comme on définit également de manière naturelle la représentation de $V \otimes W$ par $g.(v \otimes w) = (g.v) \otimes (g.w)$, on obtient également une représentation de $\text{Hom}(V, W) \simeq V^* \otimes W$. Explicitement, si $\phi \in \text{Hom}(V, W)$, alors pour tous $g \in G$ et $v \in V$, on a $(g.\phi)(v) = g.\phi(g^{-1}.v)$.

Notons $\text{Hom}_G(V, W) = \text{Hom}(V, W)^G$ l'espace des opérateurs d'entrelacement entre V et W , c'est à dire le sous-espace de $\text{Hom}(V, W)$ des morphismes qui commutent avec les actions des éléments de G . C'est aussi l'espace des morphismes de V dans W fixes par l'action de G : si pour tous $g \in G$ et $v \in V$, on a $g.\phi(v) = \phi(g.v)$, alors $(g.\phi)(v) = g.\phi(g^{-1}.v) = \phi(v)$.

Définition 1.2. Soit G un groupe fini, H un sous-groupe de G . Supposons qu'il existe une représentation ρ de H dans un espace vectoriel V . Alors ρ' la **représentation induite de G par celle de H** , notée $V \uparrow_H^G = V'$, se déduit de ρ de la façon suivante :

(1) V' est l'espace vectoriel des fonctions $f : G \rightarrow V$ telles que $\forall h \in H, g \in G, f(hg) = \rho(h)f(g)$.

(2) pour tous $g_0, g \in G, (\rho'(g_0)f)(g) = f(gg_0)$.

Montrons que ρ' est bien une représentation.

Si $f \in V'$ et $g_0 \in G$, montrons que $\rho'(g_0)f \in V'$. En effet, si $\varphi = \rho'(g_0)f : g \mapsto f(gg_0)$, alors pour tous $h \in H, g \in G, \varphi(hg) = f(hgg_0) = \rho(h)f(gg_0) = \rho(h)\varphi(g)$. Donc $\rho'(g_0)f \in V'$.

Alors $\rho'(g_0) \in \mathcal{L}(V')$ de façon évidente pour tout $g_0 \in G$, et $\rho'(e) = \text{Id}$ où e est l'élément neutre de G .

L'application $\rho' : G \rightarrow \mathcal{GL}(V')$ est un morphisme de groupes. En effet, si $g_0, g_1 \in G$ et $f \in V'$,

$$(\rho'(g_0g_1)f)(g) = f(gg_0g_1) = (\rho'(g_1)f)(gg_0) = \rho'(g_0)\rho'(g_1)f(g)$$

donc $\rho'(g_0g_1) = \rho'(g_0)\rho'(g_1)$.

□

Le caractère χ d'une représentation vérifie les propriétés suivantes :

Proposition 1.1.1. *Soient S et T des représentations de dimension finie d'un groupe G . Alors,*

1. *Le caractère χ_T est constant sur chaque classe de conjugaison de G .*
2. $\chi_{V \oplus W} = \chi_V + \chi_W$
3. $\chi_{V \otimes W} = \chi_V \cdot \chi_W$
4. $\chi_{V^*} = \bar{\chi}_V$
5. *Si T et S sont équivalentes, alors $\chi_T = \chi_S$. La réciproque est vraie si G est fini.*
6. *Le caractère χ d'une représentation induite $V \uparrow_H^G = V'$ se déduit du caractère ψ de la représentation V de H par :*

$$\chi(w) = \sum_{g_i w g_i^{-1} \in H} \psi(g_i w g_i^{-1})$$

pour tout $w \in G$, où la somme porte sur des représentants g_i quelconques de chaque classe de conjugaison de $H \setminus G$.

Preuve :

(1) : Si $g = ag'a^{-1}$, alors

$$\chi(g) = \text{Tr}(T(ag'a^{-1})) = \text{Tr}(T(a)T(g')T(a^{-1})) = \text{Tr}(T(g')) = \chi_T(g')$$

(2) à (4) découlent de propriétés bien connues de la trace.

(5) : Si T et S sont équivalentes, alors dans des bases adaptées leurs matrices coïncident, donc a fortiori leurs traces, ce qui démontre le sens direct.

Pour la réciproque, si V est une représentation de G , notons :

$$V^G = \{v \in V \text{ tq } g.v = v \quad \forall g \in G\}$$

Comme G est fini, on peut définir $P = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \in \text{Hom}_G(V, V)$ puisque $gPg^{-1} = P \quad \forall g \in G$. Montrons que P est un projecteur de V sur V^G . En effet, $P^2 = P$ de façon évidente.

De plus, pour tous $h \in G$ et $v \in v$, on a :

$$h.Pv = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} hg.v = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g.v = Pv$$

donc $\text{Im } P \subseteq V^G$.

D'autre part, pour tout $v \in V^G$, $Pv = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} v = v$ donc $V^G \subseteq \text{Im } P$, d'où le résultat.

On en déduit :

$$\dim V^G = \text{Tr}(P) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g) \tag{1}$$

Appliquons ce résultat à la représentation $\text{Hom}(V, W)$ définie plus haut. On voit que $\text{Hom}(V, W)^G = \text{Hom}_G(V, W)$, les opérateurs d'entrelacement. Si V est irréductible, d'après le lemme de Schur, $\dim \text{Hom}_G(V, W)$ est la multiplicité de V dans W . De même, si W est irréductible, $\dim \text{Hom}_G(V, W)$ est la multiplicité de W dans V . Ainsi, si V et W sont toutes deux irréductibles, alors

$$\dim \text{Hom}_G(V, W) = \begin{cases} 1 & \text{si } V \simeq W, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En appliquant la formule (1), on a donc, comme $\chi_{\text{Hom}(V, W)} = \bar{\chi}_V \cdot \chi_W$,

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \bar{\chi}_V(g) \cdot \chi_W(g) = \begin{cases} 1 & \text{si } V \simeq W, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{2}$$

Pour comprendre cette formule, définissons un produit scalaire hermitien sur l'ensemble $C(G)$ des fonctions à valeurs dans G constantes sur une même classe de conjugaison (on appelle une telle fonction une **fonction de classes**) par :

$$(a, b) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{a(g)} b(g)$$

De ce qui précède, on déduit la

Proposition 1.1.2. *L'ensemble des caractères des représentations irréductibles de G forme un système orthonormal de $(C(G), (\cdot, \cdot))$.*

On en déduit immédiatement par exemple qu'il y a au plus n représentations irréductibles de G , où n est le nombre de classes de conjugaison de G .

Corollaire 1.1. *Toute représentation de G groupe fini est uniquement déterminée par son caractère.*

En effet, si la décomposition de V est $V \simeq \bigoplus_{i=1}^k V_i^{\oplus a_i}$ avec les V_i des représentations irréductibles deux à deux distinctes, alors $\chi_V = \sum a_i \chi_{V_i}$. D'après la proposition précédente, on obtient a_i par la formule :

$$a_i = (\chi_{V_i}, \chi_V)$$

Donc la donnée du caractère de V détermine cette dernière.

(6) : En reprenant les notations de la proposition 1.1.1, donnons-nous $\{e_j\}$ une base de V la représentation de H . Alors les fonctions

$$f_{i,j}(g) = \begin{cases} \rho(h)e_j & \text{si } g = hg_i \text{ pour un certain } h \in H, \\ 0 & \text{si } g \notin Hg_i. \end{cases} \quad (3)$$

forment une base de V' la représentation induite de G .

En effet, $V' = \bigoplus_i V_i$ où $V_i = \{f \in V' \text{ tq } f(g) = 0 \text{ si } g \notin Hg_i\}$.

D'autre part, pour un i donné, les $f_{i,j}$ forment une base de V_i .

Enfin, si $g = hg_k$ avec $h \in H$, alors si $g_k g' = h' g_q$ avec $h' \in H$,

$$\begin{aligned} \rho'(g') f_{i,j}(g) &= f_{i,j}(g g') = f_{i,j}(h g_k g') = f_{i,j}(h h' g_q) \\ &= \begin{cases} \rho(h) \rho(h') e_j & \text{si } q = i, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Donc, si $g' \in G$, le coefficient diagonal de la matrice de l'opérateur $\rho'(g')$ dans la base $\{f_{i,j}\}$ selon un certain $f_{i,j}$ correspond au coefficient de $f_{i,j}(g)$, où $g = h g_k$, dans la décomposition de $\rho'(g') f_{i,j}(g)$ sur les $f_{i,j}(g)$. Ce coefficient est nul si $g_k g' \notin Hg_i$. Le seul cas où il peut ne pas être nul est le cas où $g_k g' = h' g_i$ avec $h' \in H$.

Posons $\rho(h') e_j = \sum_r a_{r,j}(h') e_r$. Alors d'après (3), on a

$$\rho'(g') f_{i,j}(g) = \sum_k \sum_r a_{r,j}(h') e_r.$$

D'où le coefficient de $f_{i,j}(g)$ est $a_{j,j}(h')$ si $g = h g_k$ et $g_i g' = h' g_i$. Donc

$$\chi(g') = \sum_{g' \in g_i^{-1} H g_i} \sum_j a_{j,j}(h')$$

où $h' = g_i g' g_i^{-1}$ et comme $\sum_j a_{j,j}(h') = \psi(h')$, la formule du (6) en découle.

□

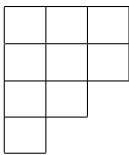
1.2 Rappels sur les représentations de \mathfrak{S}_n et tableaux de Young

Nous nous contenterons de faire quelques rappels sur les représentations de \mathfrak{S}_n et les tableaux de Young. Il y a autant de représentations irréductibles non équivalentes de \mathfrak{S}_n que de classes de conjugaison. Or la classe d'une permutation correspond à sa décomposition en cycles à supports disjoints. Donc on peut faire correspondre à chaque classe une **partition** $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_h)$ avec $\alpha_1 \geq \dots \geq \alpha_h \geq 1$ entiers et $\alpha_1 + \dots + \alpha_h = n$.

Ainsi, pour obtenir un système complet de représentations irréductibles de \mathfrak{S}_n , il faut et il suffit de trouver pour chaque partition de n une représentation irréductible telle que ces représentations soient deux à deux non équivalentes.

A une partition $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_h)$ de n , on associe un **diagramme de Young** (appelé aussi **schéma de Young** ou **diagramme de Ferrers**) : c'est un tableau à h lignes, la première ligne en haut comportant α_1 cellules, la seconde α_2 et la dernière α_h .

Par exemple, voici le diagramme associé à la partition $(3,3,2,1)$ pour $n=9$.



Un **tableau de Young** est une bijection de $\{1, \dots, n\}$ dans les l'ensemble des cellules du schéma α . Par exemple, on a un tableau canoniquement associé au schéma précédent :

1	2	3
4	5	6
7	8	
9		

On appellera ici **tableau de Young standard de forme λ** , où λ est une partition, un tableau de Young dans lequel les entiers sont croissants dans une même ligne et strictement croissants dans une même colonne.

A partir d'un tableau de Young, on fait agir naturellement \mathfrak{S}_n sur ce tableau en remplaçant dans le tableau l'entier j par son image $\sigma(j)$ pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. On a deux sous-groupes remarquables de \mathfrak{S}_n :

$$\mathcal{P}_\alpha = \{p \in \mathfrak{S}_n \text{ tq } p \text{ stabilise les lignes}\}$$

$$\mathcal{Q}_\alpha = \{q \in \mathfrak{S}_n \text{ tq } q \text{ stabilise les colonnes}\}$$

Un résultat de la théorie des représentations de groupes nous permet de ramener le problème de la recherche d'un système complet de représentations irréductibles du groupe à celui de la décomposition de l'algèbre de groupe correspondante en somme directe de ses idéaux à gauche minimaux, via la représentation régulière à gauche de \mathfrak{S}_n .

En effet, pour trouver un système complet de représentations irréductibles d'un groupe G (i.e. toutes les représentations irréductibles de G à équivalence près), il suffit de décomposer sa représentation régulière à gauche (où G opère par translations à gauche) en ses représentations irréductibles, qui forment un système complet de représentations irréductibles.

Pour cela, on se place dans $\mathbb{C}G$, l'algèbre du groupe G . Comme on peut associer de manière bijective une représentation du groupe G avec une représentation de son algèbre $\mathbb{C}G$, on se ramène à la décomposition de la représentation régulière à gauche de $\mathbb{C}G$.

Or pour trouver la décomposition de la représentation régulière à gauche de $\mathbb{C}G$, il suffit de trouver sa décomposition en somme directe de ses idéaux minimaux à gauche.

On travaille donc dans $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$ l'algèbre du groupe symétrique, et on considère les éléments :

$$a_\alpha = \sum_{p \in \mathcal{P}_\alpha} p$$

$$b_\alpha = \sum_{q \in \mathcal{Q}_\alpha} \sigma(q)q$$

où σ est la signature d'une permutation.

Puis on introduit le **symétriseur de Young** :

$$c_\alpha = a_\alpha b_\alpha$$

Pour chaque partition, les idéaux à gauche engendrés par c_α le symétriseur forment la décomposition cherchée : l'ensemble des restrictions de la représentation régulière à gauche de \mathfrak{S}_n à $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n \cdot c_\alpha$ pour chaque partition α forme un système complet de représentations irréductibles de \mathfrak{S}_n .

1.3 Représentations seminormales

Définitions

On considère une chaîne de groupes finis

$$\{1\} = G_0 \subseteq G_1 \subseteq \dots \subseteq G_n = G.$$

Soit V^λ une représentation irréductible de G , ie V^λ est un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie sur lequel la représentation de G est irréductible. Lorsque l'on restreint cette représentation à G_{n-1} , on obtient une décomposition de V^λ en somme directe de k sous-espaces irréductibles invariants par G_{n-1} :

$$V^\lambda \simeq V^{\mu_1} \oplus \dots \oplus V^{\mu_k}$$

On décompose de même chaque V^{μ_i} en sommes directes de représentations irréductibles pour la restriction à G_{n-2} et ainsi de suite.

Remarque 1.1. *Tous les résultats de cette partie sont encore valables si l'on remplace le corps de base \mathbb{C} par un corps K de caractéristique nulle (donc en particulier lorsqu'on travaille sur $\mathbb{C}(q)$, où q est une indéterminée).*

Définition 1.3. *Une **base seminormale** de V^λ est la donnée d'une base de V^λ "adaptée" à cette chaîne de décompositions : c'est une base munie d'une chaîne de partitions $\mathcal{B}^\lambda = \mathcal{B}^{\mu_1} \coprod \dots \coprod \mathcal{B}^{\mu_k}$ telle que chaque \mathcal{B}^{μ_i} engendre un sous-espace V^{μ_i} irréductible pour G_{n-1} avec*

$$V^\lambda = V^{\mu_1} \oplus \dots \oplus V^{\mu_k}$$

et ainsi de suite pour chaque \mathcal{B}^{μ_i} , V^{μ_i} et la restriction à G_{n-2} , et de même jusqu'à G_0 . Pour obtenir une base seminormale, il faut donc spécifier les partitions successives en plus de la base.

La représentation de G ainsi obtenue avec V^λ et \mathcal{B}^λ est une **représentation seminormale** de G relativement à la chaîne $\{1\} = G_0 \subseteq G_1 \subseteq \dots \subseteq G_n = G$.

Ces définitions s'étendent aussi à une chaîne d'algèbres semi-simples.

Construction des algèbres de chemins

Soit W^λ et \mathcal{B}^λ une représentation seminormale de G comme ci-dessus. Notons, pour $i = 0, \dots, n$, \mathcal{G}_i l'ensemble des indices correspondant à une représentation irréductible de G_i : autrement dit, on indexe les représentations irréductibles de chaque G_i . Pour $\mu \in \mathcal{G}_{i-1}$ et $\lambda \in \mathcal{G}_i$, notons

$$W^\lambda \simeq \bigoplus_{\mu \in \mathcal{G}_{i-1}} c_\mu^\lambda \cdot W^\mu$$

L'entier naturel c_μ^λ est donc la multiplicité de la représentation irréductible de G_{i-1} sur W^μ dans la représentation de G_{i-1} sur W^λ .

On introduit alors le **graphe** Γ permettant de coder les règles de restriction le long de la chaîne $\{1\} = G_0 \subseteq G_1 \subseteq \dots \subseteq G_n = G$. C'est un graphe dont les sommets sont étiquetés à l'aide des éléments des \mathcal{G}_i et tel que $\mu \in \mathcal{G}_{i-1}$ et $\lambda \in \mathcal{G}_i$ sont reliés par c_μ^λ arêtes. Par convention, $\mathcal{G}_0 = \{\emptyset\}$.

Soient $\mu \in \mathcal{G}_r$ et $\lambda \in \mathcal{G}_s$ avec $r < s$. Un **chemin** de μ à λ est un chemin dans le graphe Γ de longueur $s - r$ qui relie μ à λ :

$$L = (\mu = \lambda^{(r)} \xrightarrow{e_r} \lambda^{(r+1)} \xrightarrow{e_{r+1}} \dots \xrightarrow{e_{s-1}} \lambda^{(s)} = \lambda)$$

avec pour tout $i = r, \dots, s$, $\lambda^{(i)} \in \mathcal{G}_i$. Deux chemins menant de $\lambda^{(i)}$ à $\lambda^{(i+1)}$ par des arêtes différentes seront considérés comme distincts.

On peut alors construire l'**algèbre des chemins** P_m . C'est la \mathbb{C} -algèbre de base les E_{ST} avec S et T deux chemins de Γ partant de $\emptyset \in \mathcal{G}_0$ et arrivant à un même $\lambda \in \mathcal{G}_m$. La multiplication est définie par la formule "matricielle" :

$$E_{ST} \cdot E_{PQ} = \delta_{TP} E_{SQ}$$

On a : $P_0 \simeq \mathbb{C}$ et $P_m \simeq \bigoplus_{\lambda \in \mathcal{G}_m} M_{d_\lambda}(\mathbb{C})$, où $M_d(\mathbb{C})$ est l'algèbre des matrices carrées complexes $d \times d$ et d_λ est le nombre de chemins de $\emptyset \in \mathcal{G}_0$ à $\lambda \in \mathcal{G}_m$.

Pour tout $\lambda \in \mathcal{G}_m$, posons

$$V^\lambda = \text{Vect}_{\mathbb{C}}\{v_L \text{ tq } L \text{ est un chemin de } \emptyset \text{ à } \lambda\}$$

L'action de P_m est définie naturellement par

$$E_{ST} \cdot v_L = \delta_{TL} v_S.$$

On a alors $P_m \simeq \bigoplus_{\lambda \in \mathcal{G}_m} \mathcal{L}(V^\lambda)$, donc un résultat classique sur les représentations d'algèbres de dimension finie semi-simples sur \mathbb{C} permet d'en déduire que les V^λ sont des représentations irréductibles de P_m deux à deux non équivalentes, et qu'elles sont les seules à équivalence près.

On peut également définir pour T un chemin de λ à μ et S un chemin de μ à ν le chemin $T * S$ de λ à ν comme le concaténé de T et S .

On peut ainsi plonger P_r dans P_s pour $r < s$: si P et Q sont des chemins de \emptyset à $\lambda \in \mathcal{G}_r$, $E_{PQ} \in P_s$ avec

$$E_{PQ} = \sum_{T \text{ chemin de } \lambda \text{ à } \mu \in \mathcal{G}_s} E_{P*T, Q*T}$$

Ce plongement est bien licite : si P, Q, L et M sont des chemins de \emptyset à $\lambda \in \mathcal{G}_r$, $E_{P,Q}$ et $E_{L,M} \in$

P_s , alors le produit dans P_s est :

$$\begin{aligned}
E_{P,Q}E_{L,M} &= \sum_{T \text{ chemin de } \lambda \text{ à } \mu \in \mathcal{G}_s} E_{P^*T, Q^*T} \cdot \sum_{S \text{ chemin de } \lambda \text{ à } \mu \in \mathcal{G}_s} E_{L^*S, M^*S} \\
&= \sum_{T, S \text{ chemins de } \lambda \text{ à } \mu \in \mathcal{G}_s} E_{P^*T, Q^*T} E_{L^*S, M^*S} \\
&= \delta_{Q,L} \sum_{T \text{ chemin de } \lambda \text{ à } \mu \in \mathcal{G}_s} E_{P^*T, M^*T} \\
&= \delta_{Q,L} E_{P,M}.
\end{aligned}$$

Donc le produit est bien préservé par le plongement, la structure d'espace vectoriel aussi de façon évidente.

Ainsi, on a

$$\mathbb{C} = P_0 \subseteq P_1 \subseteq \dots \subseteq P_n$$

et pour tout $m = 1, \dots, n$, si V^λ est la représentation irréductible définie plus haut correspondant à $\lambda \in \mathcal{G}_m$, on a la décomposition en représentations irréductibles de la restriction à P_{m-1} :

$$V^\lambda \simeq \bigoplus_{\mu \in \mathcal{G}_{m-1}} V^\mu$$

où la somme porte sur toutes les arêtes qui relient un élément $\mu \in \mathcal{G}_{m-1}$ à $\lambda \in \mathcal{G}_m$.

En effet, si $\mu \in \mathcal{G}_{m-1}$ tq μ et λ sont reliés, on a l'inclusion $V^\mu \subseteq V^\lambda$: on identifie $v_L \in V^\mu$ où L est un chemin de \emptyset à μ avec $\sum_{T \text{ chemin de } \mu \text{ à } \lambda} v_{L^*T} \in V^\lambda$. C'est bien cohérent puisque si P, Q et L sont des chemins de \emptyset à μ , on a :

$$\begin{aligned}
E_{P,Q}v_L &= \sum_{S, T \text{ chemins de } \mu \text{ à } \lambda} E_{P^*S, Q^*S} v_{L^*T} \\
&= \sum_{T \text{ chemin de } \mu \text{ à } \lambda} E_{P^*T, Q^*T} v_{L^*T} = \delta_{Q,L} \sum_{T \text{ chemin de } \mu \text{ à } \lambda} v_{P^*T} \\
&= \delta_{Q,L} v_L
\end{aligned}$$

Par construction, la restriction de V^λ à \mathcal{G}_{m-1} s'écrit $V^\lambda \downarrow_{P_{m-1}}^{P_m} = \bigoplus V^\mu$ où la somme porte sur toutes les arêtes qui relient un élément $\mu \in \mathcal{G}_{m-1}$ à $\lambda \in \mathcal{G}_m$.

Montrons finalement que pour tous $1 \leq m \leq n$ et $\lambda \in \mathcal{G}_m$, $\dim V^\lambda = d_\lambda = \dim W^\lambda$.

Par la définition de V^λ via la base des v_L , où L est un chemin de \emptyset à λ , on a $\dim V^\lambda = d_\lambda$ le nombre de chemins de \emptyset à λ . Reste à montrer que $\dim W^\lambda = d_\lambda$.

On peut procéder par récurrence sur $m \in \{0, \dots, n\}$. La propriété est claire pour $m = 0$

Supposons le résultat vrai pour tout $\mu \in \mathcal{G}_{m-1}$ avec $m \geq 1$. Soit $\lambda \in \mathcal{G}_m$.

$$V^\lambda \downarrow_{P_{m-1}}^{P_m} = \bigoplus V^\mu.$$

Donc $\dim V^\lambda = \sum_{\mu} \dim V^\mu$, où la somme porte sur toutes les arêtes qui relient un élément $\mu \in \mathcal{G}_{m-1}$ à $\lambda \in \mathcal{G}_m$. Par construction, on a bien :

$$\begin{aligned}
\dim V^\lambda &= \sum_{\mu \in \mathcal{G}_{m-1}} c_\mu^\lambda \dim V^\mu \\
&= \sum_{\mu \in \mathcal{G}_{m-1}} c_\mu^\lambda \dim W^\mu \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\
&= \dim W^\lambda.
\end{aligned}$$

D'où le résultat.

Montrons à présent qu'il existe un isomorphisme Φ entre P_n et $\mathbb{C}G$ qui préserve la structure de représentation seminormale.

Posons $W = \bigoplus_{\lambda \in \mathcal{G}_n} W^\lambda$ et donnons-nous une base seminormale $\{w_i\}_{1 \leq i \leq \dim W}$ de W .
On sait qu'il existe un morphisme d'algèbres

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{C}G &\rightarrow \bigoplus_{\lambda \in \mathcal{G}_n} M_{d_\lambda}(\mathbb{C}) \\ g &\mapsto \varphi(g) \end{aligned}$$

où $\varphi(g)$ est la matrice associée à la représentation de g dans la base $\{w_i\}$.

φ est injective, car si un élément de G agit trivialement sur toutes les représentations irréductibles de G , il agit aussi trivialement sur la représentation régulière à gauche de G . Comme l'action de G sur la représentation régulière à gauche de G est fidèle, cet élément ne peut être que l'élément neutre de G .

φ est un isomorphisme pour des raisons de dimensions :

$$\dim \mathbb{C}G = |G| = \sum_{\lambda \in \mathcal{G}_n} (\dim V^\lambda)^2 = \dim \left(\bigoplus_{\lambda \in \mathcal{G}_n} M_{d_\lambda}(\mathbb{C}) \right)$$

Soit $g \in G_{n-1}$. Sa matrice $\varphi(g)$ est diagonale par blocs, et si $\lambda \in \mathcal{G}_n$ et $\mu \in \mathcal{G}_{n-1}$, le bloc correspondant à l'action de g sur W^λ est diagonal par blocs et contient c_μ^λ fois le même bloc correspondant à l'action de g sur W^μ . Par récurrence, φ préserve la structure de représentation seminormale.

De même, il existe un isomorphisme

$$\psi : P_n \longrightarrow \bigoplus_{\lambda \in \mathcal{G}_n} M_{d_\lambda}(\mathbb{C})$$

correspondant à la base $\{v_L\}$ et préservant la structure de représentation seminormale par le même argument que ci-dessus, pour la chaîne d'algèbres $P_0 \subseteq \dots \subseteq P_{n-1} \subseteq P_n$.

Donc $\Phi = \psi^{-1} \varphi : \mathbb{C}G \longrightarrow P_n$ est un isomorphisme d'algèbres préservant la structure de représentations seminormales. On a en particulier $\Phi(\mathbb{C}G_k) = P_k$ pour tout $0 \leq k \leq n$.

Construction des représentations seminormales de $\mathbb{C}G$.

Maintenant, essayons de faire le lien entre la représentation seminormale des algèbres des chemins et la représentation seminormale de la chaîne de groupes correspondante.

On sait d'après ce qui précède qu'il existe un isomorphisme entre P_n et $\mathbb{C}G$ qui préserve la structure de représentation seminormale. On cherche maintenant à trouver explicitement un tel isomorphisme

$$\begin{aligned} \Phi : P_n &\rightarrow \mathbb{C}G \\ E_{M,L} &\mapsto e_{M,L} \end{aligned} \tag{4}$$

tel que $\Phi(P_i) = \mathbb{C}G_i$ pour tout $0 \leq i \leq n$, alors en définissant l'action de G par $g.v_L = \Phi^{-1}(g)v_L$. On obtiendra exactement une représentation seminormale de $\mathbb{C}G$.

Donnons-nous pour tout $1 \leq k \leq n$, un ensemble $Z_k = \{z_{k,j}\}_{1 \leq j \leq r_k}$ d'éléments dans le centre de l'algèbre $\mathbb{C}G_k$

Lemme 1.1. *Soit $z_{k,j}$ dans le centre de $\mathbb{C}G_k$. Soit $L = (\lambda^{(0)} \rightarrow \dots \rightarrow \lambda^{(n)})$ un chemin dans le graphe Γ et $\chi^{\lambda^{(k)}}$ le caractère irréductible de G_k indexé par $\lambda^{(k)} \in \mathcal{G}_k$. Alors, pour tout isomorphisme Φ entre l'algèbre des chemins P_n et $\mathbb{C}G$ comme en (4), on a :*

$$\begin{aligned} z_{k,j} \cdot v_L &= c_{k,j}(\lambda^{(k)}) v_L \\ \text{où } c_{k,j}(\lambda^{(k)}) &= \frac{\chi^{\lambda^{(k)}}(z_{k,j})}{\chi^{\lambda^{(k)}}(1)} \end{aligned}$$

Preuve :

Comme $z_{k,j}$ est dans le centre de $\mathbb{C}G_k$, pour tout $g \in \mathbb{C}G_k$, on a :

$$\forall v \in V^\lambda, \quad g \cdot z_{k,j} \cdot v = z_{k,j} \cdot g \cdot v$$

Donc d'après le lemme de Schur, $z_{k,j}$ agit par un multiple de l'identité dans toute représentation irréductible de G_k . Notons $c_{k,j}(\mu)$ le scalaire par lequel $z_{k,j}$ agit dans le module irréductible indexé par μ . On a $c_{k,j}(\mu) = \frac{\chi^\mu(z_{k,j})}{\chi^\mu(1)}$

Tout vecteur de base v_L correspond à un chemin $L = (\lambda^{(0)} \rightarrow \dots \rightarrow \lambda^{(n)})$ et appartient à un module irréductible pour P_k isomorphe à $V^{\lambda^{(k)}}$ avec $\lambda^{(k)} \in \mathcal{G}_k$. Donc pour tout isomorphisme Φ comme en (4), on a :

$$z_{k,j} \cdot v_L = \Phi^{-1}(z_{k,j}) \cdot v_L = c_{k,j}(\lambda^{(k)}) v_L$$

□

Définition 1.4. Notons pour $\mu \in \mathcal{G}_k$ le r_k -uplet ordonné : $c_k(\mu) = (c_{k,j}(\mu))_{1 \leq j \leq r_k}$.

Le **poïds** du chemin $L = (\lambda^{(0)} \rightarrow \dots \rightarrow \lambda^{(n)})$ dans Γ est le $n+1$ -uplet de r_0, \dots, r_n -uplets :

$$wt(L) = (c_0(\lambda^{(0)}), \dots, c_n(\lambda^{(n)})).$$

Trouver un isomorphisme Φ comme en (4), c'est déterminer pour tous chemins L et M de Γ l'image $e_{M,L} = \Phi(E_{M,L})$, $e_{M,L} \in \mathbb{C}G$.

Supposons que **chaque chemin de Γ soit caractérisé par son poïds**, i.e. que si L et M sont deux chemins distincts de Γ , alors $wt(L) \neq wt(M)$.

Sous cette hypothèse, on a alors la proposition suivante :

Proposition 1.3.1. (a) Pour tout chemin L de Γ , $e_{L,L}$ est déterminé de façon unique par les $z_{k,j} \in Z_k$ et les scalaires $c_{k,j}(\mu)$ avec $\mu \in \mathcal{G}_k$ pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$.

(b) Si M et L sont des chemins distincts de Γ , alors $e_{M,L}$ est déterminé à une constante près par les $z_{k,j} \in Z_k$ et les scalaires $c_{k,j}(\mu)$ avec $\mu \in \mathcal{G}_k$ pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$.

La difficulté, une fois cette proposition établie, sera alors de trouver des ensembles Z_k de cardinal minimal, mais tels que chaque chemin de Γ soit caractérisé par son poïds.

Preuve :

(a) Notons $L = (\lambda^{(0)} \rightarrow \dots \rightarrow \lambda^{(n)})$ un chemin de Γ , et pour tout $0 \leq k \leq n$ et tout $1 \leq j \leq r_k$,

$$p_{k,j}(\lambda^{(k)}) = \prod_{c_{k,j}(\mu) \neq c_{k,j}(\lambda^{(k)}) \text{ et } \mu \in \mathcal{G}_k} \frac{z_{k,j} - c_{k,j}(\mu)}{c_{k,j}(\lambda^{(k)}) - c_{k,j}(\mu)}$$

D'après le lemme précédent, si $M = (\mu^{(0)} \rightarrow \dots \rightarrow \mu^{(n)})$ est un autre chemin, alors pour tout isomorphisme Φ comme en (4),

$$\Phi^{-1}(p_{k,j})(\lambda^{(k)}) \cdot v_M = \begin{cases} v_M & \text{si } c_{k,j}(\mu^{(k)}) = c_{k,j}(\lambda^{(k)}) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Posons $e_{L,L} = \prod_{k,j} p_{k,j}(\lambda^{(k)})$.

Si $M = (\mu^{(0)} \rightarrow \dots \rightarrow \mu^{(n)})$ est un chemin de Γ , alors $\Phi^{-1}(e_{L,L}) \cdot v_M = \delta_{L,M} v_M = E_{L,L} v_M$ car si L et M sont distincts, alors leurs poïds sont différents, un terme au moins du produit est nul. On a donc le résultat puisque Φ est injectif.

(b) Soient L et M des chemins distincts de Γ . Prenons $a \in \mathbb{C}G$ tel que $e_{M,M} a e_{L,L} \neq 0$. Alors $e_{M,L}$ doit s'écrire un scalaire fois $e_{M,M} a e_{L,L}$. Comme les éléments $e_{M,M}$ et $e_{L,L}$ sont déterminés par les $z_{k,j} \in Z_k$ et les scalaires $c_{k,j}(\mu)$ avec $\mu \in \mathcal{G}_k$ pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, les $e_{M,L}$ le sont aussi à une constante multiplicative près.

□

Remarque 1.2. *Supposons donnés un isomorphisme*

$$\begin{aligned}\Phi : P_n &\rightarrow \mathbb{C}G \\ E_{M,L} &\mapsto e_{M,L}\end{aligned}$$

comme en (4) et un morphisme d'espaces vectoriels

$$\begin{aligned}\bar{\Phi} : P_n &\rightarrow \mathbb{C}G \\ E_{M,L} &\mapsto \bar{e}_{M,L}\end{aligned}$$

tel qu'il existe des constantes $\kappa_{M,L} \in \mathbb{C}$ vérifiant :

$$\bar{e}_{M,L} = \kappa_{M,L} e_{M,L}$$

$$\kappa_{M,L} \kappa_{L,M} = 1 \text{ et } \kappa_{M,L} \kappa_{L,N} = \kappa_{M,N}.$$

Alors $\bar{\Phi}$ est aussi un isomorphisme comme en (4).

Preuve :

Comme clairement les $\kappa_{M,L}$ sont non nuls, $\bar{\Phi}$ est un isomorphisme. De plus, les relations que satisfonts les $\kappa_{M,L}$ nous assurent que $\bar{\Phi}$ est bien un morphisme d'algèbre, puisqu'elles découlent directement des relations $e_{M,L} e_{P,N} = \delta_{L,P} e_{M,N}$.

□

Application :

Prenons une chaîne de groupes finis $\{1\} = G_0 \subseteq G_1 \subseteq \dots \subseteq G_n = G$ telle que pour tout $1 \leq i \leq n$, il n'y ait pas de multiplicité pour la décomposition de la représentation irréductible de G_i en représentations irréductibles de G_{i-1} . Pour tout $1 \leq i \leq n$, prenons pour Z_i l'ensemble des sommes des éléments appartenant à une même classe de conjugaison de G_i , et ce pour toute classe de conjugaison. Alors Z_i est une base du centre de $\mathbb{C}G_i$. De plus, tous les chemins de Γ sont caractérisés par leur poids.

En effet, prenons $L = (\lambda^{(0)} \xrightarrow{e_0} \lambda^{(1)} \xrightarrow{e_1} \dots \xrightarrow{e_n} \lambda^{(n)})$ et $M = (\mu^{(0)} \xrightarrow{e'_0} \mu^{(1)} \xrightarrow{e'_1} \dots \xrightarrow{e'_n} \mu^{(n)})$ des chemins de Γ tels que $wt(L) = wt(M)$. Montrons que pour tout $k = 0, \dots, n$, $\lambda^{(k)} = \mu^{(k)}$.

Posons $Z_k = \{z_{k,j} = \sum_{i=1}^{r_{k,j}} a_{k,j,i}\}$ où $1 \leq j \leq r_k$ et les $a_{k,j,i}$ sont tous les éléments d'une même classe de conjugaison de G_k de cardinal $r_{k,j}$, avec r_k le nombre de classes de conjugaison. Alors, pour $\mu^{(k)}$ et $\lambda^{(k)} \in \mathcal{G}_k$, on a :

$$c_{k,j}(\lambda^{(k)}) = \frac{\chi_{\lambda^{(k)}}(z_{k,j})}{\chi_{\lambda^{(k)}}(1)} = r_{k,j} \frac{\chi_{\lambda^{(k)}}(a_{k,j})}{\chi_{\lambda^{(k)}}(1)}$$

Où $a_{k,j}$ est un représentant quelconque de la classe des $a_{k,j,i}$ puisqu'un caractère est constant sur une classe de conjugaison. Par suite, si $c_{k,j}(\lambda^{(k)}) = c_{k,j}(\mu^{(k)})$, alors pour tout $a \in G_k$, $a = a_{k,j,i}$ pour un certain j et un certain i , et donc

$$r_{k,j} \frac{\chi_{\lambda^{(k)}}(a)}{\chi_{\lambda^{(k)}}(1)} = r_{k,j} \frac{\chi_{\mu^{(k)}}(a)}{\chi_{\mu^{(k)}}(1)}$$

$\chi_{\lambda^{(k)}}$ et $\chi_{\mu^{(k)}}$ sont donc liés, et par irréductibilité des représentations, $V^{\lambda^{(k)}} \simeq V^{\mu^{(k)}}$. Comme il n'y a pas de multiplicité, il y a au plus une arête reliant deux sommets quelconques de Γ , donc on en conclut que $\lambda^{(k)} = \mu^{(k)}$. Par suite, $L = M$.

Ainsi, les résultats précédents s'appliquent.

2 Définitions et premières propriétés

2.1 Systèmes de racines et groupes de Weyl

Soit V un espace vectoriel et $\alpha \in V \setminus \{0\}$. On rappelle qu'une **symétrie de vecteur** α est un isomorphisme s de V tel que :

- $s(\alpha) = -\alpha$
- il existe H un hyperplan de V tq $\forall v \in H, s(v) = v$

Définition 2.1. Une partie R de V est un **système de racines** dans V si :

1. R est fini, engendre V et $0 \notin R$
2. Pour tout $\alpha \in R$, il existe une symétrie $s_\alpha \in GL(V)$ de vecteur α laissant stable R .
3. Pour tous $\alpha, \beta \in R$, $s_\alpha(\beta) - \beta \in \mathbb{Z}\alpha$

Les éléments de R sont appelés **racines**.

Ce système est dit **réduit** si pour tout $\alpha \in R$, les seules racines proportionnelles sont α et $-\alpha$.

On voit immédiatement que si $\alpha \in R$, alors $-\alpha \in R$.

Si R contient deux racines proportionnelles autres qu'opposées (donc il n'est pas réduit), on peut les noter α et $t\alpha$ où $0 < t < 1$. En appliquant la propriété (3) à $t\alpha$, on trouve $2t \in \mathbb{Z}$, donc $t = \frac{1}{2}$. Par suite, les seules racines proportionnelles à α sont $-\alpha, -\frac{1}{2}\alpha, \frac{1}{2}\alpha$, et α .

Si une symétrie vérifiant (2) pour un α donné existe, alors elle est unique.

En effet, cela résulte du

Lemme 2.1. Si $\alpha \in V \setminus \{0\}$ et R est une partie finie de V qui engendre V , alors il existe au plus une symétrie de vecteur α laissant stable R .

Preuve :

Prenons s et s' deux telles symétries. Alors si $u = s \circ s'$, u est un automorphisme vérifiant :

$$\begin{aligned} u(R) &= R \\ u(\alpha) &= \alpha \\ u &\text{ induit l'identité sur } V/\mathbb{R}\alpha \end{aligned}$$

ce qui montre que les valeurs propres de u sont égales à 1. De plus, comme R est fini et engendre V , la donnée de u ou celle de sa restriction comme permutation de R sont équivalentes. En particulier, comme R est fini, il existe $n \in \mathbb{N}$ tq $u^n(r) = r \quad \forall r \in R$, donc $u^n = Id_V$. Comme on est sur \mathbb{C} , cela entraîne que u est diagonalisable. Comme toutes ses valeurs propres sont égales à 1, $u = Id_V$, donc $s = s'$.

□

Définition 2.2. Si R est un système de racines dans V , on appelle **groupe de Weyl** de R le sous-groupe W de $GL(V)$ engendré par les symétries $s_\alpha, \alpha \in R$.

Comme W est fini, il existe un produit scalaire sur V invariant par W . En effet, si $B(x, y)$ est un produit scalaire sur V , on définit

$$(x, y) = \sum_{w \in W} B(wx, wy)$$

qui est le produit scalaire recherché.

En particulier, dans l'espace euclidien $(V, (\cdot, \cdot))$, les éléments de W sont des transformations orthogonales. Pour les symétries s_α où $\alpha \in R$, cela donne :

$$s_\alpha(x) = x - 2 \frac{(\alpha, x)}{(\alpha, \alpha)} \alpha$$

pour tout $x \in V$.

D'où une reformulation de la condition (3) :

$$\forall \alpha, \beta \in R, \quad n(\alpha, \beta) = 2 \frac{(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)} \in \mathbb{Z}$$

Si $|\alpha| = \sqrt{(\alpha, \alpha)}$ est la longueur de α et ϕ l'angle entre α et β , on a

$$n(\alpha, \beta) = 2 \frac{|\beta|}{|\alpha|} \cos \phi$$

D'où la formule très pratique :

$$n(\alpha, \beta)n(\beta, \alpha) = 4 \cos^2 \phi$$

En effet, cela implique que $4 \cos^2 \phi$ est entier, donc prend les valeurs 0, 1, 2, 3, 4. Si α et β ne sont pas proportionnelles et que le système est réduit, il n'y a que 7 cas possibles, à l'échange près de α et de β . On remarque en particulier que $n(\alpha, \beta)$ et $n(\beta, \alpha)$ sont de même signe.

$n(\alpha, \beta)$	$n(\beta, \alpha)$	ϕ	$ \beta ^2/ \alpha ^2$
0	0	$\pi/2$	indéterminé
1	1	$\pi/3$	1
-1	-1	$2\pi/3$	1
1	2	$\pi/4$	2
-1	-2	$3\pi/4$	2
1	3	$\pi/6$	3
-1	-3	$5\pi/6$	3

Définition 2.3. $S \subset R$ est une **base** (ou un **système simple de racines**) de R si S vérifie :

1. S est une base de V en tant qu'espace vectoriel.
2. Pour tout $\beta \in R$, $\beta = \sum_{\alpha \in S} m_\alpha \alpha$
où les m_α sont des entiers tous de même signe.

Les racines de la base sont dites **simples**.

Proposition 2.1.1. Tout système de racines R admet une base.

Etant donnée une base S de R , une racine β est dite **positive** si les coefficients de sa décomposition sur les éléments de la base sont positifs. On note R^+ l'ensemble des racines positives. Si R^- est l'ensemble des racines négatives, i.e. celles dont les coefficients sont négatifs, on a $R^- = -R^+$.

Définition 2.4. Soit R un système de racines, S une base. La **matrice de Cartan** de R relativement à la base S est la matrice $(n(\alpha, \beta))_{\alpha, \beta \in S}$.

Proposition 2.1.2. Un système de racines réduit est caractérisé à isomorphisme près par sa matrice de Cartan.

Plus précisément, soient R' est un système de racines réduit dans V' espace vectoriel, S' une base de R' et $\phi : S \rightarrow S'$ une bijection telle que $n(\phi(\alpha), \phi(\beta)) = n(\alpha, \beta)$ pour tous $\alpha, \beta \in S$. Alors, si R est réduit, il existe un unique isomorphisme $f : V \rightarrow V'$ prolongeant ϕ et tel que $f(R) = R'$.

Preuve :

f est uniquement défini à partir de ϕ puisque S est une base de V , et c'est bien un isomorphisme d'espaces vectoriels.

D'autre part, si α et $\beta \in S$,

$$s_{\phi(\alpha)} \circ f(\beta) = s_{\phi(\alpha)}(\phi(\beta)) = \phi(\beta) - n(\phi(\beta), \phi(\alpha))\phi(\alpha)$$

et

$$f \circ s_{\alpha}(\beta) = f(\beta - n(\beta, \alpha)\alpha) = \phi(\beta) - n(\beta, \alpha)\phi(\alpha)$$

D'où pour tout $\alpha \in S$, $s_{\phi(\alpha)} \circ f = f \circ s_{\alpha}$. En notant W (respectivement W') le groupe de Weyl de S (resp. S'), on a $W' = fWf^{-1}$.

En admettant que $R = \{w(\alpha), w \in W, \alpha \in S\}$ et $R' = \{w(\alpha), w \in W', \alpha \in S'\}$, on obtient $f(R) = R'$. □

Définition 2.5. *Le **graphe de Coxeter** du système de racines R relativement à une base S est le graphe dont les sommets sont les éléments de S et où deux sommets distincts α et β sont joints par $n(\alpha, \beta)n(\beta, \alpha)$ arêtes.*

Comme deux éléments α et β de S sont linéairement indépendants, on a

$$n(\alpha, \beta)n(\beta, \alpha) = 4 \cos^2 \phi \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

Le graphe de Coxeter en lui-même ne donne pas toute l'information fournie par la matrice de Cartan et ne permet donc pas de caractériser un système de racines à isomorphisme près.

Définition 2.6. *On appelle **schéma de Dynkin** de R le graphe de Coxeter dont les sommets α sont munis de coefficients proportionnels à (α, α) , le carré de la longueur de la racine α .*

Le schéma de Dynkin, lui, contient assez d'information : on a la

Proposition 2.1.3. *La donnée du schéma de Dynkin d'un système de racines est équivalente à celle de sa matrice de Cartan. Donc le schéma de Dynkin caractérise le système de racines à isomorphisme près.*

Pour la preuve de cette proposition, nous renvoyons à [9, Chapitre V, §14, Proposition 13].

2.2 Définition générale de l'algèbre de Hecke d'un groupe de Weyl W

Soit Δ un schéma de Dynkin, correspondant à un groupe de Weyl fini W . Soit R le système de racines correspondant, et $S = \{\alpha_i\}$ la base de S indexée par les sommets de Δ .

L'**algèbre d'Iwahori-Hecke** correspondante $H(p^2, q^2)$ est l'algèbre sur $\mathbb{C}(p, q)$ engendrée par les éléments T_i pour i sommet de Δ , et dont une présentation est :

$$T_i T_j T_i T_j \dots = T_j T_i T_j T_i \dots \quad (5)$$

où chaque membre contient $m_{i,j}$ facteurs, avec $m_{i,j}$ l'ordre de $s_{\alpha_i} s_{\alpha_j} \in W$, et

$$T_i^2 = \begin{cases} (p - p^{-1})T_i + 1 & \text{si } \alpha_i \text{ est une racine courte,} \\ (q - q^{-1})T_i + 1 & \text{si } \alpha_i \text{ est une racine longue.} \end{cases} \quad (6)$$

Par convention, si toutes les racines de R ont la même longueur, elles seront longues, donc l'algèbre de Hecke correspondante sera notée $H(q^2)$ sur $\mathbb{C}(q)$.

Le terme **présentation** signifie que $H(p^2, q^2)$ est engendrée par les T_i pour i sommet de Δ et que si \mathcal{T} est le groupe libre engendré par les T_i et r l'ensemble des relations (5) et (6), en notant $\langle r \rangle$ l'idéal engendré par r , alors on a un isomorphisme

$$\mathbb{C}(p^2, q^2)[\mathcal{T}] / \langle r \rangle \xrightarrow{\cong} H(p^2, q^2)$$

2.3 Algèbres de Hecke de type A_{n-1}

Soit \mathbb{K} un corps, généralement \mathbb{C} , et $q \in \mathbb{K}$ quelconque, voire une indéterminée. Soit $n \geq 2$.

Définition 2.7. *L'algèbre de Hecke $H(q, n)$ de type A_{n-1} est l'algèbre associative sur \mathbb{K} (voire sur $\mathbb{K}(q)$ si q est considéré comme une indéterminée) d'unité 1 et dont une présentation est :*

$$T_i T_j = T_j T_i \text{ pour } |i - j| \geq 2 \quad (7)$$

$$T_i T_{i+1} T_i = T_{i+1} T_i T_{i+1} \text{ pour } i = 2, \dots, n-1 \quad (8)$$

$$T_i^2 = (q-1)T_i + q \text{ pour } i = 2, \dots, n \quad (9)$$

La relation (8) est appelée parfois **relation de tresse**.

La relation (9) est parfois remplacée par la relation

$$T_i^2 = (q - q^{-1})T_i + 1 \quad (10)$$

Auquel cas on note l'algèbre correspondante $HA_{n-1}(q^2)$.

En effet, en posant $T'_i = q^{-1}T_i$, T'_i vérifie $T_i'^2 = (q^2 - 1)T'_i + q^2$, donc comme les T'_i vérifient aussi (7) et (8), on est ramené à la situation précédente pour q^2

On remarque que si on fait $q = 1$, on retrouve une présentation de $\mathbb{K}\mathfrak{S}_n$ en prenant $T_i = s_i = (i-1, i)$ les transpositions adjacentes.

On remarque également que $H(q, n)$ peut être vue comme une sous-algèbre de $H(q, n+1)$ via les inclusions :

$$\{T_2\} \subset \{T_2, T_3\} \subset \dots \subset \{T_2, T_3, \dots, T_n\} \subset \{T_2, T_3, \dots, T_n, T_{n+1}\}$$

On peut alors voir $H(q, n+1)$ comme un $H(q, n)$ -**bimodule**, i.e. un $H(q, n)$ -module à gauche et à droite simultanément et tel que $a(xb) = (ax)b$ pour tous $a, b \in H(q, n)$ et $x \in H(q, n+1)$.

Notons dans $H(q, n)$:

$$S_2 := \{1, T_2\},$$

$$S_3 := \{1, T_3, T_3 T_2\}$$

...

$$S_i := \{1, T_i, T_i T_{i-1}, \dots, T_i T_{i-1} \dots T_2\}$$

...

$$S_n := \{1, T_n, T_n T_{n-1}, \dots, T_n T_{n-1} \dots T_2\}$$

Définition 2.8. *On dit qu'un monôme M de $H(q, n)$ est **normal** si $M = U_2 U_3 \dots U_n$ avec $U_i \in S_i$ pour tout $i = 2, \dots, n$. On notera N_n l'ensemble des éléments normaux de $H(q, n)$.*

Théorème 2.3.1. *N_n est une base de $H(q, n)$ comme \mathbb{K} -espace vectoriel.*

Comme $\text{Card } N_n = n!$, $H(q, n)$ est donc de dimension $n!$.

Lemme 2.2. *$H(q, n)$ est engendré comme \mathbb{K} -espace vectoriel par les monômes où T_n apparaît au plus une fois.*

Preuve :

Par récurrence sur n .

Pour $n = 2$, on a $\forall k \geq 2$, $T_2^k = (q-1)T_2^{k-1} + qT_2^{k-2}$ donc par récurrence, toute puissance k -ième de T_2 s'exprime comme combinaison linéaire de 1 et de T_2 , d'où le résultat vu que $H(q, 2)$ est engendré par 1 et T_2 comme \mathbb{K} -algèbre.

Supposons le résultat vrai pour $n \geq 2$. Soit $a \in H(q, n+1)$, un monôme. On veut exprimer a comme une combinaison linéaire de monômes dans lesquels T_{n+1} apparaît une fois de moins que dans a , ce qui prouvera le résultat par récurrence.

Écrivons $a = bT_{n+1}cT_{n+1}d$ où b et $d \in H(q, n+1)$ et $c \in H(q, n)$. Par hypothèse de récurrence, on peut supposer que soit $c \in H(q, n-1)$, soit $c = c'T_n c''$ avec c' et $c'' \in H(q, n-1)$. Si $c \in H(q, n-1)$, alors c et T_{n+1} commutent, donc

$$a = bcT_{n+1}^2d = (q-1)bcT_{n+1}d + q.bcd$$

ce qui conclut. Sinon,

$$\begin{aligned} a &= bT_{n+1}c'T_n c''T_{n+1}d \\ &= bc'T_{n+1}T_n T_{n+1}c''d \\ &= bc'T_n T_{n+1}T_n c''d \end{aligned}$$

ce qui conclut aussi. □

Lemme 2.3. N_n engendre $H(q, n)$ comme \mathbb{K} -espace vectoriel.

Preuve :

Par récurrence sur n .

C'est clair pour $n = 2$ d'après le lemme précédent.

Supposons le résultat pour $n \geq 2$. Le lemme précédent nous dit que $H(q, n+1)$ est engendrée par $H(q, n) \cup H(q, n)T_{n+1}H(q, n)$. L'hypothèse de récurrence pour n nous permet de dire que $H(q, n+1)$ est engendrée par les éléments de $N_n \cup \{aT_{n+1}b ; a \text{ et } b \in H(q, n)\}$.

Soient a et $b \in H(q, n)$. Montrons que $aT_{n+1}b$ est une combinaison linéaire d'éléments normaux. On peut même supposer par hypothèse de récurrence que $b \in N_n : b = b_2 \dots b_n$ avec $b_i \in S_i$. Il vient :

$$aT_{n+1}b = ab_2 \dots b_{n-1}T_{n+1}b_n$$

puisque $b_2 \dots b_{n-1} \in H(q, n-1)$ commutent avec T_{n+1} . Comme $ab_2 \dots b_{n-1} \in H(q, n)$, par hypothèse de récurrence, $ab_2 \dots b_{n-1} = \sum_{i=1}^k q_i \cdot c_i$ avec $q_i \in \mathbb{K}$ et $c_i \in N_n$. D'où

$$aT_{n+1}b = \sum_{i=1}^k q_i \cdot \underbrace{c_i T_{n+1} b}_{\in N_{n+1}}$$

ce qui conclut. □

Reste donc à montrer l'indépendance des éléments normaux de $H(q, n)$ pour compléter la preuve du théorème. Pour cela, nous aurons besoin de quelques définitions et propriétés sur les systèmes de Coxeter.

Définition 2.9. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. On appelle **longueur** de σ , notée $l(\sigma)$, le plus petit entier q tel que $\sigma = s_{i_1} \dots s_{i_q}$ où $s_{i_j} = (i_j - 1, i_j)$, et on appelle une telle décomposition une **décomposition réduite** de σ .

Définition 2.10. Un **système de Coxeter** (W, S) est la donnée d'un groupe W et d'une partie S génératrice de W telle que $S = S^{-1}$, $1 \notin S$, tout élément s de S est d'ordre 2, et de plus, en notant $m(s, s')$ l'ordre de ss' avec s et s' dans S , la donnée de S et de l'ensemble des relations $(ss')^{m(s, s')} = 1$ pour tout $(s, s') \in S^2$ tel que $m(s, s')$ soit fini, constitue une **présentation** de W .

Le terme de présentation signifie que si W' est un groupe, $f : W' \rightarrow W$ un morphisme de groupes tel qu'il existe $h : S \rightarrow W'$ tel que $f(h(s)) = s$ et $(h(s)h(s'))^{m(s,s')} = 1$ pour tous $s, s' \in S$ avec $m(s, s')$ fini et $h(S)$ engendrant W' , alors f est injectif, donc un isomorphisme.

On dit alors que W est un **groupe de Coxeter**.

Ici par exemple, \mathfrak{S}_n est un groupe de Coxeter, avec pour partie génératrice

$$\{s_i = (i-1, i), 2 \leq i \leq n\}$$

Si (W, S) est un système de Coxeter, il satisfait la **condition d'échange** :

si $w \in W$ et $s \in S$ sont tels que $l(sw) \leq l(w)$, alors pour toute décomposition réduite $w = s_1 \dots s_q$ où $q = l(w)$, il existe $j \in \{1, \dots, q\}$ tel que

$$ss_1 \dots s_{j-1} = s_1 \dots s_{j-1} s_j$$

Nous pouvons à présent continuer la preuve.

Notons pour $i = 2, \dots, n$, $L_i : \mathbb{K}\mathfrak{S}_n \rightarrow \mathbb{K}\mathfrak{S}_n$ le morphisme d'espaces vectoriels tel que, pour tout $\tau \in \mathfrak{S}_n$,

$$L_i(\tau) = \begin{cases} s_i \tau & \text{si } l(s_i \tau) > l(\tau), \\ q \cdot s_i \tau + (q-1) \cdot \tau & \text{si } l(s_i \tau) < l(\tau). \end{cases}$$

Lemme 2.4. *Il existe un morphisme d'algèbres $L : H(q, n) \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{K}\mathfrak{S}_n)$ qui envoie T_i sur L_i pour tout $i = 2, \dots, n$.*

Preuve :

Il faut vérifier que les L_i satisfont les relations de la présentation de $H(q, n)$ (7), (8) et (9).

(9) : soit $i \in \{2, \dots, n\}$. Soit $\tau \in \mathfrak{S}_n$. Si $l(s_i \tau) > l(\tau)$, alors

$$\begin{aligned} L_i^2(\tau) &= L_i(s_i \tau) = q \cdot s_i^2 \tau + (q-1) \cdot s_i \tau \\ &= (q-1) \cdot s_i \tau + q \cdot \tau \\ &= ((q-1) \cdot L_i + q \cdot Id)(\tau) \end{aligned}$$

Si $l(s_i \tau) < l(\tau)$, alors comme $l(s_i^2 \tau) > l(s_i \tau)$

$$\begin{aligned} L_i^2(\tau) &= L_i(q \cdot s_i \tau + (q-1) \cdot \tau) = q \cdot s_i^2 \tau + (q-1) \cdot (q \cdot s_i \tau + (q-1) \tau) \\ &= (q-1) \cdot (q \cdot s_i \tau + (q-1) \tau) + q \cdot \tau \\ &= ((q-1) \cdot L_i + q \cdot Id)(\tau) \end{aligned}$$

On a donc bien (9) :

$$L_i^2 = (q-1) \cdot L_i + q$$

(7) et (8) :

Montrons que si $R_j \in \mathcal{L}(\mathbb{K}\mathfrak{S}_n)$ est défini pour $j = 2, \dots, n$ par :

$$R_j(\tau) = \begin{cases} \tau s_j & \text{si } l(\tau s_j) > l(\tau), \\ q \cdot \tau s_j + (q-1) \cdot \tau & \text{si } l(\tau s_j) < l(\tau). \end{cases}$$

Alors $L_i R_j = R_j L_i$ pour tous i, j .

En effet, pour i et $j \in \{2, \dots, n\}$, on distingue six cas :

1. si $l(s_i\tau s_j) = l(\tau) + 2$
Alors $L_i R_j(\tau) = L_i(\tau s_j) = s_i\tau s_j = R_j L_i(\tau)$
2. si $l(s_i\tau s_j) = l(\tau) - 2$
Un calcul identique montre l'égalité.
3. si $l(s_i\tau s_j) = l(\tau)$ et $l(s_i\tau) = l(\tau) + \epsilon$ et $l(\tau s_j) = l(\tau) + \epsilon'$ avec ϵ et $\epsilon' \in \{-1, +1\}$
Si $\epsilon \neq \epsilon'$, l'égalité résulte aussi d'un petit calcul.

Si $\epsilon = \epsilon' = +1$, notons $q = l(\tau)$. Soit $\tau = s_{i_1} \dots s_{i_q}$ une décomposition réduite de τ . Alors $s_{i_1} \dots s_{i_q} s_j$ est une décomposition réduite de τs_j puisque $l(\tau s_j) = q + 1$.

Ici, $(\mathfrak{S}_n, \{s_i \mid i = 2, \dots, n\})$ étant un système de Coxeter, il satisfait la condition d'échange : il existe $j \in \{1, \dots, q + 1\}$ tel que :

$$s_i s_{i_1} \dots s_{i_{j-1}} = s_{i_1} \dots s_{i_j}$$

Si on avait $j \leq q$, alors $s_i\tau = s_{i_1} \dots s_{i_{j-1}} s_{i_{j+1}} \dots s_q$, ce qui contredit le fait que $l(s_i\tau) = q + 1$.
Donc $j = q + 1$ et on en déduit $s_i\tau = \tau s_j$.

$$\begin{aligned} L_i R_j(\tau) &= L_i(\tau s_j) = L_i(\tau s_j) = q.s_i^2\tau + (q - 1).s_i\tau \\ &= q.\tau + (q - 1).s_i\tau \\ R_j L_i(\tau) &= R_j(s_i\tau) = q.s_i(\tau s_j) + (q - 1)s_i\tau \\ &= q.\tau + (q - 1).s_i\tau \end{aligned}$$

Si enfin $\epsilon = \epsilon' = -1$, la même propriété appliquée à τs_j nous donne : $s_i(\tau s_j) = (\tau s_j)s_j$, donc $\tau s_j = s_i\tau$. On a alors :

$$\begin{aligned} L_i R_j(\tau) &= q.L_i(\tau s_j) + (q - 1).L_i(\tau) = s_i\tau s_j + (q - 1)(q.s_i\tau + (q - 1).\tau) \\ &= s_i\tau s_j + (q - 1)(q.s_i\tau + (q - 1).\tau) \\ R_j L_i(\tau) &= q.R_j(s_i\tau) + (q - 1).R_j(\tau) = q.s_i\tau s_j + (q - 1)(q.\tau s_j + (q - 1)\tau) \\ &= s_i\tau s_j + (q - 1)(q.s_i\tau + (q - 1).\tau) \end{aligned}$$

Nous pouvons alors montrer les dernières relations.

Soit $w \in \mathfrak{S}_n$. Soit $w = s_{i_1} \dots s_{i_q}$ une décomposition réduite. Alors $w = R_{i_q} \dots R_{i_1}(Id)$. Notons $R = R_{i_q} \dots R_{i_1}$.

Si $|i - j| \geq 2$,

$$L_i L_j(w) = L_i L_j R(1) = R L_i L_j(Id) = R(s_i s_j)$$

Comme $|i - j| \geq 2$, $s_i s_j = s_j s_i$ et donc $L_i L_j(w) = L_j L_i(w)$.

De même,

$$L_{i+1} L_i L_{i+1}(w) = R L_{i+1} L_i L_{i+1}(Id) = R(s_{i+1} s_i s_{i+1}) = R(s_i s_{i+1} s_i)$$

donc $L_{i+1} L_i L_{i+1}(w) = L_i L_{i+1} L_i(w)$.

Nous pouvons désormais montrer l'indépendance des éléments de N_n . En effet, soit $M = U_2 \dots U_n \in N_n$. Alors si $U_i = T_i \dots T_{i-j}$, en notant $w_i = s_i \dots s_{i-j} = L(U_i)(Id)$, on a $L(M)(Id) = w_2 \dots w_n$. Or comme $\mathbb{K}\mathfrak{S}_n = H(1, n)$, les $n!$ éléments de N_n s'identifient exactement aux $n!$ éléments de $\mathfrak{S}_n = H(1, n)$, donc tout élément w de $\mathfrak{S}_n = H(1, n)$ s'écrit $w = w_2 \dots w_n$ comme précédemment, et ces éléments sont par définition linéairement indépendants sur $\mathbb{K}\mathfrak{S}_n$. Comme $X \rightarrow L(X)(Id)$ est \mathbb{K} -linéaire, a fortiori les $n!$ éléments $M \in N_n$ sont indépendants, ce qui achève la preuve du théorème.

□

Théorème 2.3.2.

$$\begin{aligned} \phi : H(q, n) \oplus H(q, n) \otimes_{H(q, n-1)} H(q, n) &\longrightarrow H(q, n+1) \\ a + \sum_i b_i \otimes c_i &\longrightarrow a + \sum_i b_i T_{n+1} c_i \end{aligned}$$

est un isomorphisme de $H(q, n)$ -bimodules.

Preuve :

ϕ est bien définie car si $b, c \in H(q, n)$ et $u \in H(q, n-1)$, $\phi(bu \otimes c) = buT_{n+1}c = bT_{n+1}uc = \phi(b \otimes uc)$ puisque $u \in H(q, n-1)$ et T_{n+1} commutent.

ϕ est surjective puisque tout élément de $H(q, n+1)$ est une combinaison linéaire de monômes dans lesquels T_{n+1} apparaît au plus une fois, donc de la forme $a + \sum_i b_i T_{n+1} c_i$.

On sait que N_{n+1} est une base de $H(q, n+1)$ comme \mathbb{K} -espace vectoriel et

$$\begin{aligned} \psi : H(q, n+1) &\longrightarrow H(q, n) \oplus H(q, n) \otimes_{H(q, n-1)} H(q, n) \\ M = U_2 \dots U_n U_{n+1} &\longrightarrow \begin{cases} U_2 \dots U_n \otimes T_n T_{n-1} \dots T_{n-k} & \text{si } U_{n+1} = T_{n+1} T_n T_{n-1} \dots T_{n-k}, \\ M & \text{si } U_{n+1} = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Alors ψ défini sur la base de $H(q, n+1)$ est clairement l'inverse de ϕ .

□

2.4 Algèbres de Hecke de type B_n

Une présentation de l'algèbre de Hecke de type B_n , notée $HB_n(p^2, q^2)$ avec p et q des indéterminées, avec T_1, \dots, T_n ses générateurs, est :

$$T_i T_j = T_j T_i \text{ pour } |i - j| \geq 2 \quad (11)$$

$$T_i T_{i+1} T_i = T_{i+1} T_i T_{i+1} \text{ pour } i = 2, \dots, n-1 \quad (12)$$

$$T_1 T_2 T_1 T_2 = T_2 T_1 T_2 T_1 \quad (13)$$

$$T_1^2 = (p - p^{-1}) T_1 + 1 \quad (14)$$

$$T_i^2 = (q - q^{-1}) T_i + 1 \text{ pour } i = 2, \dots, n \quad (15)$$

3 Représentation des algèbres de Hecke de type A_{n-1}

3.1 Le système de racines A_{n-1} et son groupe de Weyl

Dans \mathbb{R}^n , on considère e_1, \dots, e_n la base canonique et on munit \mathbb{R}^n du produit scalaire usuel. On note L_n le réseau engendré par les e_i . Posons $R = \{e_i - e_j, 1 \leq i, j \leq n, i \neq j\}$. On remarque que ce sont les éléments α dans L_n qui sont orthogonaux à $\gamma = e_1 + e_2 + \dots + e_n$ et satisfont $(\alpha, \alpha) = 2$. Il est facile de vérifier que R satisfait les conditions de système de racines dans γ^\perp (vu dans \mathbb{R}^n). On l'appelle **le système de racines** A_{n-1} . Les éléments $\alpha_i = e_i - e_{i+1}, 1 \leq i \leq n-1$ forment une base de R .

On identifie le groupe symétrique \mathfrak{S}_n avec son action sur \mathbb{R}^n par permutation des e_1, \dots, e_n . La réflexion par rapport à α_i correspond à $(i, i+1)$. Comme \mathfrak{S}_n est engendré par ces transpositions, le groupe de Weyl s'identifie à \mathfrak{S}_n .

3.2 Représentation seminormale du groupe de Weyl \mathfrak{S}_n

Sauf mention contraire, les notations de ce paragraphe seront celles du paragraphe 1.3 .

La chaîne des systèmes de racines $A_0 \subseteq A_1 \subseteq \dots \subseteq A_{n-1}$ correspond à la chaîne des groupes de Weyl

$$\mathfrak{S}_1 \subseteq \mathfrak{S}_2 \subseteq \dots \subseteq \mathfrak{S}_n$$

On désigne les représentations irréductibles de \mathfrak{S}_k par $W^\lambda = \mathbb{C}\mathfrak{S}_k \cdot c_\lambda$, où c_λ est le symétriseur de Young correspondant.

Ici on énonce sans démonstration la loi de la ramification pour A_{n-1} qui vient de la théorie classique de représentations du groupe symétrique. On l'obtient en utilisant des outils comme le formule de Frobenius, la règle de Littlewood-Richardson, et la réciprocity de Frobenius qui explique le lien entre les représentations induites et les restrictions de représentations.

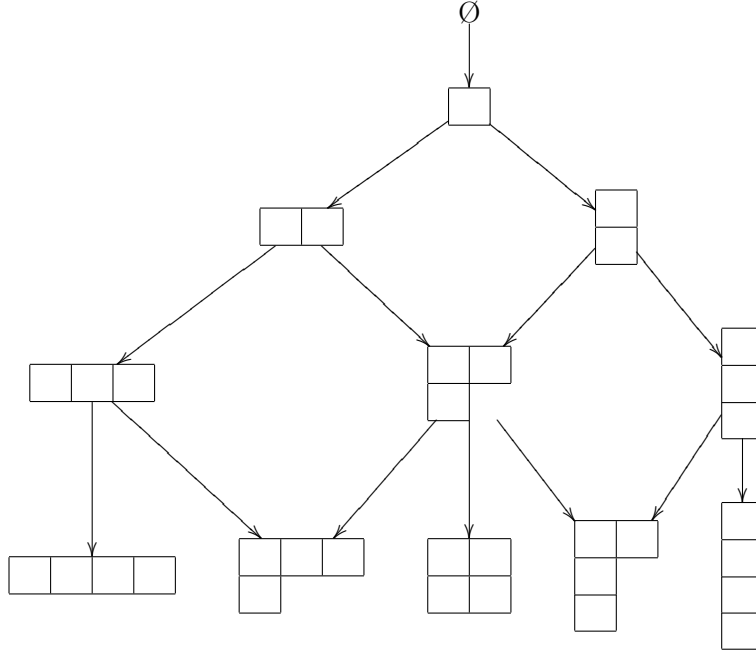
Théorème 3.2.1 (Loi de la ramification pour \mathfrak{S}_n). *Soient λ une partition de k et W^λ la représentation irréductible de \mathfrak{S}_k qui est indexée par λ . Alors la décomposition de W^λ en somme directe de représentations irréductibles de \mathfrak{S}_{k-1} est donnée par*

$$W^\lambda \downarrow_{\mathfrak{S}_{k-1}}^{\mathfrak{S}_k} \simeq \bigoplus_{\mu \in \lambda^-} W^\mu$$

où λ^- désigne l'ensemble des partitions de $k-1$ qui sont obtenues en enlevant une case de λ . Remarquons qu'en plus la restriction de \mathfrak{S}_k à \mathfrak{S}_{k-1} n'a pas de multilicité.

□

Ainsi, on obtient le graphe Γ pour la chaîne $\mathfrak{S}_1 \subseteq \mathfrak{S}_2 \subseteq \dots \subseteq \mathfrak{S}_n$. Par exemple, pour $n = 4$, Γ est comme ci-dessous.



On remarque que deux sommets de Γ sont reliés par au plus une arête, donc un chemin dans Γ est caractérisé par les sommets par lesquels il passe. Pour chaque chemin dans ce graphe ($\lambda^{(0)} \rightarrow \dots \rightarrow \lambda^{(n)}$), si on place i dans la case que l'on a ajoutée à $\lambda^{(i-1)}$ pour obtenir $\lambda^{(i)}$, on obtient ainsi un tableau de Young standard de forme $\lambda^{(n)}$. Donc dans la suite, on identifie de cette façon les chemins dans Γ et les tableaux de Young standards de forme $\lambda^{(n)}$.

Dans ce cas particulier, ce qui est remarquable est que pour nous ramener à la condition de la proposition 1.3.1, il suffit de prendre pour Z_k ($2 \leq k \leq n$) l'ensemble formé d'un seul élément

$$z_k = \sum_{1 \leq i < j \leq k} (i, j)$$

qui est dans le centre de $\mathbb{C}\mathfrak{S}_k$. D'après la relation $\mathbb{C}\mathfrak{S}_1 \subseteq \mathbb{C}\mathfrak{S}_2 \subseteq \dots \subseteq \mathbb{C}\mathfrak{S}_n$, les z_k ($2 \leq k \leq n$) forment une partie commutative de $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$.

On introduit ici **les éléments de Jucys-Murphy**

$$m_k = z_k - z_{k-1} = \sum_{i=2}^k (i-1, k) \text{ pour } 2 \leq k \leq n$$

Ces éléments, comme combinaisons linéaires des z_k , commutent entre eux.

Définition 3.1. Le **contenu** d'une case b dans un diagramme de Young λ est donné par

$$ct(b) = j - i, \text{ si } b \text{ est à la position } (i, j) \text{ dans } \lambda.$$

Proposition 3.2.1. Pour tout $1 \leq k \leq n$ et toute partition μ telle que $|\mu| = k$,

$$c_k(\mu) = \chi^\mu(z_k) / \chi^\mu(1) = \sum_{b \in \mu} ct(b)$$

où χ^μ désigne le caractère de \mathfrak{S}_k dans la représentation W^μ .

Preuve :

On désigne les cases dans un diagramme de Young par leur position (i, j) . Pour μ une partition telle que $|\mu| = k$, on note encore son diagramme de Young correspondant par μ et on introduit les notations ci-dessous

$$\begin{aligned} r &= \max\{i; (i, i) \in \mu\} \\ \text{pour } 1 \leq i \leq r, \quad a_i &\text{ est le cardinal de } \{j > r - i + 1; (j, r - i + 1) \in \mu\} \\ b_i &\text{ est le cardinal de } \{j > r - i + 1; (r - i + 1, j) \in \mu\} \end{aligned}$$

Alors on a la formule

$$\chi^\mu((1, 2)) = \frac{\dim W^\mu}{k(k-1)} \sum_{i=1}^r (b_i(b_i + 1) - a_i(a_i + 1)) \quad (16)$$

Nous renvoyons à l'appendice pour une démonstration de cette formule.

En développant, on a

$$\sum_{b \in \mu} ct(b) = \sum_{i=1}^r \left(\sum_{j>i, (j,i) \in \mu} (i-j) + \sum_{j>i, (i,j) \in \mu} (j-i) \right) = \sum_{i=1}^r ((-1 - \dots - a_i) + (1 + \dots + b_i))$$

D'autre part, $c_k(\mu) = \chi^\mu(z_k)/\chi^\mu(1) = \frac{C_k^2 \chi^\mu((1,2))}{\dim W^\mu}$, l'égalité découle de la formule (16).

□

D'après la définition 1.4, le poids d'un tableau de Young standard $(\lambda^{(1)} \rightarrow \dots \rightarrow \lambda^{(n)})$, où $|\lambda^{(k)}| = k$ est

$$wt(L) = (c_1(\lambda^{(1)}), \dots, c_n(\lambda^{(n)}))$$

Comme $c_k(\lambda^{(k)}) = \sum_{i=1}^k ct(L(i))$, $wt(L)$ est complètement déterminé par le n-uplet

$$\widetilde{wt}(L) = (ct(L(1)), \dots, ct(L(n)))$$

Proposition 3.2.2. *Chaque tableau de Young standard $L = (\lambda^{(1)} \rightarrow \dots \rightarrow \lambda^{(n)})$ est caractérisé par son poids.*

Preuve :

Notons que deux cases dans une partition λ ont le même contenu si et seulement si elles sont dans une même diagonale. Si $\lambda^{(i)}$ est une partition, les $\lambda^{(i+1)}$ obtenus à partir de $\lambda^{(i)}$ sont donc distingués par le contenu de la case ajoutée. Donc par récurrence, le tableau de Young L est complètement déterminé par $\widetilde{wt}(L)$, donc par son poids.

□

Maintenant on peut commencer à **construire une représentation seminormale de** $\mathfrak{S}_1 \subseteq \mathfrak{S}_2 \subseteq \dots \subseteq \mathfrak{S}_n$.

Soit $P_1 \subseteq P_2 \subseteq \dots \subseteq P_n$ l'algèbre des chemins du graphe Γ de $\mathfrak{S}_1 \subseteq \mathfrak{S}_2 \subseteq \dots \subseteq \mathfrak{S}_n$. Pour $\lambda \in \mathcal{G}_n$,

$$V^\lambda = \text{Vect}_{\mathbb{C}}\{v_L \text{ tq } L \text{ est un tableau de Young standard de forme } \lambda\}$$

Comme avant, les v_L forment une base seminormale pour la représentation V^λ de P_n . D'après lemme 1.1, pour tout isomorphisme Φ entre P_n et $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$ tel que $\Phi(P_k) = \mathbb{C}\mathfrak{S}_k$, on a, si $L = (\lambda^{(1)} \rightarrow \dots \rightarrow \lambda^{(n)})$:

$$z_k v_L = c_k(\lambda^{(k)}) v_L$$

et

$$m_k v_L = (c_k(\lambda^{(k)}) - c_{k-1}(\lambda^{(k-1)}))v_L = ct(L(k))v_L \quad (17)$$

On voudrait savoir comment les images de \mathfrak{S}_n par Φ^{-1} agissent sur V^λ . En effet, il suffit de connaître l'action de $\Phi^{-1}(s_i)$, où s_i ($2 \leq i \leq n$) sont les générateurs de \mathfrak{S}_n . Plus précisément, étant donné L un tableau de Young de forme λ tel que $|\lambda| = n$, on note $(s_i)_{M,L}$ le coefficient de v_M dans l'expression de $\Phi^{-1}(s_i)v_L$ comme combinaison linéaire des éléments dans la base seminormale de V_λ . D'après la proposition 3.2.2 et la proposition 1.3.1, z_k et les constantes c_k déterminent les $(s_i)_{L,L}$ et les $(s_i)_{M,L}$ ($M \neq L$) à une constante près. Ca nous permet de donner un tel Φ explicite.

Dans toute la suite, L est un tableau de Young standard de forme λ tel que $|\lambda| = n$. On rappelle que pour $s \in \mathfrak{S}_n$, sL désigne le tableau obtenu en remplaçant dans L l'entier j par son image $s(j)$. On note par convention $v_{sL} = 0$ si sL n'est plus standard. Et on notera par abus $\Phi^{-1}(s_i)v_L$ par $s_i v_L$.

Pour $i = 2$, $s_2 = m_2$, l'action est donnée par formule (17). Pour $i > 2$, on a besoin des lemmes suivant :

Lemme 3.1.

$$s_i v_L = (s_i)_{L,L} v_L + (s_i)_{s_i L, L} v_{s_i L}$$

i.e. $s_i v_L$ est indépendant de tous les v_M sauf $M = L$ et $M = s_i L$

Preuve :

Pour $i = n$, posons

$$p_k(\lambda^{(k)}) = \prod_{c_k(\mu) \neq c_k(\lambda^{(k)}) \text{ et } \mu \in \mathcal{G}_k} \frac{z_k - c_k(\mu)}{c_k(\lambda^{(k)}) - c_k(\mu)}$$

et

$$P_{L[n-2]} = \prod_{k=1}^{n-2} p_k(\lambda^{(k)})$$

alors si $M = (\mu^{(1)} \rightarrow \dots \rightarrow \mu^{(n)})$ est un autre chemin de Γ ,

$$P_{L[n-2]} v_M = \begin{cases} v_M & \text{si } \mu^{(k)} = \lambda^{(k)}, \text{ pour } 1 \leq k \leq n-2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Notons qu'il existe seulement deux tableaux vérifiant $\mu^{(k)} = \lambda^{(k)}$, pour $1 \leq k \leq n-2$, à savoir L et $s_n L$. Donc

$$P_{L[n-2]} v_M = \begin{cases} v_M & \text{si } M = L, \text{ ou } s_n L \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$P_{L[n-2]}$ est dans $\mathbb{C}\mathfrak{S}_{n-2}$, donc il commute avec s_n . D'où

$$s_n v_L = s_n (P_{L[n-2]} v_L) = P_{L[n-2]} (s_n v_L) = (s_n)_{L,L} v_L + (s_n)_{s_n L, L} v_{s_n L}$$

La démonstration pour le cas $2 < i < n$ est identique. □

Lemme 3.2.

$$(s_i)_{L,L} = \frac{1}{ct(L(i)) - ct(L(i-1))}$$

Preuve :

Pour $j < i$, $s_i(j-1, i-1)s_i^{-1} = (j-1, i)$. Un calcul facile donne : $s_i m_{i-1} = m_i s_i - 1$. On fait agir les éléments des deux membres sur v_L ,

$$\begin{aligned} s_i m_{i-1} v_L &= ct(L(i-1)) s_i v_L = ct(L(i-1))(s_i)_{L,L} v_L + ct(L(i-1))(s_i)_{s_i L, L} v_{s_i L} \\ m_i s_i v_L - v_L &= (s_i)_{L,L} ct(L(i)) v_L + (s_i)_{s_i L, L} ct(s_i L(i)) v_{s_i L} - v_L \end{aligned}$$

En comparant les coefficients de v_L , on obtient le résultat voulu. □

Les deux lemmes précédents sont vrais pour tout isomorphisme Φ entre P_n et $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$ tel que $\Phi(P_k) = \mathbb{C}\mathfrak{S}_k$.

Lemme 3.3. *On peut normaliser un quelconque Φ comme ci-dessus pour obtenir un isomorphisme $\bar{\Phi}$ ayant les mêmes propriétés et tel que les coefficients satisfont $(s_i)_{s_i L, L} = 1 + (s_i)_{L, L}$.*

Preuve :

Supposons que $s = \sum_{M,L} (s)_{M,L} e_{M,L}$, avec $e_{M,L} = \Phi^{-1}(E_{M,L})$ pour tout $s \in \mathbb{C}\mathfrak{S}_n$. En particulier d'après le lemme 3.1,

$$s_i = \sum_L ((s_i)_{L,L} e_{L,L} + (s_i)_{s_i L, L} e_{s_i L, L})$$

où $(s_i)_{L,L}$ est donné par le lemme 3.2. Remarquons que si $1 + (s_i)_{L,L} = 0$, alors $ct(L(i)) - ct(L(i-1)) = -1$, ce qui signifie que $L(i)$ et $L(i-1)$ sont placés dans des diagonales limitrophes du tableau de Young. Dans ce cas-là, si L est standard, forcément $s_i L$ n'est plus standard.

Maintenant on définit un morphisme $\bar{\Phi}$ matriciellement en multipliant Φ par une matrice diagonale telle que

$$\begin{aligned} \bar{\Phi} : P_n &\rightarrow \mathbb{C}\mathfrak{S}_n \\ E_{M,L} &\mapsto \bar{e}_{M,L} \end{aligned}$$

et que pour tout L ,

$$\begin{aligned} \bar{e}_{L,L} &= e_{L,L} \\ \bar{e}_{s_i L, L} &= \kappa_{s_i L, L} e_{s_i L, L} = \frac{(s_i)_{s_i L, L}}{1 + (s_i)_{L, L}} e_{s_i L, L} \quad \text{si } s_i L \text{ reste standard} \\ \bar{e}_{s_i L, L} &= 0 \quad \text{sinon.} \end{aligned}$$

Puis on étend à tout (M, L) par

$$\bar{e}_{M,L} = \prod_{j=1}^t \bar{e}_{s_j \cdots s_1 L, s_{j-1} \cdots s_1 L}$$

où $M = sL = s_t \cdots s_1 L$.

Grâce à la remarque 1.2, pour montrer le lemme, il suffit de vérifier les relations entre les coefficients. Pour $M = s_i L$, la relation $\kappa_{M,L} \kappa_{L,M} = 1$ correspond ici à

$$\frac{(s_i)_{s_i L, L}}{1 + (s_i)_{L, L}} \cdot \frac{(s_i)_{L, s_i L}}{1 + (s_i)_{s_i L, s_i L}} = 1$$

On utilise la relation $s_i^2 = 1$ et on fait agir les deux membres de cette équation sur v_L selon $\bar{\Phi}$. On compare les coefficients de v_L et $v_{s_i L}$. Ils nous donnent les équations :

$$(s_i)_{L,L}^2 + (s_i)_{s_i L, L} (s_i)_{L, s_i L} = 1 \quad \text{et} \quad (s_i)_{s_i L, s_i L} = -(s_i)_{L, L}$$

Donc

$$(s_i)_{s_i L, L} (s_i)_{L, s_i L} = (1 + (s_i)_{L, L}) (1 + (s_i)_{s_i L, s_i L})$$

qui est exactement la relation voulue. De même, si on fait agir $s_i s_j = s_j s_i$ pour $|i - j| > 1$ et $s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}$ et si on compare les coefficients correspondants, on obtient les relations

$$\begin{aligned} \kappa_{s_j s_i L, s_i L} \kappa_{s_i L, L} &= \kappa_{s_i s_j L, s_j L} \kappa_{s_j L, L}, \text{ pour } |i - j| > 1 \\ \kappa_{s_i s_{i+1} s_i L, s_{i+1} s_i L} \kappa_{s_{i+1} s_i L, s_i L} \kappa_{s_i L, L} &= \kappa_{s_{i+1} s_i s_{i+1} L, s_i s_{i+1} L} \kappa_{s_i s_{i+1} L, s_{i+1} L} \kappa_{s_{i+1} L, L} \end{aligned}$$

Ainsi la définition pour $\bar{e}_{sL, L}$ avec s quelconque ne dépend pas de l'expression par les générateurs et les relations $\kappa_{M, L} \kappa_{L, N} = \kappa_{M, N}$, $\kappa_{M, L} \kappa_{L, M} = 1$ pour M, N, L quelconques sont satisfaites automatiquement par définition. □

Théorème 3.2.2 (Young). *Soit λ une partition telle que $|\lambda| = n$. Pour chaque générateur s_2, \dots, s_n de \mathfrak{S}_n , on définit son action sur V^λ par*

$$s_i v_L = (s_i)_{L, L} v_L + (1 + (s_i)_{L, L}) v_{s_i L}, \text{ pour } 2 \leq i \leq n$$

où

$$(s_i)_{L, L} = \frac{1}{ct(L(i)) - ct(L(i-1))}$$

et on définit par convention $v_{s_i L} = 0$ lorsque $s_i L$ n'est pas standard. Alors cette action s'étend à une action de \mathfrak{S}_n bien définie sur V_λ .

Preuve :

En combinant les trois lemmes précédents, il suffit de prendre l'isomorphisme Φ défini dans le dernier lemme. □

Théorème 3.2.3 (Young). *On prend V^λ et l'action de \mathfrak{S}_n dessus comme dans le théorème précédent. Alors les $\{V^\lambda, \text{ pour } \lambda \text{ partition de longueur } n\}$ forment un système complet de représentations irréductibles du groupe \mathfrak{S}_n , et pour chaque λ ,*

$$\{v_L \text{ pour tout } L \text{ tableau de Young standard de forme } \lambda\}$$

est une base seminormale pour la représentation V^λ de \mathfrak{S}_n .

Preuve :

On raisonne par récurrence sur n . Pour $n = 2$, $\mathfrak{S}_2 = \{1, z_2\}$. Dans ce cas, V^λ est de dimension 1, donc d'après la formule, $z_2 v_L = c_2(\lambda) v_L$ et $c_2(\lambda) = \frac{\chi_{W^\lambda}(z_2)}{\chi_{W^\lambda}(1)} = \chi_{W^\lambda}(z_2)$. Donc V^λ et W^λ sont deux représentations irréductibles de \mathfrak{S}_2 avec le même caractère. Par suite, elles sont équivalentes.

On suppose le résultat vrai pour $n - 1$. Puis, par la règle de restriction pour A_{n-1} pour la représentation de groupe \mathfrak{S}_n

$$W^\lambda \downarrow_{\mathfrak{S}_{k-1}}^{\mathfrak{S}_k} \simeq \bigoplus_{\mu \in \lambda^-} W^\mu$$

et la règle de restriction pour la représentation d'algèbre de chemin

$$V^\lambda \simeq \bigoplus_{\mu \in \mathcal{G}_{n-1}} V^\mu$$

l'hypothèse de récurrence appliquée aux μ avec $|\mu| = n - 1$ donne $V^\lambda \simeq W^\lambda$. Le théorème en découle. □

3.3 Représentation seminormale de l'algèbre de Hecke $HA_{n-1}(q^2)$

On a défini l'algèbre de Hecke $HA_{n-1}(q^2)$ dans la section 2.3. On veut trouver la représentation seminormale de cette algèbre en utilisant celle de son groupe de Weyl \mathfrak{S}_n . On essaie tout d'abord de trouver l'analogie des éléments de Jucys-Murphy.

Pour chaque $2 \leq k \leq n$, définissons

$$M_k = T_k \dots T_3 T_2 T_2 T_3 \dots T_k$$

et

$$\zeta_k = M_k M_{k-1} \dots M_2$$

Proposition 3.3.1. ζ_k est dans le centre de $HA_{k-1}(q^2)$

Preuve :

(1) Montrons d'abord que pour $i+1 \leq j \leq k$, $T_i M_j = M_j T_i$.

$$\begin{aligned} M_i &= T_i M_{i-1} T_i \\ T_i M_j &= T_j \dots T_i T_{i+1} T_i M_{i-1} T_i T_{i+1} \dots T_j \\ &= T_j \dots T_{i+1} T_i T_{i+1} M_{i-1} T_i T_{i+1} \dots T_j \\ &= T_j \dots T_{i+1} T_i M_{i-1} T_i T_{i+1} T_i \dots T_j = M_j T_i \end{aligned}$$

(2) Pour $j \geq 3$, montrons par récurrence $T_j M_j M_{j-1} = M_j M_{j-1} T_j$. On vérifie directement pour $j = 3$ et supposons le résultat pour j , alors

$$\begin{aligned} M_{j+1} M_j T_{j+1} &= T_{j+1} M_j T_{j+1} M_j T_{j+1} \\ &= T_{j+1} T_j T_{j+1} M_{j-1} T_j M_{j-1} T_{j+1} T_j T_{j+1} \\ &= T_j T_{j+1} T_j M_{j-1} T_j M_{j-1} T_j T_{j+1} T_j \\ &= T_j T_{j+1} T_j^2 M_{j-1} T_j M_{j-1} T_{j+1} T_j \\ &= T_j T_{j+1} T_j^2 M_{j-1} T_j T_{j+1} M_{j-1} T_j \\ &= T_{j+1} T_j M_{j+1} M_{j-1} T_j \\ &= T_{j+1} T_j M_{j+1} M_{j-1} T_j = T_{j+1} M_{j+1} M_j \end{aligned}$$

où la quatrième égalité découle de l'hypothèse de récurrence et la dernière égalité de l'étape (1).

Maintenant, montrons la proposition. Pour tout $j \leq k$,

$$\begin{aligned} T_j \zeta_k &= M_k \dots T_j M_j M_{j-1} \dots M_2 \\ &= M_k \dots M_j M_{j-1} T_j \dots M_2 = \zeta_k T_j. \end{aligned}$$

□

Puisque $HA_{n-2}(q^2) \subset HA_{n-1}(q^2)$, les ζ_k ($2 \leq k \leq n$) commutent entre eux. Notons que pour $i < j$, $M_i M_j \zeta_{j-1} = M_j M_i \zeta_{j-1}$, donc les M_k ($2 \leq k \leq n$) forment aussi une partie commutative.

Remarque 3.1. D'après un calcul facile utilisant itérativement la relation $T_i^2 = (q - q^{-1})T_i + 1$, on obtient

$$\frac{M_k - 1}{q - q^{-1}} = \sum_{i=2}^k T_{(i-1,k)}$$

où $T_{(i-1,k)} = T_k T_{k-1} \dots T_{i+1} T_i T_{i+1} \dots T_k$. Il est clair que ce sont les analogues des éléments de Jucys-Murphy définis pour \mathfrak{S}_k .

Théorème 3.3.1. Soit $\mathbb{K} = \mathbb{C}(q)$. Alors $HA_{n-1}(q^2)$ est une algèbre semi-simple scindée et il existe un \mathbb{K} -isomorphisme d'algèbres

$$\tilde{\Psi} : HA_{n-1}(q^2) \rightarrow \mathbb{K}\mathfrak{S}_n$$

tel que $\tilde{\Psi}(HA_{k-1}(q^2)) = \mathbb{K}\mathfrak{S}_k$ pour $1 \leq k \leq n$.

Nous renvoyons à [1, Chapitre IV, §2, Ex. 23-24] pour la démonstration de ce théorème. En fait, l'idée directrice est la même que celle de la démonstration du théorème 2.3.1.

□

Cet isomorphisme nous donne une bijection entre les représentations irréductibles de $\mathbb{K}\mathfrak{S}_n$ et les représentations irréductibles de $HA_{n-1}(q^2)$. De plus, tout caractère χ d'une représentation irréductible de $HA_{n-1}(q^2)$ prend ses valeurs dans $\mathbb{C}[q, q^{-1}]$. En particulier, quand on spécialise q à 1, $[\chi(T_i)]|_{q=1} = \tilde{\chi}(s_i)$ où $\tilde{\chi}$ est le caractère de la représentation irréductible de \mathfrak{S}_n correspondante.

Grâce à ce lien entre l'algèbre de Hecke et son groupe de Weyl, on peut maintenant procéder par analogie avec $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$ pour obtenir la représentation seminormale de $HA_{n-1}(q^2)$.

On prend $P_1 \subseteq P_2 \subseteq \dots \subseteq P_n$ l'algèbre des chemins du graphe Γ de $\mathfrak{S}_1 \subseteq \mathfrak{S}_2 \subseteq \dots \subseteq \mathfrak{S}_n$,

$$V^\lambda = \text{Vect}_{\mathbb{K}}\{v_L \text{ tq } L \text{ est un tableau de Young standard de forme } \lambda\}$$

et les isomorphismes

$$\Psi = \tilde{\Psi}^{-1} \circ \tilde{\Phi} : P_n \rightarrow HA_{n-1}(q^2)$$

tels que $\Psi(P_k) = HA_{k-1}(q^2)$, où $\tilde{\Phi}$ est l'extension naturelle du \mathbb{C} -isomorphisme Φ en un \mathbb{K} -isomorphisme et $\tilde{\Psi}$ l'isomorphisme du théorème. On a d'abord la proposition suivante :

Proposition 3.3.2. Soit $\rho : HA_{n-1}(q^2) \rightarrow \mathbb{K}^{m \times m}$ une représentation irréductible de $HA_{n-1}(q^2)$. On suppose qu'elle correspond à la représentation irréductible V^λ de \mathfrak{S}_n de caractère χ^λ . Alors

$$\rho(\zeta_n) = q^{\frac{2\chi^\lambda(z_n)}{\chi^\lambda(1)}} \cdot Id_{m \times m}$$

Par conséquent, si $L = (\lambda^{(1)} \rightarrow \dots \rightarrow \lambda^{(n)})$ est un tableau de Young standard, on a

$$\zeta_k v_L = q^{2c_k(\lambda^{(k)})} v_L$$

Preuve :

Comme ζ_n est dans le centre de $HA_{n-1}(q^2)$, il existe c dans \mathbb{K} tel que $\rho(\zeta_n) = c \cdot Id_{m \times m}$. Prenons le déterminant des deux membres :

$$c^m = \det(\rho(\zeta_n)) = \det(\rho(M_n M_{n-1} \dots M_2)) = \prod_{j=2}^n \left(\prod_{i=2}^j \det \rho(T_i) \right)^2$$

Puisque $(T_i - q)(T_i + q^{-1}) = 0$, les valeurs propres de T_i sont q et $-q^{-1}$. On suppose que leur multiplicités sont respectivement a_i et b_i . Donc

$$\chi^\lambda(T_i) = a_i q - b_i q^{-1}$$

On spécialise à $q = 1$:

$$\begin{aligned} \chi^\lambda(s_i) &= a_i - b_i \\ \det \rho(T_i) &= q^{\chi^\lambda(s_i)} (-1)^{b_i} \\ c^m &= q^{2(\sum_{j=2}^n \sum_{i=2}^j \chi^\lambda(s_i))} (-1)^{2(\sum_{j=2}^n \sum_{i=2}^j b_i)} \\ &= q^{2\chi^\lambda(z_n)} \end{aligned}$$

De nouveau, en faisant $q = 1$ dans $\rho(\zeta_n)$, on obtient l'identité, donc $c > 0$ et

$$c = q^{\frac{2\chi^\lambda(z_n)}{m}} = q^{\frac{2\chi^\lambda(z_n)}{\chi^\lambda(1)}}$$

□

Ainsi on a

$$M_k v_L = \zeta_k (\zeta_{k-1})^{-1} v_L = q^{2ct(L(k))} v_L$$

et on note dans la suite $q^{2ct(L(k))} = CT(L(k))$.

Donnons nous les analogues des lemmes 3.2.1 à 3.2.3 :

Lemme 3.4.

$$T_i v_L = (T_i)_{L,L} v_L + (T_i)_{s_i L, L} v_{s_i L}$$

i.e. $T_i v_L$ est indépendant de tous les v_M sauf $M = L$ et $M = s_i L$

Preuve :

Il suffit de remplacer $p_k(\lambda^{(k)})$ dans la démonstration du lemme 3.2.1 par

$$\tilde{p}_k(\lambda^{(k)}) = \prod_{c_k(\mu) \neq c_k(\lambda^{(k)}) \text{ et } \mu \in \mathcal{G}_k} \frac{\zeta_k - q^{2c_k(\mu)}}{q^{2c_k(\lambda^{(k)})} - q^{2c_k(\mu)}}$$

.

□

Lemme 3.5.

$$(T_i)_{L,L} = \frac{q - q^{-1}}{1 - \frac{CT(L(i-1))}{CT(L(i))}}$$

Preuve :

Notons que $M_i = T_i M_{i-1} T_i$. On le réécrit comme

$$M_i^{-1} T_i M_{i-1} = T_i^{-1} = T_i - (q - q^{-1}),$$

on fait agir les deux membres sur v_L , puis la comparaison des coefficients de v_L donne le résultat.

□

Lemme 3.6. *Tout Ψ peut se normaliser en un isomorphisme $\bar{\Psi}$ vérifiant les mêmes propriétés et tel que ses coefficients satisfont $(T_i)_{s_i L, L} = q^{-1} + (T_i)_{L, L}$.*

Preuve :

L'idée est complètement identique, on remplace simplement les vérifications pour les relations de \mathfrak{S}_i par celles de $HA_{i-1}(q^2)$.

□

Théorème 3.3.2 (Hoefsmit, Wenzl). *Soit λ une partition telle que $|\lambda| = n$. Pour chaque générateur T_2, \dots, T_n de $HA_{n-1}(q^2)$, on définit son action sur V^λ par*

$$T_i v_L = (T_i)_{L,L} v_L + (q^{-1} + (T_i)_{L,L}) v_{s_i L}, \text{ pour } 2 \leq i \leq n$$

où

$$(T_i)_{L,L} = \frac{q - q^{-1}}{1 - \frac{CT(L(i-1))}{CT(L(i))}}$$

et on définit par convention $v_{s_i L} = 0$ lorsque $s_i L$ n'est pas standard. Alors cette action s'étend à une action de $HA_{n-1}(q^2)$ bien définie sur V^λ .

Preuve :

De nouveau, on combine les trois lemmes précédents et on prend l'isomorphisme Ψ défini dans le dernier lemme.

□

Théorème 3.3.3 (Hoefsmit, Wenzl). *On prend V^λ muni de l'action de $HA_{n-1}(q^2)$ comme dans le théorème précédent. Alors les $\{V^\lambda, \text{ pour } \lambda \text{ partition de longueur } n\}$ forment un système complet de représentations irréductibles de $HA_{n-1}(q^2)$ et pour tout λ ,*

$$\{v_L \text{ tq } L \text{ est un tableau de Young standard de forme } \lambda\}$$

est une base seminormale de V^λ comme représentation de $HA_{n-1}(q^2)$.

Preuve :

Ce théorème découle directement les théorèmes 3.2.3, 3.3.1 et 3.3.2.

□

4 Représentation des algèbres de Hecke de type B_n

4.1 Le système de racines B_n et son groupe de Weyl

Dans \mathbb{R}^n , toujours muni de sa base canonique e_1, \dots, e_n et du produit scalaire usuel, on appelle le **système de racines** B_n le système dont les $2n^2$ racines sont $\{+e_i, -e_i, 1 \leq i \leq n, e_i - e_j, e_i + e_j, -e_i - e_j, 1 \leq i, j \leq n, i \neq j\}$. Une base de B_n est donnée par $\alpha_1 = e_1, \alpha_2 = e_2 - e_1, \dots, \alpha_n = e_n - e_{n-1}$.

Le groupe de Weyl correspondant, noté WB_n , s'identifie au groupe des permutations signées de $\{1, \dots, n\}$. Il est engendré par les permutations de \mathfrak{S}_n qui agissent comme précédemment, et des éléments de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ qui agissent en échangeant les signes. Plus précisément, si $\tau_i = (1, \dots, -1, \dots, 1) \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ où le -1 est en position i , alors

$$\tau_i(e_j) = \begin{cases} e_j & \text{si } i \neq j, \\ -e_i & \text{si } i = j. \end{cases}$$

En effet, la réflexion par rapport à α_1 , notée s_1 , est bien l'action de τ_1 , tandis que les réflexions de vecteurs α_i pour $2 \leq i \leq n$, notées s_i , correspondent comme précédemment à l'action de la transposition $(i-1, i)$. Les $s_i, 1 \leq i \leq n$ engendrent un groupe isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n \rtimes \mathfrak{S}_n$ où la règle du produit semi-direct est donnée par

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_n &\rightarrow \text{Aut}((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n) \\ \sigma &\mapsto ((a_1, \dots, a_n) \mapsto (a_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, a_{\sigma^{-1}(n)})) \end{aligned}$$

Une autre manière de représenter les éléments de WB_n est de les voir comme un sous-groupe des permutations s de $\{-n, \dots, -1, 1, \dots, n\}$ telles que $s(-k) = -s(k)$ pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$. Par exemple, si $2 \leq i \leq n$, on note $s_i = (i-1, i)(-i, -i-1)$ et $s_1 = (1, -1)$. Ces deux points de vue sont clairement équivalents.

Les générateurs de WB_n satisfont les relations :

$$\begin{aligned} s_i s_j &= s_j s_i \text{ si } |i-j| \geq 2 \\ s_i s_{i+1} s_i &= s_{i+1} s_i s_{i+1} \text{ pour } 2 \leq i \leq n-1 \\ s_1 s_2 s_1 s_2 &= s_2 s_1 s_2 s_1 \\ s_i^2 &= 1 \text{ pour } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

4.2 Représentation seminormale du groupe de Weyl WB_n

Beaucoup de résultats démontrés pour A_{n-1} peuvent s'adapter au cas de B_n .

La chaîne des systèmes de racines $\emptyset = B_0 \subseteq B_1 \subseteq B_2 \subseteq \dots \subseteq B_n$ correspond à la chaîne des groupes de Weyl

$$\{1\} = WB_0 \subseteq WB_1 \subseteq WB_2 \subseteq \dots \subseteq WB_n$$

On désigne toujours les représentations irréductibles de WB_k par W^λ .

Mais cette fois-ci, λ correspond à une **partition double** de longueur k : $\lambda = (\alpha, \beta)$ où (α, β) est un couple de partitions telles que $|\alpha| + |\beta| = k$.

Un **tableau standard** $L = (L^\alpha, L^\beta)$ associé à la partition double $\lambda = (\alpha, \beta)$ est composé des deux schémas de Young associés à α et β dont les cases sont numérotées à l'aide des entiers de 1 à k de telle sorte que dans un même tableau, les numéros croissent de gauche à droite dans une même ligne et de haut en bas dans une même colonne.

Voici par exemple un tableau standard associé à la partition double $((3, 1, 1, 1), (3, 2))$.

$$\left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 4 & 7 \\ \hline 5 & & \\ \hline 8 & & \\ \hline 10 & & \\ \hline \end{array} , \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 3 & 9 \\ \hline 6 & 11 & \\ \hline \end{array} \right)$$

Théorème 4.2.1 (loi de la ramification pour WB_n). Si W^λ est une représentation irréductible de WB_k avec comme ci-dessus $\lambda = (\alpha, \beta)$ et $|\alpha| + |\beta| = k$, alors la restriction à WB_{k-1} est :

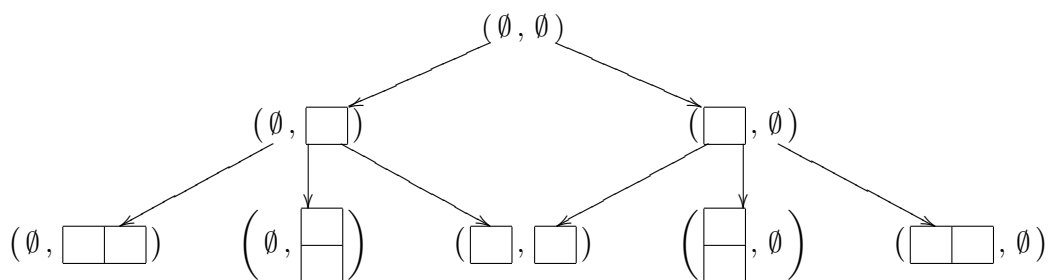
$$W^{(\alpha, \beta)} \downarrow_{WB_{k-1}}^{WB_k} \simeq \bigoplus_{(\mu, \nu) \in (\alpha, \beta)^-} W^{(\mu, \nu)}$$

où $(\alpha, \beta)^-$ est l'ensemble des partitions doubles de longueur $k-1$ obtenues à partir de (α, β) en enlevant une case à l'un des deux schémas.

Ici non plus, la restriction de WB_k à WB_{k-1} n'a pas de multiplicité.

De plus, nous admettrons que $W^{(\mu, \emptyset)} \otimes W^{(\emptyset, \nu)} \uparrow_{WB_a \times WB_b}^{WB_k} \simeq W^{(\mu, \nu)}$ comme représentation induite.

On peut alors construire toujours sur le même principe le graphe Γ associé à la chaîne $\{1\} \subseteq WB_1 \subseteq WB_2 \subseteq \dots \subseteq WB_n$. Par exemple, pour $n = 2$, on obtient :



Comme pour A_{n-1} , on identifie le chemin $L = (\lambda^{(0)} \rightarrow \dots \rightarrow \lambda^{(n)})$ avec le tableau dont la partition double est $\lambda^{(n)}$ et où on a placé l'entier i avec $1 \leq i \leq n$ dans la case que l'on a ajoutée à $\lambda^{(i-1)}$ pour obtenir $\lambda^{(i)}$.

Ici, à la différence de A_{n-1} , pour satisfaire les conditions de la proposition 1.3.1 il faut prendre, pour $1 \leq k \leq n$, $Z_k = \{z_{k,s}, z_{k,l}, z_{k,0}\}$ où

$$\begin{aligned} z_{k,s} &= \sum_{i=1}^k (i, -i) \\ z_{k,l} &= \sum_{1 \leq i < j \leq k} [(i, j)(-i, -j) + (i, -j)(-i, j)] \\ z_{k,0} &= (1, -1)(2, -2) \dots (k, -k) = -Id \end{aligned}$$

$z_{k,s}$ se note ainsi car il s'agit de la somme des réflexions de WB_k de vecteurs les racines positives courtes (les $+e_i$, $1 \leq i \leq k$, de longueur 1). De même, $z_{k,l}$ est la somme des réflexions de vecteurs les racines positives longues (les $e_j - e_i$, $1 \leq i < j \leq k$ et les $e_i + e_j$, $1 \leq i < j \leq k$, toutes de longueur 2).

On remarque que tous ces éléments commutent entre eux dans CWB_n , puisque pour tout $1 \leq k \leq n$, les Z_k sont inclus dans le centre de CWB_k : il s'agit de sommes des éléments d'une même classe de conjugaison.

On peut alors définir les **analogues pour B_n des éléments de Jucys-Murphy** :

$$\begin{aligned} m_{k,s} &= z_{k,s} - z_{k-1,s} = (k, -k) \text{ pour } 1 \leq k \leq n \\ m_{k,l} &= z_{k,l} - z_{k-1,l} = \sum_{i=1}^{k-1} [(i, k)(-i, -k) + (-i, k)(i, -k)] \text{ pour } 2 \leq k \leq n \end{aligned}$$

Ces éléments commutent également entre eux.

Définition 4.1. On définit le **signe** et le **contenu** d'une case b dans une double partition (α, β) par :

$$\begin{aligned} \text{sgn}(b) &= \begin{cases} 1 & \text{si } b \in \alpha, \\ -1 & \text{si } b \in \beta. \end{cases} \\ \text{ct}(b) &= j - i \text{ si } b \text{ est en position } (i, j), \text{ que ce soit dans } \alpha \text{ ou dans } \beta. \end{aligned}$$

Proposition 4.2.1. Soit $1 \leq k \leq n$. En reprenant les notations précédentes, si (μ, ν) est une partition double de longueur k , $\chi^{(\mu, \nu)}$ le caractère de la représentation irréductible $W^{(\mu, \nu)}$ de WB_k , alors on a :

$$\begin{aligned} c_{k,s}(\mu, \nu) &= \frac{\chi^{(\mu, \nu)}(z_{k,s})}{\chi^{(\mu, \nu)}(1)} = \sum_{b \in (\mu, \nu)} \text{sgn}(b) \\ c_{k,l}(\mu, \nu) &= \frac{\chi^{(\mu, \nu)}(z_{k,l})}{\chi^{(\mu, \nu)}(1)} = 2 \sum_{b \in (\mu, \nu)} \text{ct}(b) \\ c_{k,0}(\mu, \nu) &= \frac{\chi^{(\mu, \nu)}(z_{k,0})}{\chi^{(\mu, \nu)}(1)} = \prod_{b \in (\mu, \nu)} \text{sgn}(b) \end{aligned}$$

Preuve :

Notons $a = |\mu|$ et $b = |\nu|$. On a $a + b = k$. Soient WB_a le sous-groupe de WB_k des permutations signées de $\{1, 2, \dots, a\}$ et WB_b celui des permutations signées de $\{a + 1, \dots, k\}$. Soient S_a et S_b les groupes des permutations de $\{1, 2, \dots, a\}$ et de $\{a + 1, \dots, k\}$ respectivement.

On veut se ramener à ce que l'on vient de montrer pour A_n .

Soit W^μ la représentation irréductible de S_a correspondant à la partition μ . On étend cette représentation à WB_a en faisant agir $s_1 = (1, -1)$ de façon triviale, donc en ne touchant pas aux signes.

Soit de même W^ν la représentation irréductible de S_b pour ν . Cette fois, on étend cette représentation à WB_b en faisant agir l'élément $(a + 1, -(a + 1)) \in WB_b$ par $-Id_{W^\nu}$.

Alors W^μ et W^ν munis de cette action de WB_k s'identifient aux représentations $W^{(\mu, \emptyset)}$ et $W^{(\emptyset, \nu)}$ de WB_k . Par conséquent, ce sont des représentations irréductibles pour les groupes WB_a et WB_b respectivement.

De plus, par construction, si χ^μ et χ^ν sont les caractères des représentations irréductibles W^μ et W^ν de S_a et S_b respectivement, comme les caractères sont constants sur une classe de conjugaison, on a :

$$\begin{aligned} \chi^{(\mu, \emptyset)}((1, 2)(-1, -2)) &= \chi^\mu((1, 2)) \\ \chi^{(\mu, \emptyset)}((1, -1)) &= \chi^\mu(1) \\ \chi^{(\mu, \emptyset)}((1, -1)(2, -2) \dots (a, -a)) &= \chi^\mu(1) \\ \chi^{(\emptyset, \nu)}((a + 1, a + 2)(-(a + 1), -(a + 2))) &= \chi^\nu((a + 1, a + 2)) \\ \chi^{(\emptyset, \nu)}((a + 1, -(a + 1))) &= -\chi^\nu(1) \\ \chi^{(\emptyset, \nu)}((a + 1, -(a + 1))(a + 2, -(a + 2)) \dots (k, -k)) &= (-1)^b \chi^\nu(1) \end{aligned}$$

Comme $W^{(\mu, \emptyset)} \otimes W^{(\emptyset, \nu)} \uparrow_{WB_a \times WB_b}^{WB_k} \simeq W^{(\mu, \nu)}$ comme représentation induite, on peut calculer les caractères $\chi^{(\mu, \nu)}$ comme à la proposition 1.1.1 (6) par la formule :

$$\chi^{(\mu, \nu)}(w) = \sum_{g_i^{-1}wg_i \in WB_a \times WB_b} \chi^{(\mu, \emptyset)}(g_i^{-1}wg_i) \chi^{(\emptyset, \nu)}(g_i^{-1}wg_i) \quad (18)$$

où la somme porte sur les représentants g_i des classes de $WB_k/(WB_a \times WB_b)$ tels que $g_i^{-1}wg_i \in WB_a \times WB_b$.

En utilisant cette formule, on obtient :

$$\begin{aligned}
c_{k,l}(\mu, \nu) &= \frac{\chi^{(\mu, \nu)}(z_{k,l})}{\chi^{(\mu, \nu)}(1)} \\
&= \frac{\sum_{1 \leq i < j \leq k} \chi^{(\mu, \nu)}((i, j)(-i, -j)) + \chi^{(\mu, \nu)}((i, -j)(-i, j))}{\chi^{(\mu, \nu)}(1)} \\
&= \frac{k(k-1)\chi^{(\mu, \nu)}((1, 2)(-1, -2))}{\chi^{(\mu, \nu)}(1)} \\
&= k(k-1) \frac{C_{k-2}^{a-2} \chi^{(\mu, \emptyset)}((1, 2)) \chi^{(\emptyset, \nu)}(1) + C_{k-2}^a \chi^{(\mu, \emptyset)}(1) \chi^{(\emptyset, \nu)}((a+1, a+2))}{C_k^a \chi^{(\mu, \emptyset)}(1) \chi^{(\emptyset, \nu)}(1)} \\
&= k(k-1) \left(\frac{a(a-1)\chi^\mu((1, 2))}{k(k-1)\chi^\mu(1)} + \frac{b(b-1)\chi^\nu((a+1, a+2))}{k(k-1)\chi^\nu(1)} \right) \\
&= 2 \left(\frac{\chi^\mu(\sum_{1 \leq i < j \leq a} (i, j))}{\chi^\mu(1)} + \frac{\chi^\nu(\sum_{a+1 \leq i < j \leq k} (i, j))}{\chi^\nu(1)} \right) \\
&= 2 \left(\frac{\chi^\mu(z'_a)}{\chi^\mu(1)} + \frac{\chi^\nu(z'_b)}{\chi^\nu(1)} \right) \\
&= 2 \left(\sum_{b \in \mu} ct(b) + \sum_{b \in \nu} ct(b) \right) \\
&= 2 \sum_{b \in (\mu, \nu)} ct(b)
\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}
c_{k,s}(\mu, \nu) &= \frac{\chi^{(\mu, \nu)}(z_{k,s})}{\chi^{(\mu, \nu)}(1)} \\
&= \frac{\chi^{(\mu, \nu)}(\sum_{i=1}^k (i, -i))}{\chi^{(\mu, \nu)}(1)} \\
&= \frac{k\chi^{(\mu, \nu)}((1, -1))}{\chi^{(\mu, \nu)}(1)} \\
&= k \frac{C_{k-1}^{a-1} \chi^{(\mu, \emptyset)}((1, -1)) \chi^{(\emptyset, \nu)}(1) + C_{k-1}^a \chi^{(\mu, \emptyset)}(1) \chi^{(\emptyset, \nu)}((a+1, -(a+1)))}{C_k^a \chi^{(\mu, \emptyset)}(1) \chi^{(\emptyset, \nu)}(1)} \\
&= \frac{a\chi^\mu((1, -1))}{\chi^\mu(1)} + \frac{b\chi^\nu((a+1, -(a+1)))}{\chi^\nu(1)} \\
&= a - b \\
&= \sum_{b \in (\mu, \nu)} sgn(b)
\end{aligned}$$

La dernière égalité provenant du fait que pour toute case b dans μ , $sgn(b) = 1$ et pour toute case b dans ν , $sgn(b) = -1$.

Un calcul similaire permet d'obtenir la formule donnant $\chi^{(\mu, \nu)}(z_{k,0})$.

□

Comme d'habitude, on définit le **poïds** d'un chemin $L = (\lambda^{(0)} \rightarrow \dots \rightarrow \lambda^{(n)})$, avec $|\lambda^{(k)}| = k$ par :

$$wt(L) = (c_1(\lambda^{(1)}), \dots, c_n(\lambda^{(n)}))$$

où pour une partition double $\lambda = (\mu, \nu)$,

$$c_k(\lambda) = (c_{k,s}(\lambda), c_{k,l}(\lambda), c_{k,0}(\lambda)).$$

La proposition précédente nous permet de voir que la donnée de $wt(L)$ équivaut à celle des deux n-uplets

$$\begin{aligned}\widetilde{wt}_1(L) &= (ct(L(1)), \dots, ct(L(n))) \quad \text{et} \\ \widetilde{wt}_2(L) &= (sgn(L(1)), \dots, sgn(L(n))).\end{aligned}$$

Proposition 4.2.2. *Tout tableau $L = (\lambda^{(0)} \rightarrow \dots \rightarrow \lambda^{(n)})$ est caractérisé par son poids.*

Preuve :

Supposons donné $wt(L)$, et cherchons à déterminer L . On connaît donc $\widetilde{wt}_1(L)$ et $\widetilde{wt}_2(L)$. Par récurrence sur $i \geq 1$, supposons avoir déterminé les $\lambda^{(j)} = (\mu^{(j)}, \nu^{(j)})$ pour $0 \leq j \leq i-1$. Alors, comme on connaît $sgn(L(i))$, on sait dans quelle partition $\mu^{(i-1)}$ ou $\nu^{(i-1)}$ il faut ajouter une case pour obtenir $\lambda^{(i)}$. Puis, comme on connaît $ct(L(i))$, comme pour la preuve de la proposition 3.2 concernant A_n , on sait où ajouter la case i dans le tableau correspondant. Donc par récurrence, L est uniquement déterminé par son poids. □

Construction de la représentation seminormale de $WB_0 \subseteq WB_1 \subseteq \dots \subseteq WB_n$

Comme avant, on construit $P_0 \subseteq P_1 \subseteq \dots \subseteq P_n$ l'algèbre des chemins du graphe Γ de $WB_0 \subseteq WB_1 \subseteq \dots \subseteq WB_n$. Pour tout $\lambda = (\mu, \nu) \in \mathcal{G}_n$,

$$V^\lambda = Vect_{\mathbb{C}}\{v_L \text{ tq } L \text{ est un tableau standard ayant pour double partition } \lambda\}.$$

De même, les v_L forment une base seminormale pour la représentation de P_n . En prenant un isomorphisme Φ comme pour le lemme 1.1, si $L = (\lambda^{(0)} \rightarrow \dots \rightarrow \lambda^{(n)})$ est un chemin de Γ , on a

$$z_{k,s}v_L = c_{k,s}(\lambda^{(k)})v_L, \quad z_{k,l}v_L = c_{k,l}(\lambda^{(k)})v_L, \quad z_{k,0}v_L = c_{k,0}(\lambda^{(k)})v_L.$$

D'où

$$m_{k,s}v_L = sgn(L(k))v_L \tag{19}$$

$$m_{k,l}v_L = ct(L(k))v_L \tag{20}$$

Comme pour A_n , on cherche à déterminer les actions des s_i ($1 \leq i \leq n$), les générateurs de WB_n . En reprenant les notations de la partie 3.2, on note, pour L un tableau standard de forme λ :

$$\Phi^{-1}(s_i)v_L = s_i v_L = \sum_{M \text{ tableau standard de forme } \lambda} (s_i)_{ML} v_M$$

où les $(s_i)_{M,L}$ sont des scalaires à déterminer.

On garde la notation sL , où $s \in \mathfrak{S}_n \subset WB_n$ pour désigner le tableau où l'entier j a été remplacé dans L par son image $s(j)$.

Théorème 4.2.2 (Young). *Soit $\lambda = (\alpha, \beta)$ une partition double telle que $|\lambda| = |\alpha| + |\beta| = n$. Pour chaque générateur s_1, \dots, s_n de WB_n , on définit son action sur V^λ par*

$$\begin{aligned}s_1 v_L &= sgn(L(1))v_L \\ s_i v_L &= (s_i)_{L,L} v_L + (1 + (s_i)_{L,L}) v_{s_i L}, \quad \text{pour } 2 \leq i \leq n\end{aligned}$$

où

$$(s_i)_{L,L} = \frac{1}{ct(L(i)) - ct(L(i-1))}$$

(et on définit par convention $v_{s_i L} = 0$ lorsque $s_i L$ n'est pas standard). Alors cette action s'étend à une action de WB_n bien définie sur V_λ .

Preuve :

L'action de s_1 se déduit directement de la formule (19) puisque $s_1 = m_{1,s}$.

Pour l'action de s_i pour $2 \leq i \leq n$, on adapte directement la preuve du théorème 3.2 pour A_n .

□

Théorème 4.2.3 (Young). *En reprenant l'action de WB_n sur les espaces V^λ comme dans le théorème précédent, alors les $\{V^\lambda$, pour λ partition double de longueur n \} forment un système complet de représentations irréductibles de WB_n , et pour toute partition double $\lambda = (\alpha, \beta)$, $\{v_L$ tq L est un tableau standard de forme λ \} est une base seminormale pour la représentation V^λ de WB_n .*

Preuve :

On raisonne par récurrence sur n . Pour $n = 0$, $WB_0 = \{1\}$ et les représentations $V^{(\emptyset, \emptyset)}$ et $W^{(\emptyset, \emptyset)}$ sont bien équivalentes.

Pour passer de $n - 1$ à n , on utilise exactement le même argument que dans la preuve du théorème 3.3 pour A_n .

□

4.3 Représentation seminormale de l'algèbre de Hecke $HB_n(p^2, q^2)$

L'algèbre de Hecke $HB_n(p^2, q^2)$ a été définie dans la section 2.4. On procède comme pour $HA_{n-1}(q^2)$.

Pour tout $1 \leq k \leq n$, définissons

$$M_k = T_k T_{k-1} \dots T_2 T_1 T_2 \dots T_{k-1} T_k.$$

puis

$$z_k = M_k M_{k-1} \dots M_2 M_1$$

Proposition 4.3.1. *z_k est dans le centre de $HB_k(p^2, q^2)$.*

Preuve :

On procède comme avant en plusieurs étapes.

(1) Montrons que pour $1 \leq i < k$, $T_i M_k = M_k T_i$.

En effet, si $i = 1$,

$$\begin{aligned} T_1 M_k &= T_1 T_k \dots T_2 T_1 T_2 \dots T_k = T_k \dots T_1 T_2 T_1 T_2 \dots T_k \\ &= T_k \dots T_2 T_1 T_2 T_1 \dots T_k \\ &= M_k T_1 \end{aligned}$$

en utilisant les relations (11) et (13).

Si $2 \leq i \leq k - 1$,

$$\begin{aligned} T_i M_k &= T_i T_k \dots T_1 \dots T_k \\ &= T_k \dots T_i T_{i+1} T_i \dots T_1 \dots T_k \\ &= T_k \dots T_{i+1} T_i T_{i+1} \dots T_1 \dots T_k \\ &= T_k \dots T_{i+1} T_i \dots T_1 \dots T_{i+1} T_i T_{i+1} \dots T_k \\ &= T_k \dots T_1 \dots T_i T_{i+1} T_i \dots T_k \\ &= M_k T_i \end{aligned}$$

en utilisant les relations (11) et (12).

$$(2) T_1 M_1 = T_1^2 = M_1 T_1$$

Montrons par récurrence sur $k \geq 2$ que $T_k M_k M_{k-1} = M_k M_{k-1} T_k$.

Si $k = 2$,

$$T_2 M_2 M_1 = T_2 (T_2 T_1 T_2) T_1 = (T_2 T_1 T_2) T_1 T_2 = M_2 M_1 T_2$$

Supposons le résultat vrai pour $k - 1$, avec $k \geq 3$.

$$\begin{aligned} T_k M_k M_{k-1} &= T_k (T_k T_{k-1} M_{k-2} T_{k-1} T_k) (T_{k-1} M_{k-2} T_{k-1}) \\ &= T_k T_k T_{k-1} M_{k-2} (T_k T_{k-1} T_k) M_{k-2} T_{k-1} \\ &= T_k (T_k T_{k-1} T_k) M_{k-2} T_{k-1} M_{k-2} T_k T_{k-1} \\ &= (T_k T_{k-1} T_k) \underbrace{(T_{k-1} M_{k-2} T_{k-1} M_{k-2})}_{M_{k-1}} T_k T_{k-1} \\ &= T_{k-1} T_k T_{k-1} (M_{k-1} M_{k-2} T_{k-1}) T_k T_{k-1} \\ &= (T_{k-1} T_k T_{k-1}) M_{k-2} T_{k-1} M_{k-2} T_k T_{k-1} T_k \\ &= (T_k T_{k-1} T_k) M_{k-2} T_{k-1} T_k M_{k-2} T_{k-1} T_k \\ &= (T_k T_{k-1} M_{k-2} T_{k-1} T_k) (T_{k-1} M_{k-2} T_{k-1}) T_k \\ &= M_k M_{k-1} T_k \end{aligned}$$

D'où le résultat par récurrence.

Par suite, $z_k = M_k M_{k-1} \dots M_2 M_1$ commute avec les T_i pour $1 \leq i \leq k$, donc est dans le centre de $HB_k(p^2, q^2)$.

□

Comme $HB_{k-1}(p^2, q^2) \subset HB_k(p^2, q^2)$, on a comme pour A_n que les z_k , $1 \leq k \leq n$ forment une partie commutative de $HB_n(p^2, q^2)$ et, de même, puisque pour $i < j$, $M_i M_j z_{j-1} = M_j M_i z_{j-1}$, les M_k pour $1 \leq k \leq n$ forment aussi une partie commutative.

De même que pour A_n , nous admettrons le

Théorème 4.3.1. *Soit $\mathbb{K} = \mathbb{C}(p, q)$. $HB_n(p^2, q^2)$ est une algèbre semi-simple scindée, et il existe un \mathbb{K} -isomorphisme d'algèbres*

$$\bar{\Psi} : HB_n(p^2, q^2) \longrightarrow \mathbb{K}WB_n$$

tel que $\bar{\Psi}(HB_k(p^2, q^2)) = \mathbb{K}WB_k$ pour tout $1 \leq k \leq n$.

Cet isomorphisme nous permet ici aussi de faire le lien entre l'algèbre de Hecke et son groupe de Weyl pour obtenir la représentation seminormale de $HB_n(p^2, q^2)$ à partir de celle de $\mathbb{K}WB_n$.

On reprend $P_0 \subseteq \dots \subseteq P_n$ la chaîne des algèbres de chemins, cette fois-ci sur \mathbb{K} , correspondant à la chaîne $WB_0 \subseteq \dots \subseteq WB_n$,

$$V^\lambda = \text{Vect}_{\mathbb{K}}\{v_L \text{ tq } L \text{ est un tableau de Young standard de partition double } \lambda\}$$

et l'isomorphisme de \mathbb{K} -algèbres $\Psi : P_n \longrightarrow HB_n(p^2, q^2)$ tel que pour tout $1 \leq k \leq n$, $\Psi(P_k) = HB_k(p^2, q^2)$.

Proposition 4.3.2. *Soit $\rho : HB_n(p^2, q^2) \rightarrow \mathbb{K}^{m \times m}$ une représentation irréductible de $HB_n(p^2, q^2)$. On suppose qu'elle correspond à la représentation irréductible V^λ de WB_n de caractère χ^λ . Alors*

$$\rho(z_n) = \frac{\chi(z_{n,0})}{\chi(1)} p \frac{x^\lambda(z_{n,s})}{x^{\lambda(1)}} q \frac{x^\lambda(z_{n,l})}{x^{\lambda(1)}} \cdot Id_{m \times m}$$

Par conséquent, si $L = (\lambda^{(1)} \rightarrow \dots \rightarrow \lambda^{(n)})$ est un tableau de Young standard, on a pour tout $1 \leq k \leq n$,

$$z_k v_L = c_{k,0}(\lambda^{(k)}) p^{c_{k,s}(\lambda^{(k)})} q^{c_{k,l}(\lambda^{(k)})} v_L$$

Preuve :

Les idées sont les mêmes que pour la preuve de la proposition 3.3.2. On commence par montrer que

$$\rho(z_k^2) = p^{2 \frac{\chi^\lambda(z_{k,s})}{\chi^\lambda(1)}} q^{2 \frac{\chi^\lambda(z_{k,l})}{\chi^\lambda(1)}} \cdot Id_{m \times m}.$$

En effet, z_k^2 est aussi dans le centre de $HB_k(p^2, q^2)$ (puisque z_k l'est), donc il agit par un multiple de l'identité : il existe $c \in \mathbb{K}$ tel que $\rho(z_k^2) = c \cdot Id_{m \times m}$.

Notons $\chi = \chi^\lambda$.

En prenant le déterminant, on obtient :

$$c^m = \det \rho(z_k^2) = \det \rho(M_k \dots M_1 M_k \dots M_1) = \prod_{j=2}^k \prod_{i=2}^j (\det \rho(T_i))^4 (\det \rho(T_1))^{2k}$$

Comme pour la preuve de la proposition 3.3.2 on calcule

$$\begin{aligned} \chi(T_1) &= a_1 p - b_1 p^{-1} \\ \chi(T_i) &= a_i q - b_i q^{-1} \text{ pour } 2 \leq i \leq k \end{aligned}$$

où a_1 et b_1 (respectivement a_i et b_i) sont les multiplicités des valeurs propres p et p^{-1} (respectivement q et q^{-1}).

$$\begin{aligned} \chi(s_1) &= a_1 - b_1 \\ \chi(s_i) &= a_i - b_i \text{ pour } 2 \leq i \leq k \\ \det \rho(T_1) &= p^{\chi(s_1)} (-1)^{b_1} \\ \det \rho(T_i) &= q^{\chi(s_i)} (-1)^{b_i} \\ \det \rho(z_k^2) &= p^{2k \cdot \chi(s_1)} q^{2 \times 2 \sum_{j=2}^k \sum_{i=2}^j \chi(s_i)} \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \chi(z_{k,s}) &= \sum_{i=1}^k \chi(i, -i) = k \cdot \chi(s_1) \text{ et} \\ \chi(z_{k,l}) &= \sum_{1 \leq i < j \leq k} (\chi((i, j)(-i, -j)) + \chi((i, -j)(-i, j))) = 2 \sum_{j=2}^k \sum_{i=2}^j \chi(s_i), \\ \chi(1) &= m \end{aligned}$$

d'où le résultat :

$$\rho(z_k^2) = p^{2 \frac{\chi^\lambda(z_{k,s})}{\chi^\lambda(1)}} q^{2 \frac{\chi^\lambda(z_{k,l})}{\chi^\lambda(1)}} \cdot Id_{m \times m}.$$

Comme les valeurs propres de $\rho(z_k)$ sont des racines carrées de celles de $\rho(z_k^2)$, on a :

$$\rho(z_k) = (-1)^d \cdot p^{\frac{\chi^\lambda(z_{k,s})}{\chi^\lambda(1)}} q^{\frac{\chi^\lambda(z_{k,l})}{\chi^\lambda(1)}} \cdot Id_{m \times m}.$$

où la parité de d est à déterminer.

En spécialisant à $p = q = 1$, on obtient $z_k = z_{k,0} = (1, -1) \dots (k, -k)$.

Donc $\det \rho(z_{k,0}) = \prod_{b \in \lambda} \text{sgn}(b) = c_{k,0}(\lambda)$.

D'où le résultat.

□

On a toujours le théorème suivant dont la preuve est identique à celle du cas de $HA_{n-1}(q^2)$.
On note pour $1 \leq i \leq n$

$$CT(L(i)) = \text{sgn}(L(i))p^{\text{sgn}(L(i))}q^{2\text{ct}(L(i))}.$$

Théorème 4.3.2. *Soit λ une partition double de longueur n . On définit pour chaque générateur T_1, \dots, T_n de $HB_n(p^2, q^2)$ son action sur V^λ par*

$$T_1 v_L = CT(L(1))v_L$$

et

$$T_i v_L = (T_i)_{L,L} v_L + (q^{-1} + (T_i)_{L,L}) v_{s_i L} \text{ pour } 2 \leq i \leq n \text{ où}$$

$$(T_i)_{L,L} = \frac{q - q^{-1}}{1 - \frac{CT(L(k-1))}{CT(L(k))}}$$

pour tout $2 \leq k \leq n$, avec les conventions habituelles pour $v_{s_i L}$. Alors cette action s'étend à une action de $HB_n(p^2, q^2)$ bien définie sur V^λ .

Théorème 4.3.3 (Hoefsmit). *On prend V^λ muni de l'action de $HB_n(p^2, q^2)$ comme dans le théorème précédent. Alors les V^λ avec λ partition double de longueur n , forment un système complet de représentations irréductibles de $HB_n(p^2, q^2)$ et pour toute partition double λ ,*

$$\{v_L \text{ tq } L \text{ est un tableau de Young standard de forme } \lambda\}$$

est une base seminormale de V^λ comme représentation de $HB_n(p^2, q^2)$.

Preuve :

Ce théorème découle directement des théorèmes précédents.

□

Appendice

Le but de cet appendice est de montrer la formule (16).

D'abord introduisons la formule de Frobenius qui est un résultat remarquable de la théorie des représentations du groupe symétrique. Pour la démonstration nous renvoyons à [2, chapitre 4, §4.3].

Théorème 4.3.4 (Formule de Frobenius). *Soient V^λ la représentation irréductible de \mathfrak{S}_n indexée par la partition $\lambda : \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$ et χ^λ son caractère. Pour $\mathbf{i} = (i_1, i_2, \dots, i_n)$ avec $\sum \alpha i_\alpha = n$, on désigne par $C_{\mathbf{i}}$ la classe de conjugaison de \mathfrak{S}_n des permutations qui ont i_1 1-cycles, i_2 2-cycles, ..., i_n n -cycles. Soient k indéterminées x_1, \dots, x_k avec k le nombre de lignes du diagramme de Young de λ . On introduit*

$$P_j(x) = x_1^j + x_2^j + \dots + x_k^j$$

$$\Delta(x) = \prod_{i < j} (x_i - x_j).$$

Etant donnée une série formelle $f(x_1, \dots, x_k)$ et (l_1, \dots, l_k) , notons $[f(x_1, \dots, x_k)]_{(l_1, \dots, l_k)}$ le coefficient de $x_1^{l_1} \dots x_k^{l_k}$ dans f . Pour la partition λ donnée, on définit

$$l_1 = \lambda_1 + k - 1, l_2 = \lambda_2 + k - 2, \dots, l_k = \lambda_k$$

qui est une suite strictement décroissante de k nombres positifs. Alors la valeur de χ^λ sur un $g \in C_{\mathbf{i}}$ est donnée par

$$\chi^\lambda(C_{\mathbf{i}}) = [\Delta(x) \prod_j P_j(x)^{i_j}]_{(l_1, \dots, l_k)}.$$

□

De ce théorème, on déduit la formule suivante pour calculer la valeur de χ^λ pour un cycle.

Proposition 4.3.3.

$$\chi^\lambda((1, 2, \dots, m)) = \frac{(n-m)! \dim V_\lambda}{-m \cdot n!} \sum_{p=1}^k \frac{\psi(l_p)}{\varphi'(l_p)} \quad (21)$$

où

$$\varphi(x) = \prod_{i=1}^k (x - l_i), \quad \psi(x) = \varphi(x - m) \prod_{j=1}^m (x - j + 1)$$

Preuve :

Pour le cycle $(1, \dots, m)$, sa classe de conjugaison correspondant à \mathbf{i} satisfait $i_1 = n - m$, $i_m = 1$, $i_j = 0$ pour les autres j .

À l'aide du déterminant de Vandermonde, on a

$$\Delta(x) = \det \begin{vmatrix} 1 & x_k & \dots & x_k^{k-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^{k-1} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} (\text{sgn} \sigma) x_k^{\sigma(1)-1} \dots x_1^{\sigma(k)-1} \quad (22)$$

L'autre terme est

$$\begin{aligned}
\prod_j P_j(x)^{i_j} &= (x_1 + \dots + x_k)^{n-m} (x_1^m + \dots + x_k^m) \\
&= \sum_{(r_1, \dots, r_k) \text{ tel que } \sum r_i = n-m} \frac{(n-m)!}{r_1! \dots r_k!} x_1^{r_1} \dots x_k^{r_k} (x_1^m + \dots + x_k^m) \\
&= \sum_{1 \leq p \leq k} \sum_{(r_1, \dots, r_k)} \frac{(n-m)!}{r_1! \dots r_k!} x_1^{r_1} \dots x_p^{r_p+m} \dots x_k^{r_k}
\end{aligned}$$

Donc en combinant les termes correspondants, on obtient

$$[\Delta(x) \prod_j P_j(x)^{i_j}]_{(l_1, \dots, l_k)} = \sum_{1 \leq p \leq k} A_p \quad (23)$$

où

$$A_p = \sum \frac{\text{sgn } \sigma \cdot (n-m)!}{(l_1 - \sigma(k) + 1)! \dots (l_p - \sigma(k-p+1) - m + 1)! \dots (l_k - \sigma(1) + k)!}$$

La somme porte sur les $\sigma \in \mathfrak{S}_k$ tels que $l_p - \sigma(k-p+1) - m + 1 \geq 0$, $l_i - \sigma(k-i+1) + 1 \geq 0$, pour les autres $1 \leq i \leq k$. On note $l'_p = l_p - m$ et $l'_i = l_i$. Alors

$$\begin{aligned}
A_p &= \frac{(n-m)!}{l'_1! \dots l'_p! \dots l'_k!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \text{sgn } \sigma \prod_{j=1}^k l'_j (l'_j - 1) \dots (l'_j - \sigma(k-j+1) + 2) \\
&= \frac{(n-m)!}{l'_1! \dots l'_p! \dots l'_k!} \begin{vmatrix} 1 & l'_k & l'_k(l'_k - 1) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & l'_1 & l'_1(l'_1 - 1) & \dots \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

Le déterminant se ramène à un déterminant de Vandermonde, donc

$$\begin{aligned}
A_p &= \frac{(n-m)!}{l'_1! \dots l'_p! \dots l'_k!} \prod_{i < j} (l'_i - l'_j) \\
&= \frac{(n-m)!}{l_1! \dots (l_p - m)! \dots l_k!} \prod_{i < j, i, j \neq p} (l_i - l_j) \prod_{i < p} (l_i - l_p + m) \prod_{p < j} (l_p - m - l_j)
\end{aligned}$$

Remarquons ici que quand $m = 1$, ces calculs nous donnent au passage :

$$\dim V_\lambda = \chi^\lambda(1) = \frac{n!}{l_1! \dots l_k!} \prod_{i < j} (l_i - l_j)$$

Calculons en combinant ces deux égalités précédentes avec

$$\begin{aligned}
\varphi'(l_p) &= \prod_{i \neq p} (l_p - l_i) \\
\psi(l_p) &= -m \prod_{i \neq p} (l_p - l_i - m) \prod_{j=1}^m (l_p - j + 1)
\end{aligned}$$

On obtient

$$A_p = \frac{(n-m)! \dim V_\lambda \psi(l_p)}{-m \cdot n! \varphi'(l_p)}$$

Le résultat découle de la formule de Frobenius et de (23).

□

Remarque 4.1. Comme les l_i sont les racines simples de φ , la somme dans (21) est le coefficient de x^{-1} dans la série de Laurent de $\psi(x)/\varphi(x)$ en $x = \infty$.

On désigne les cases dans un diagramme de Young par leur position (i, j) . Pour λ une partition telle que $|\lambda| = n$, on note encore son diagramme de Young correspondant par λ et on introduit les notations ci-dessous :

$$\begin{aligned} r &= \max\{i; (i, i) \in \lambda\} \\ \text{pour } 1 \leq i \leq r, \quad a_i &\text{ est le cardinal de } \{j > r - i + 1; (j, r - i + 1) \in \lambda\} \\ b_i &\text{ est le cardinal de } \{j > r - i + 1; (r - i + 1, j) \in \lambda\} \end{aligned}$$

Lemme 4.1. On a les égalités des ensembles

$$\{l_1, \dots, l_r\} = \{k + b_1, \dots, k + b_r\}$$

et

$$\{l_{r+1}, \dots, l_k, k - 1 - a_1, \dots, k - 1 - a_r\} = \{0, 1, \dots, k - 1\}$$

Preuve :

$$b_{r-i+1} = \lambda_i - i, \text{ donc pour } 1 \leq i \leq r, l_i = k + b_{r-i+1}.$$

D'autre part, on rappelle que k est le nombre de lignes du diagramme de Young de λ , l_{r+1}, \dots, l_k est une suite strictement décroissante avec $l_k = \lambda_k$ et $l_{r+1} < k$ par définition de r . On note par convention $\lambda_{k+1} = 0$, donc $l_{k+1} = -1$. Remarquons que pour $r + 1 \leq i \leq k$, $\lambda_i \leq r$ et chaque fois que $l_i > l_{i+1} + 1$, on a $\lambda_i > \lambda_{i+1}$. Puis pour $\lambda_i \geq j \geq \lambda_{i+1} + 1$, on a $i - a_{r-j+1} = j$. Ceci entraîne $k - 1 - a_{r-j+1} = k + j - i - 1$. Comme les a_i croissent strictement, tous les nombres strictement compris entre l_i et l_{i+1} sont obtenus une et une seule fois par ces $k - 1 - a_{r-j+1}$. En particulier $k - 1 - a_r = 0$. Après, pour λ_{r+1} , si $\lambda_{r+1} = r$, $l_{r+1} = k - 1$. Sinon, $\lambda_{r+1} < r$, $a_1 = 0$, $k - 1 - a_1 = k - 1$. Donc on a bien $\{l_{r+1}, \dots, l_k, k - 1 - a_1, \dots, k - 1 - a_r\} = \{0, 1, \dots, k - 1\}$.

□

Proposition 4.3.4. $\psi(x)/\varphi(x) = g(y)/f(y)$, où $y = x - k$

$$f(y) = \frac{\prod_{i=1}^r (y - b_i)}{\prod_{i=1}^r (y + a_i + 1)}, \quad g(y) = f(y - m) \prod_{j=1}^m (y - j + 1)$$

Preuve :

D'après les égalités d'ensembles ci-dessus, on a

$$\begin{aligned} f(y) &= \frac{(x - l_1) \cdots (x - l_k)}{\prod_{j=0}^{k-1} (x - j)} = \frac{\varphi(x)}{\prod_{j=0}^{k-1} (x - j)} \\ g(y) &= \frac{\varphi(x - m)}{\prod_{j=0}^{k-1} (x - m - j)} \prod_{j=1}^m (x - k - j + 1) \end{aligned}$$

Puis on obtient $\psi(x)/\varphi(x) = g(y)/f(y)$ par un calcul direct.

□

Remarque 4.2. Le coefficient de x^{-1} dans la série de Laurent de $\psi(x)/\varphi(x)$ en $x = \infty$ est égal à celui de $g(x)/f(x)$.

Proposition 4.3.5.

$$\chi^\lambda((1, 2)) = \frac{\dim V^\lambda}{n(n-1)} \sum_{i=1}^r (b_i(b_i+1) - a_i(a_i+1))$$

Preuve :

On calcule d'abord le coefficient de x^{-1} dans la série de Laurent de $g(x)/f(x)$ pour $m = 2$.

$$f(x) = \frac{\prod_{i=1}^r (x - b_i)}{\prod_{i=1}^r (x + a_i + 1)}, \quad g(x) = x(x-1)f(x-2)$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{g(x)}{f(x)} &= x(x-1) \prod_{i=1}^r \left(1 - \frac{2}{x - b_i}\right) \prod_{i=1}^r \left(1 + \frac{2}{x + a_i - 1}\right) \\ &= x(x-1) \prod_{i=1}^r \left(1 - \frac{2}{x} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{b_i}{x}\right)^j\right)\right) \prod_{i=1}^r \left(1 + \frac{2}{x} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{-(a_i - 1)}{x}\right)^j\right)\right) \end{aligned}$$

Son coefficient en x^{-1} est égal au coefficient de x^{-3} dans

$$\left(1 - \frac{1}{x}\right) \prod_{i=1}^r \left(1 - \frac{2}{x} - \frac{2b_i}{x^2} - \frac{2b_i^2}{x^3}\right) \prod_{i=1}^r \left(1 + \frac{2}{x} - \frac{2(a_i - 1)}{x^2} + \frac{2(a_i - 1)^2}{x^3}\right).$$

Regardons les termes qui donnent x^{-3} . Ce sont les

$$\begin{aligned} &-\frac{2b_i^2}{x^3}, \quad \frac{2(a_i - 1)^2}{x^3}, \quad \left(-\frac{2b_i}{x^2}\right)\left(-\frac{1}{x}\right), \quad \left(-\frac{2(a_i - 1)}{x^2}\right)\left(-\frac{1}{x}\right) \\ &\left(-\frac{2b_i}{x^2}\right)\left[(r-1)\left(-\frac{2}{x}\right) + r\left(\frac{2}{x}\right)\right] = \left(-\frac{2b_i}{x^2}\right)\frac{2}{x} \\ &\left(-\frac{2(a_i - 1)}{x^2}\right)\left[(r-1)\left(\frac{2}{x}\right) + r\left(\frac{-2}{x}\right)\right] = \left(-\frac{2(a_i - 1)}{x^2}\right)\left(\frac{-2}{x}\right) \\ &C_r^2\left[\left(\frac{2}{x}\right)\left(\frac{-2}{x}\right)^2 + \left(\frac{-2}{x}\right)\left(\frac{2}{x}\right)^2\right] = 0 \\ &r\left(\frac{-2}{x}\right)\left(\frac{-1}{x}\right)\left(\frac{2}{x}\right) = \frac{4r}{x^3} \end{aligned}$$

Donc le coefficient est

$$\sum_{i=1}^r 2[-b_i(b_i+1) + a_i(a_i+1)],$$

ce qui est égal à $\sum_{p=1}^k \frac{\psi(l_p)}{\phi'(l_p)}$ d'après les deux remarques ci-dessus. En appliquant (21) à $m = 2$, on obtient

$$\chi^\lambda((1, 2)) = \frac{\dim V^\lambda}{n(n-1)} \sum_{i=1}^r (b_i(b_i+1) - a_i(a_i+1))$$

□

Références

- [1] N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie* chap. 4, 5 et 6, Hermann, 1968.
- [2] W. Fulton, J. Harris, *Representation theory, a first course*, Springer, 1991.
- [3] M. Geck, J. Michel, "Good" elements of finite Coxeter groups and representations of Iwahori-Hecke algebras', *Proc. London Math. Soc.* (3) 74 (1997) 275-293.
- [4] P. De la Harpe, M. Kervaire, C. Weber, 'On the Jones polynomial' *L'Enseignement Mathématique* 32 (1936) 271-335 §4 et 5.
- [5] J. E. Humphreys, *Introduction to Lie algebras and representation theory*, chap. III, Springer, 1972.
- [6] V. F. R. Jones, 'Hecke algebra representations of braid groups and link polynomials' *Annals of Maths* 126 (1987) 333-388, § 0 à 4.
- [7] M. Naïmark, A. Stern, *Théorie de représentation des groupes*, chap. 1 et 2, Editions Mir, 1979.
- [8] A. Ram, 'Seminormal representations of Weyl groups and Iwahori-Hecke algebras', *Proc. London Math Soc.* 75 (1997) 99-133, § 1 à 4
- [9] J. P. Serre, *Algèbres de Lie semi-simples complexes*, chap. 5, Benjamin, 1966.